

ПЛЕХАНОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2014-2015

Заочный тур

10 класс

1. Фирма "Такер, Питерс и Сатана", обладающая неограниченными запасами зелья для наведения порчи (60% болотной гнили, 40% зеленой тины), элексира вечной молодости (40% гнили и 10% тины, остальное вода) и средства от прыщей (90% тины и 10% гнили) провела маркетинговые исследования в "городе невест" Иваново. В результате выяснилось, что фирма может продать 10 литров приворотного зелья (42% гнили и 38% тины, остальное вода). Сколько литров элексира, зелья для наведения порчи и средства от прыщей для этого понадобится? Ответ записать через запятую в таком же порядке, который сформулирован в вопросе.

2. Найти остаток от деления многочлена $x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$ на многочлен $x^3 - x$. В ответе указать сумму коэффициентов полученного многочлена.

3. Сколько целочисленных решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1 \end{cases}$$

4. На доске записаны числа 1, 2, 3, ..., 2014. Какое наименьшее неотрицательное число можно получить, если между ними расставить знаки «+» или «-» в произвольном порядке?

5. Каждую грань куба разбили на четыре одинаковых квадрата и раскрасили эти квадраты так, что квадраты, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество цветов понадобится для такой окраски куба?

6. При каких значениях a уравнение $x^4 - (3a + 2)x^2 + a^2 = 0$ имеет 4 действительных корня, являющихся членами арифметической прогрессии? В ответе записать наибольшее значение a .

7. На плоскости расположены пять точек A, B, C, D, E так, что:

$$AB \parallel CD; BD \parallel AE; AD \parallel EC; AD:EC = 5.$$

Найти всевозможные значения отношения площади треугольника ABC к площади треугольника ADE. В ответе записать наибольшее значение.

8. Капитан Морган решил спрятать свои сокровища на дне моря. Для этого он обмазал драгоценности пушечной смазкой и набил ими полностью герметичный ящик из красного дерева в форме прямоугольного параллелепипеда. Он потратил:

- 16 эльдорадских тугриков на 1 кубический метр драгоценностей на смазку;
- 8 эльдорадских тугриков на каждый квадратный метр красного дерева;

- 4 эльдорадских тугрика на метр на укрепление каждого ребра параллелепипеда.

Известно, что длины ребер параллелепипеда целые числа, а всего он потратил 240 эльдорадских тугриков. Каков объем сокровища, спрятанного капитаном?

Ответ дать в кубических метрах

9. Есть две корзины – маленькая и большая. В маленькой находится три шара – два черных и один белый, в большой корзине находится пять шаров – четыре черных и один белый. Проводится следующий эксперимент:

- (1) Из каждой корзины вытаскивается по одному шару, записывают цвет каждого шара и эти шары возвращаются обратно (каждый в ту корзину, из которой был вытасчен).
- (2) После этого в каждую корзину добавляют еще по два черных шара.
- (3) Шаги (1) и (2) повторяют бесконечное число раз.

Какова вероятность того, что каждый раз после извлечения шаров будут записаны цвета «белый и белый»? Ответ округлить до сотых.

10. Пусть А – точка на параболе $y = x^2 + 5x + 1$, В – точка на прямой $y = 3x - 2$. Найти квадрат минимальной длины отрезка АВ.