

Олимпиада школьников РАНХиГС 2014-2015

Математика 10 – 11 класс

Очный этап

1 вариант

1. Вычислить (максимум 10 баллов):

$$\sin^8\left(\frac{\pi}{16}\right) + \cos^8\left(\frac{\pi}{16}\right)$$

Решение:

$$\begin{aligned} \sin^8\left(\frac{\pi}{16}\right) + \cos^8\left(\frac{\pi}{16}\right) &= (\sin^2\left(\frac{\pi}{16}\right))^4 + (\cos^2\left(\frac{\pi}{16}\right))^4 = \left(\frac{1 - \cos\frac{\pi}{8}}{2}\right)^4 + \left(\frac{1 + \cos\frac{\pi}{8}}{2}\right)^4 = \\ &= \frac{1}{16} [1 - 4\cos\frac{\pi}{8} + 6\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 4\cos^3\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + 1 + 4\cos\frac{\pi}{8} + 6\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \\ &+ 4\cos^3\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)] = \frac{1}{8} (1 + 6\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)) = \frac{1}{8} (1 + 3(1 + \cos\frac{\pi}{4}) + \\ &+ \left(\frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2) = \frac{1}{8} (1 + 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}(1 + 2\cos\frac{\pi}{4} + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right))) = \frac{1}{8} (4 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \\ &+ \frac{1}{4} * \frac{1}{2}) = \frac{1}{8} (4 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{8}) = \frac{1}{64} (32 + 12\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 1) = \frac{1}{64} (35 + \\ &+ 14\sqrt{2}) = \frac{35}{64} + \frac{7\sqrt{2}}{32} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{35}{64} + \frac{7\sqrt{2}}{32}$

2. Вычислить (максимум 5 баллов)

Найти функцию $g(x)$, если для любого действительного числа x

$$\begin{cases} f(x) = 3x + 4 \\ f(1 - 2g(x)) = 25 - 12x \end{cases}$$

Решение:

$$f(1 - 2g(x)) = 3(1 - 2g(x)) + 4 \quad \Rightarrow$$

$$3(1 - 2g(x)) + 4 = 25 - 12x$$

$$3 - 6g(x) + 4 = 25 - 12x$$

$$6g(x) = 7 - 25 + 12x$$

$$6g(x) = 12x - 18$$

$$g(x) = 2x - 3$$

Ответ: $g(x) = 2x - 3$

3. Решить неравенство (максимум 10 баллов)

$$\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}} + \sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}} \leq 1$$

Решение:

$$\sqrt{(x+2)-4\sqrt{x+2}+4} + \sqrt{(x+2)-6\sqrt{x+2}+9} \leq 1$$

$$\sqrt{(\sqrt{x+2}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+2}-3)^2} \leq 1$$

$$|\sqrt{x+2}-2| + |\sqrt{x+2}-3| \leq 1$$

$$\text{ОДЗ: } x+2 \geq 0$$

$$x \geq -2$$

$$t = \sqrt{x+2}; t \geq 0$$

$$|t-2| + |t-3| \leq 1$$

I. $t < 2$

$$2-t+3-t \leq 1$$

$$2t \geq 4$$

$$t \geq 2$$

\emptyset пустое множество

II. $2 \leq t < 3$

$$t-2+3-t \leq 1$$

$$1 \leq 1$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$2 \leq t < 3$ – решение данного пункта

III. $t \geq 3$

$$t-2+t-3 \leq 1$$

$$2t \leq 6$$

$$t \leq 3$$

$t = 3$ – решение данного пункта

Объединяя решения пунктов, получаем

$$2 \leq t \leq 3$$

$$2 \leq \sqrt{x+2} \leq 3$$

$$4 \leq x+2 \leq 9$$

$2 \leq x \leq 7$ – решение неравенства

Ответ: $[2; 7]$

4. Решить задачу (**максимум 15 баллов**)

Курс рубля по отношению к доллару (количество долларов за один рубль) падает на **9,7%** в год. У клиента банка есть два варианта помещения денег. По первому варианту он может положить деньги на рублёвый счёт с начислением **14%** в конце года. По второму варианту он может обменять рубли на доллары и положить деньги на валютный счёт с начислением **5%** в конце года. На сколько процентов больше или меньше окажется рублёвый счёт по отношению к валютному через год? Результат округлить до целых процентов.

