ПЛЕХАНОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2014-2015

Заочный тур
11 класс

1. Двузначное число равняется сумме числа его десятков и квадрата числа его единиц. Найти это число.

2. Из пункта А в пункт Б с важным государственным поручением отправился Маленький Мук. Одновременно из пункта С, расположенного строго по середине между А и Б, в том же направлении, на Сивке-Бурке, с 15 мешками моркови, выехал Маяковский. Через 4 часа Маленький Мук догнал Маяковского, а еще через 2 часа он встретил Маяковского на своем обратном пути из Б в А (в пункте Б он не задерживался). Во сколько раз медленней, чем Маленький Мук перемещается Сивка-Бурка?

3. В один из выходных проходило три важных мероприятия для учеников 10 «Б» класса: окружная олимпиада по математике, окружная олимпиада по истории и день рождения Пети Иванова. В классе 25 человек, и каждый из них посетил только одно из перечисленных мероприятий. Известно, что:
   - 13 человек прошли в окружной тур олимпиады по математике, из которых четверо были приглашены на день рождения к Пете.
   - 11 человек прошли в окружной тур олимпиады по истории, и из них также четверо были приглашены на день рождения к Пете.
   - Петя пригласил 10 человек, при этом сам он присутствовал на своем дне рождения.
   - Один человек прошел в оба окружных тура олимпиад, и был приглашен на день рождения Пети.

   Сколько школьников, не приглашенных на день рождения Пети, должны были выбирать между участием в олимпиаде по математике и олимпиаде по истории?

4. Дана четырехугольная призма $ABCDA_1\ B_1C_1\ D_1$, в основании которой лежит параллелограмм. Точка М – середина стороны АВ, точка К – середина стороны ВС.Отрезки АК и СМ пересекаются в точке Е. Найти отношение объемов пирамид A_1MBKE и B_1AECD ?

5. По плоскому полю протекает река шириной 1 км. Ее берега представляют собой две параллельные прямые. По разные стороны находятся два города, которые надо соединить дорогой и мостом. Мост должен быть перпендикулярен берегам реки и построен в таком месте, чтобы дорога имела нименьшую длину. Какова будет длина меньшей из двух частей дороги, соединяющей города с мостом, если расстояния от городов до берегов составляет 6 км и 9 км, а расстояние между городами вдоль реки равно 20 км?

6. Решить уравнение:
$$\left|sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\right| = \left|x-\frac{3}{4}\right| + \left|x-\frac{5}{4}\right|.$$
   В случае нескольких решений, в ответе указать наибольший корень уравнения.

7. На числовой прямой цифрами 0 и 1 отмечают точки, соответствующие целым числам следующим образом:
   - Точки, разность которых равна 8, отмечены одинаково
   - Точки, соответствующие четным числам, отмечены одинаково
   - Точки 157 и 15 отмечены 1.

   Сколько способов отметить все целые числа таким образом?

8. Положительная функция $f(x)$ определена на всей числовой оси и удовлетворяет следующим условиям:
   - $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$;
   - $f(a) + f\left({}^{1}/_{a}\right) \leq 2$.

   Найти значение выражения $f(2013)^{f(2014)}$.

9. Есть две корзины – маленькая и большая. В маленькой находится три шара – два черных и один белый, в большой корзине находится пять шаров – четыре черных и один белый. Проводится следующий эксперимент:

   (1) Из каждой корзины вытаскивается по одному шару, записывают цвет каждого шара и эти шары возвращаются обратно (каждый в ту корзину, из которой был вытащен).
   (2) После этого в каждую корзину добавляют еще по два черных шара.
   (3) Шаги (1) и (2) повторяют бесконечное число раз.

   Какова вероятность того, что каждый раз после извлечения шаров будут записаны цвета «белый и белый»? Ответ округлить до сотых.

10. С ьника ABC равны соответственно 4, 5, 7. На каждой стороне треугольника построен квадрат. Шесть вершин этих трех квадратов, не совпадающих с вершинами треугольника, образуют шестиугольник, три стороны которого равны сторонам исходного треугольника. Найти квадрат длины большей из оставшихся трех сторон шестиугольника.