ПЛЕХАНОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

очный тур 11 класс

1. **Пятьдесят абитуриентов писали тесты по математике, английскому языку и русскому языку. Два человека не сдали все три теста, пять человек не сдали тест по английскому и русскому, семь человек – по математике и русскому, девять человек – по математике и английскому. Математику не сдали 17 человек, английский язык не сдали – 14 человек, русский язык не сдали – 10 человек. Сколько абитуриентов сдали все тесты?**

   Ответ: 28

2. **Василиса Премудрая продавала яблоки на рынке. Первому покупателю она продала половину всех имеющихся яблок плюс пол яблока. Второму - половину оставшихся яблок плюс пол яблока. И т.д. Последнему покупателю она также продала половину оставшихся яблок плюс пол яблока, и на этом ее яблоки закончились. Всего у нее было 20 покупателей. Сколько яблок было у Василисы Премудрой с самого начала, если известно, что каждый покупатель получил целое количество яблок?**

   Ответ: 1048575

3. **Города А и В находятся на двух разных перпендикулярных дорогах. Известно, что расстояние от города А до пересечения дорог составляет *a* км, от города В – соответственно *b* км. Из А и В одновременно выезжают в сторону пересечения два автомобиля со скоростями v_1 и v_2 соответственно. Через какое время расстояние между автомобилями будет минимальным?**

   Ответ: $t = \frac{av_1+bv_2}{{v_1}^2+{v_2}^2}$

4. **В квадрат со стороной *a* вписан правильный треугольник наибольшей площади, в этот треугольник вписан квадрат, затем в квадрат снова вписан правильный треугольник наибольшей площади, и т.д. Найти отношение суммы периметров всех квадратов к сумме периметров всех треугольников.**

   Ответ: $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{3}$

5. **В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны *b*, а основание равно *a*. Угол при вершине равен $20°$. Доказать, что $a^3 + b^3 = 3ab^2$.**

   Доказательство: Проведём медиану к основанию равнобедренного треугольника, она же является высотой и биссектрисой.

   Тогда: $sin10° = \frac{a/2}{b} \Longrightarrow a = 2bsin10°$

   Требуется доказать: $(2bsin10°)^3 + b^3 = 3(2bsin10°)b^3 \Leftrightarrow 8sin^3 10° + 1 = 6sin10°$

   Воспользуемся формулой тройного угла: $sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$

   При $\alpha = 10°$: $\frac{1}{2} = 3sin10° - 4sin^3 10° \Longrightarrow 8sin^3 10° + 1 = 6sin10°$
   Что и требовалось доказать.

6. **В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = AC = 1, AA_1 = 2$, грань ABA_1B_1 перпендикулярна основанию, грань ADA_1D_1 составляет с основанием угол $60°$. Найти отношение длины AC_1 к длине ее части, содержащейся в тетраэдре BDA_1C_1.**

   Ответ: 1,5

7. **Функция *f(x)* обладает следующим свойством:**

$$f(x+r) = \frac{f(x)}{2015f(x)-1}, \text{для некоторого числа } r.$$

   а) Доказать, что *f(x)* – периодична.
   б) Найти все возможные значения, которые могут принимать такие функции, предполагая, что r – любое действительное число, отличное от нуля.

   Ответ: A=0, $A = \frac{2}{2015}$

   Доказательство: а) Докажем, что 2r является периодом этой функции:

$$f(x+2r) = \frac{f(x+r)}{2015f(x+r)-1} = \frac{\frac{f(x)}{2015f(x)-1}}{\frac{2015f(x)}{2015f(x)-1}-1} = f(x)$$

   Значит: $f(x+2r) = f(x)$.

   б) Пусть $f(x) = A$. Тогда: $f(x+r) = \frac{A}{2015A-1}$

   Т.к. функция периодична с периодом 2r, где r – любое действительное число, то $f(x) = const$.

   Следовательно: $A = \frac{A}{2015-1}$

   Тогда либо A=0, либо $A = \frac{2}{2015}$

8. **Благотворительная организация «Пятьдесят пять добрых дел» хочет собрать деньги для помощи бездомным. Они решают провести игру со следующими правилами:**
   - **Имеется в наличии шесть карточек с цифрами от 1 до 6. Их тщательно перемешивают и выкладывают перед участником «рубашкой» вверх.**
   - **Участником становится человек, сделавший взнос в 1 денежную единицу.**
   - **После этого участник выбирает две карточки и выкладывает их слева направо в порядке появления.**
   - **Если получившееся число больше 55, участник получает выигрыш – 5 денежных единиц. Если получившееся число меньше 55, то участник ничего не получает.**

   Соберут ли организаторы игры значительную сумму для помощи бездомным? Ответ обосновать

   Ответ: Нет.

9. **Числовая последовательность задана рекуррентным соотношением**

$$a_{n+2} = 7 \cdot a_{n+1} - 10 \cdot a_n, \text{ при } n \geq 1.$$

   Найти формулу общего члена последовательности, если $a_1 = 1$; $a_2 = 17$.

   Ответ: $a_n = 5^n - 2^{n+1}$

10. Великий Гудвин решил отмыть главную площадь Изумрудного Города. Площадь разбита на квадраты, лишь конечное число из которых являются грязными. Саму площадь можно считать неограниченной во все стороны. Гудвин отмывает клетку в одной из трехклеточных фигур вида:

При этом Гудвин пачкает две оставшиеся клетки фигуры. Гудвин хочет оставить только две каких-нибудь соседних клетки. На эти клетки он планирует поставить памятник себе самому, и никто не увидит, что они грязные. Всегда ли удастся ему это сделать? (Ответ обосновать).

Ответ: Гудвин всегда сможет так сделать.