(Считать одинаковым единовременный курс покупки и продажи доллара).

$$\frac{1,14 \cdot 0,903}{1,05} = 0,9804 \approx 0,98$$

Ответ: меньше на **2%**.

5. Решить (максимум 15 баллов)

На отрезке AC выбрана произвольно точка B и на отрезках AB , BC и AC как на диаметрах построены окружности O_1 , O_2 и O . Через точку B проведена произвольная прямая, пересекающая окружность O в точках P и Q , а окружности O_1 и O_2 – в точках R и S , соответственно. Докажите, что $PR = QS$.

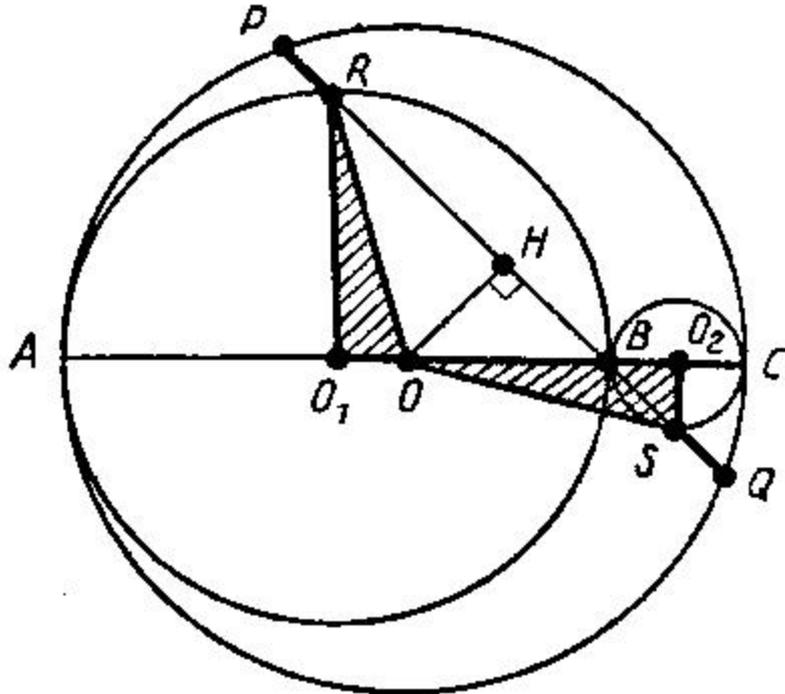


Рис. 1.

Решение: Обозначим радиусы проведённых окружностей через r_1 , r_2 , r . Рассмотрим треугольники O_1RO и O_2SO (см. рис.). У них $O_1R = OO_2 = r_1$, $O_1O = O_2S = r_2$ и $\angle OO_1R = \angle OO_2S$ (поскольку O_1R параллельно O_2S). Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $OR = OS$. Опустив перпендикуляр OH на хорду PQ , получаем $RH = SH$ и $PH = QH$; значит, $PR = PH - RH = QH - SH = QS$.

6. Вычислить (максимум 15 баллов)

Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{x - |x|}{x} \\ (x + 2)^2 + y = a \end{cases}$$

имеет два различных решения.

$$a \in (2; 4] \cup [6; +\infty)$$

1) $a \in (2; 4]$, $y_{1,2} = 2$, $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{a-2}$

2) $a \in [6; +\infty)$, $y_3 = 2$, $x_3 = -2 - \sqrt{a-2}$;
 $y_4 = 0$, $x_4 = -2 + \sqrt{a}$.

7. Найдите решение уравнения: (максимум 5 баллов)

$$(a + 36)^7 = 194754273881$$

где a — простое число. Ответ нужно обосновать.

