

ПЛЕХАНОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

очный тур 10 класс

1. Собрал большой урожай репы, дед несколько мешков излишка на своих жигулях отвез на рынок. По заявленной им цене, 12 рублей за килограмм, репу брали неохотно. Снизив цену, дед быстро продал всю оставшуюся репу за 2015 рублей. Насколько была снижена цена, если учесть, что мелочь (т.е. монеты меньше рубля) в расчетах дед не использовал?

Ответ: на 7 рублей.

2. Иван, Петр и Юрий отправились в поход. Иван и Петр проходят 6 км за 1 час. У Юрия большие ноги и он едет на двухместной машине со скоростью 30 км/ч. Ребята приняли следующую стратегию: они стартуют вместе, Иван едет с Юрием, а Петр идет пешком. После некоторого промежутка времени t Юрий высаживает Ивана, который идет дальше пешком, а Юрий поворачивает назад, забирает Петра, и они едут пока не догонят Ивана. В этом месте Иван и Петр меняются местами: Иван опять едет с Юрием, а Петр идет пешком. Описанная процедура повторяется столько, сколько необходимо. На какое расстояние они продвинулись за 2 часа?

Ответ: 30 км

3. Решить уравнение (ответ обосновать):

$$(n + 2)! - (n + 1)! - n! = n^2 + n^4,$$

где $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m$.

Ответ: $n=3, n=0$.

4. Вычислить

$$\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{3}{5} \right) \right).$$

Ответ: 2

5. Числа a, b и c принадлежат интервалу $(0; 1)$. Доказать, что хотя бы одно из произведений $4a(1 - b); 4b(1 - c); 4c(1 - a)$ не превышает 1.

Доказательство: Предположим противное: пусть все эти произведения больше 1. Тогда и их произведение больше 1. Рассмотрим число $4a \cdot (1 - a)$. Оно больше 0, так как a принадлежит интервалу $(0; 1)$. Покажем, что $4a \cdot (1 - a) \leq 1$: $4a - 4a^2 \leq 1 \Leftrightarrow (2a - 1)^2 \geq 0$.

Аналогично для $4b \cdot (1 - b); 4c \cdot (1 - c)$.

Следовательно, $4a \cdot (1 - b) \cdot 4b \cdot (1 - c) \cdot 4c \cdot (1 - a) \leq 1$.

Противоречие. Значит, хотя бы одно из чисел не превосходит 1.

6. Дан прямоугольный треугольник со сторонами 20, 21, 29. Найти стороны прямоугольного треугольника, выраженные целыми числами, периметр которого больше периметра данного треугольника на возможно меньшее целое число.

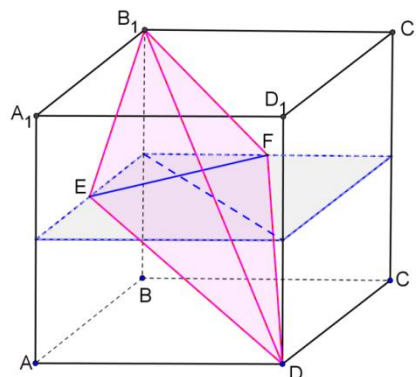
Ответ: (18, 24, 30)

7. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, длина ребра куба равна 1. Какой максимальный объем может иметь тетраэдр $EF GH$, если E, F – центры соседних граней, а точки G и H принадлежат кубу?

Ответ: $\frac{1}{4}$

8. Найти максимальное значение функции $z = y - 2x$,
 $36x^2 + 16y^2 =$

Ответ: $\frac{5}{4}$



9. Благотворительная организация «Пятьдесят пять добрых дел» хочет собрать деньги для помощи бездомным. Они решают провести игру со следующими правилами:
- Имеется в наличии шесть карточек с цифрами от 1 до 6. Их тщательно перемешивают и выкладывают перед участником «рубашкой» вверх.
 - Участником становится человек, сделавший взнос в 1 денежную единицу.
 - После этого участник выбирает две карточки и выкладывает их слева направо в порядке появления.
 - Если получившееся число больше 55, участник получает выигрыш – 5 денежных единиц. Если получившееся число меньше 55, то участник ничего не получает.

Соберут ли организаторы игры значительную сумму для помощи бездомным? Ответ обосновать.

Ответ: Нет.

10. Крокодил Гена и Чебурашка играют на белой доске 5 клеток на 5 клеток в следующую игру: Гена закрашивает черным произвольные клетки доски. Чебурашка может менять цвет всех трех клеток в фигурах вида



Поворачивать фигуры нельзя. Чебурашка выиграет, если после нескольких перекрашиваний доска снова станет белой.

- а) Может ли Крокодил Гена так закрасить три клетки, чтобы гарантированно победить?
 б) Может ли выиграть Чебурашка, если Гена закрасил левую верхнюю, левую нижнюю и правую нижнюю клетки?

Ответ: а) да б) да