

Олимпиада школьников РАНХиГС 2014-2015

Математика 8 – 9 класс

Очный этап

1 вариант

1. Решить неравенство (максимум 10 баллов)

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) < 3$$

2. Найти остаток от деления многочлена (максимум 10 баллов)

$$x^{24} - 8x^{15} + 1 \text{ на } x^2 - 1$$

3. Найти действительные числа  $m$  и  $n$  так, чтобы функция  $f(x)$  была бы четной (максимум 15 баллов)

$$f(x) = (mx^2 - 2x + 3)(x^2 + nx - 2)$$

5. Решить задачу (максимум 15 баллов)

В треугольнике  $ABC$  угол при вершине  $B$  в два раза больше угла при вершине  $A$ . Биссектриса угла при вершине  $A$  и биссектриса внешнего угла при вершине  $C$  пересекаются в точке  $K$ . Найдите углы треугольника (в градусах).

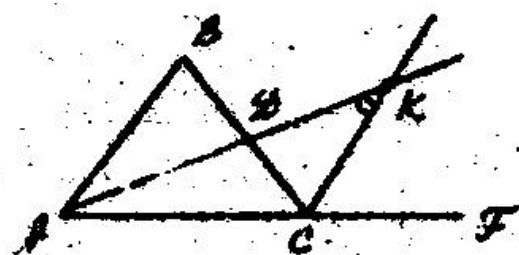


Рис. 1.

6. Вычислить (максимум 10 баллов)

Сумма первых шести членов арифметической прогрессии равна 75, сумма последних шести её членов равна 417, а сумма всех членов прогрессии равна 1025. Найти число членов прогрессии.

4. Найти все значения параметра  $a$ , при которых система неравенств не имеет решений. (максимум 10 баллов)

$$\begin{cases} a^2 - x^2 > 0 \\ x^2 - 6|x| + 8 \leq 0 \end{cases}$$

7. Сколько разных бус можно сделать из 1 белой, 3 красных и 2 синих бусин? Все бусы одного размера. (максимум 10 баллов)

8. Решить задачу (максимум 10 баллов)

Ромб задан вершинами  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(2, 0)$  и  $(-2, 0)$ . Но оси координат  $Ox$  и  $Oy$  повернули относительно начала координат так, что угол между ними стал равен  $30^\circ$  (смежный угол равен  $150^\circ$  соответственно). Найдите площадь полученной фигуры.

9. Вычислить (максимум 10 баллов)

Большой Декарт.

Большой Декарт умеет перемещаться только в 4-х направлениях: шаг вверх, шаг вниз, шаг влево и шаг вправо (рис. 1). В итоге, множество всех возможных точек, в которые может перейти Декарт, образуют бесконечную сетку. Докажите, что для того, чтобы попасть в любую точку данной сетки, достаточно перемещаться только по 3-м направлениям (так, как это изображено на рис. 2). Шагать можно только по направлению, указанному стрелками.

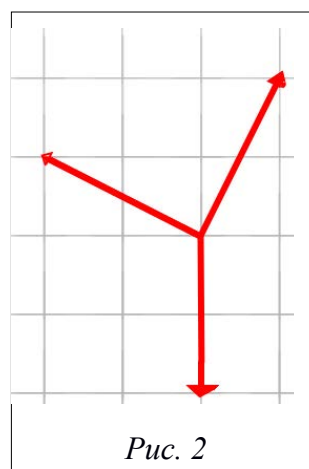
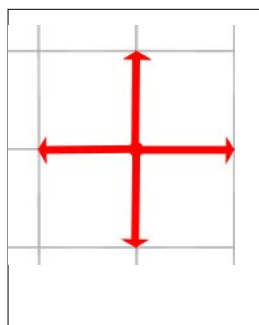


Рис. 2

Олимпиада школьников РАНХиГС 2014-2015

Математика 8 – 9 класс

Очный этап

2 вариант

2. Найти остаток от деления многочлена (максимум 10 баллов)

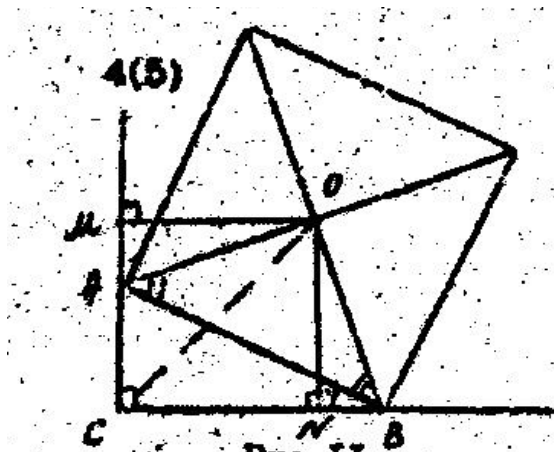
$$x^{36} - 2x^{25} + 1 \text{ на } x^2 - 1$$

3. Найти действительные числа  $m$  и  $n$  так, чтобы функция  $f(x)$  была бы четной (максимум 10 баллов)

$$f(x) = (x^2 - 3mx + 4)(nx^3 - x^2 + x)$$

Решить задачу (максимум 15 баллов)

5. На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  построен квадрат. Точка пересечения диагоналей квадрата  $O$ . Докажите, что прямая  $OC$  является биссектрисой прямого угла  $ACB$ .



4. Найти все значения параметра  $a$ , при которых система неравенств

$$\begin{cases} (x - a)^2 - 49 \leq 0 \\ |11 - x| \leq a. \end{cases}$$

имеет единственное решение. В ответе указать сумму целых значений параметра  $a$  или само значение параметра  $a$ , если оно единственное.

Вычислить (**максимум 10 баллов**)

6. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна **35**, сумма последних пяти её членов равна **100**, а сумма всех членов прогрессии равна **202,5**. Найти число членов прогрессии.

7. Вычислить (**максимум 10 баллов**)

Кай собирает из льдинок слово «вечность». Так уж получилось, что у него есть только: 3 буквы «О» разного цвета; по одной букве «Е», «Ч» и «Н»; 2 буквы «С» и 4 палочки «I» тоже разных цветов. Но Кай знает, что из двух букв «О» и одной палочки «I» можно собрать букву «В», из палочки «I» и буквы «С» можно собрать букву «Ь», а из двух палочек «I» можно собрать букву «Т». Сколько разных слов «вечность» можно собрать из этого набора?

8. Вычислить (**максимум 10 баллов**)

Вершины квадрата находятся в точках  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  и  $(-1, -1)$ . Но оси координат  $Ox$  и  $Oy$  повернули относительно начала координат так, что угол между ними стал равен  $30^\circ$  (смежный угол равен  $150^\circ$  соответственно). Найдите площадь полученной фигуры.

№9. Франкенштейн (**максимум 10 баллов**)

Доктор Франкенштейн собирает человекоподобного робота. На рисунке изображены детали: ноги, руки, тело и голова. Придумайте такое отображение:

$$(x, y) \rightarrow (f(x), f(y))$$

чтобы совместить отдельные детали робота между собой и собрать его.

(Подсказка: здесь отображением  $(x, y) \rightarrow (f(x), f(y))$  называется такая функция  $f$ , которая переводит любую точку  $x$  в точку  $f(x)$ , и любую точку  $y$  в точку  $f(y)$ . К примеру, если  $f(x) = x + 2$  и  $f(y) = y + 2$ , то тогда точка  $(2, 3)$  отображается в точку  $(2+2, 3+2)$  т.е.  $(2, 3) \rightarrow (4, 5)$ )