Решение: По количеству цифр в числе легко проверить, что $k^7 = (a + 36)^7 < 100^7$, а значит $k < 100$. Проверив на периодичность степень чисел от 1 до 9, можно заметить, что последние цифры полученных чисел чередуются. И только 1 дает в 7 степени последнюю цифру 1. А значит вторая цифра числа k это 1. Далее, т. к. a – простое число и вторая цифра числа $k-36$ это 5, то не трудно догадаться, что $a = 5$ (потому что нет других простых чисел с последней цифрой равной «5» кроме 5). Проверить себя можно разделив начальное число на $36+5 = 41$.

Ответ: 5

8. Решить задачу (максимум 20 баллов)

В сферу радиуса R вписана правильная треугольная призма, в которой перпендикуляр, опущенный из вершины одного основания на сторону другого основания, на 25% больше высоты призмы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение призмы плоскостью, проходящей через диагональ боковой грани?

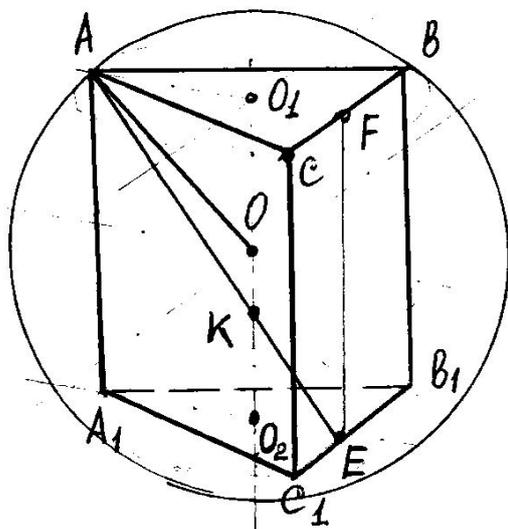


Рис. 1.

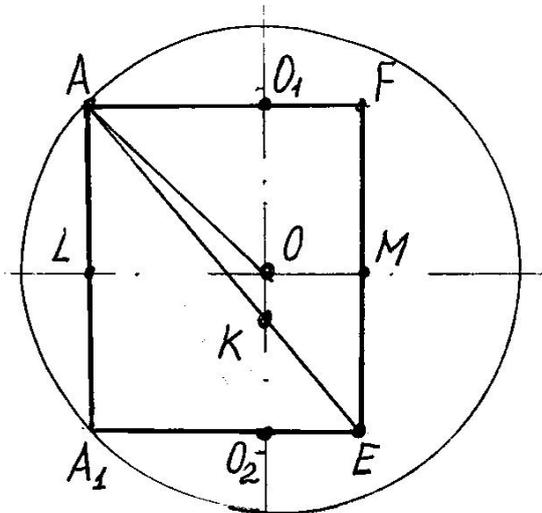


Рис. 2.

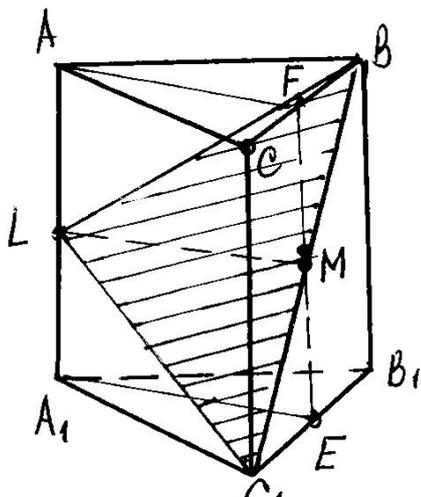


Рис. 3.

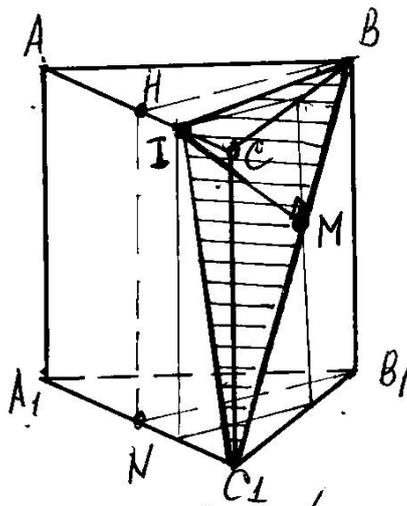


Рис. 4.

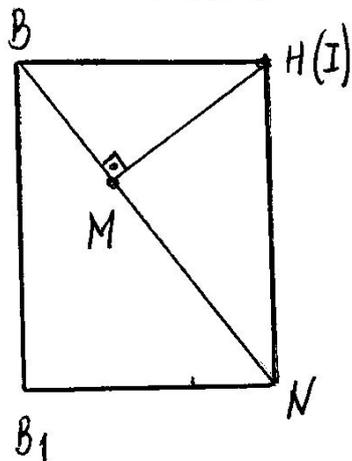


Рис. 5

Дано: $AE = 1,25 \cdot AA_1$, $AO = R$.

Решение: $AA_1^2 = AE^2 - A_1E^2$

$$A_1E^2 = (1,25)^2 AA_1^2 - AA_1^2 = (1,25^2 - 1) \cdot AA_1^2 \Rightarrow A_1E = \frac{3}{4} AA_1$$

$$A_1O_2 = \frac{2}{3} A_1E = \frac{1}{2} AA_1$$

$$\left(\frac{AA_1}{2}\right)^2 + (A_1O_2)^2 = AO^2 \Rightarrow \frac{AA_1^2}{4} + \frac{AA_1^2}{4} = R^2 \Rightarrow AA_1 = \sqrt{2}R$$

$$A_1E = \frac{3}{4} AA_1 = \frac{3}{2\sqrt{2}} R, \quad A_1C_1 = A_1B_1 = B_1C_1 = \frac{A_1E}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} R$$

$LM = A_1E$ – наименьшая высота сечения BLC .

$$S_{\Delta BLC_1} = \frac{1}{2} C_1B \cdot LM = \frac{1}{2} \sqrt{A_1C_1^2 + AA_1^2} \cdot LM = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2} R^2 + 2R^2} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} R = \frac{3\sqrt{7}}{8} R^2$$

Эта площадь больше площади половины боковой грани:

$$S_{\Delta BCC_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} R \cdot \sqrt{2}R = \frac{\sqrt{3}}{2} R^2$$

Найдём кратчайшее расстояние между диагональю BC_1 и ребром AC (см. рис. 4).

$$B_1N = A_1E = \frac{3}{2\sqrt{2}} R \Rightarrow BN = \sqrt{B_1N^2 + AA_1^2} = \sqrt{\frac{9}{8} R^2 + 2R^2} = \frac{5}{2\sqrt{2}} R$$

$$HM = AA_1 \cdot \frac{B_1N}{BN} = \sqrt{2}R \cdot \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}} R}{\frac{5}{2\sqrt{2}} R} = \frac{3\sqrt{2}}{5} R$$

$$S_{\Delta BC_1H} = \frac{1}{2} C_1B \cdot HM = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} R \cdot \frac{3\sqrt{2}}{5} R = \frac{3\sqrt{7}}{10} R^2 < \frac{\sqrt{3}}{2} R^2$$

Ответ: Наименьшая площадь сечения призмы – $S_{\Delta BC_1H} = \frac{3\sqrt{7}}{10} R^2$

9. Решить задачу (максимум 5 баллов)

В прямоугольнике ABCD дана вершина A (5; 2); уравнение стороны $2x-y+6=0$ и диагонали $x+3y=11$. Написать уравнение второй диагонали.

Решение:

Т.к. координаты точки A не удовлетворяют уравнению $2x-y+6=0$, то дано уравнение стороны BC или CD. Пусть это уравнение BC.

Итак, BC: $2x-y+6=0 \Rightarrow y = 2x + 6 \Rightarrow k_{BC} = 2$ (угловой коэффициент).

$AD \parallel BC \Rightarrow k_{AD} = k_{BC} = 2$ (условие параллельности прямых).

Найдем уравнение AD: $y = 2x + b$; подставляя сюда координаты точки A, получим: $2 = 10 + b \Rightarrow b = -8$.

Итак, AD: $y = 2x + 8$.

Данная диагональ $x + 3y = 11$ проходит через т.А (5;2), т.к. $5 + 3 \cdot 2 = 11$. Следовательно, это уравнение диагонали AC.

Найдем координаты точки C как пересечение стороны BC и диагонали AC:

$$C: \begin{cases} 2x - y + 6 = 0 \\ x + 3y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 6 \\ x + 3(2x + 6) = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 6x + 18 = 11 \\ y = 2x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Итак, C (-1; 4)

$AB \perp BC \Rightarrow k_{AB} \cdot k_{BC} = -1$ (условие перпендикулярности прямых).

Отсюда $k_{AB} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{2}$.

Найдем уравнение AB: $y = -\frac{1}{2}x + b$;

подставляя сюда координаты точки A, получим $2 = -\frac{1}{2} \cdot 5 + b \Rightarrow b = \frac{9}{2}$.

Итак, AB: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

Теперь найдем координаты точки B как пересечение сторон AB и BC:

$$B: \begin{cases} 2x - y + 6 = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 6 \\ 2x + 6 = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 12 = -x + 9 \\ y = 2x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{24}{5} \end{cases}$$

Итак, B $(-\frac{3}{5}; \frac{24}{5})$.

Найдем уравнение стороны CD. Т.к. $CD \parallel AB$, то $k_{CD} = k_{AB} = -\frac{1}{2}$.

CD: $y = -\frac{1}{2}x + b$; подставляя сюда координаты точки C,

получим: $4 = -\frac{1}{2} \cdot (-1) + b \Rightarrow b = \frac{7}{2}$.

Итак, CD: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Найдем координаты точки D как пересечение сторон AD и CD:

$$D: \begin{cases} y = 2x - 8 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 8 \\ 2x - 8 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 16 = -x + 7 \\ y = 2x - 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Итак, D $(\frac{23}{5}; \frac{6}{5})$.

Наконец, найдем уравнение второй диагонали BD: $y = kx + b$. Подставляя координаты точек B $(-\frac{3}{5}; \frac{24}{5})$ и D $(\frac{23}{5}; \frac{6}{5})$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{24}{5} = -\frac{3}{5}k + b \\ \frac{6}{5} = \frac{23}{5}k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{24}{5} + \frac{3}{5}k = \frac{6}{5} - \frac{23}{5}k \\ \frac{6}{5} = \frac{23}{5}k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24 + 3k = 6 - 23k \\ \frac{6}{5} = \frac{23}{5}k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -\frac{9}{13} \\ b = \frac{57}{13} \end{cases}$$

Итак, $y = -\frac{9}{13}x + \frac{57}{13}$ - уравнение второй диагонали.

Ответ: $y = -\frac{9}{13}x + \frac{57}{13}$

Олимпиада школьников РАНХиГС 2014-2015

Математика 10 – 11 класс

Очный этап

2 вариант

1. Вычислить (максимум 10 баллов):

$$\sin^8\left(\frac{\pi}{24}\right) + \cos^8\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

Решение:

$$\begin{aligned} \sin^8\left(\frac{\pi}{24}\right) + \cos^8\left(\frac{\pi}{24}\right) &= (\sin^2\left(\frac{\pi}{24}\right))^4 + (\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right))^4 = \left(\frac{1 - \cos\frac{\pi}{12}}{2}\right)^4 + \left(\frac{1 + \cos\frac{\pi}{12}}{2}\right)^4 = \\ &= \frac{1}{16} [1 - 4\cos\frac{\pi}{12} + 6\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 4\cos^3\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{12}\right) + 1 + 4\cos\frac{\pi}{12} + 6\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \\ &+ 4\cos^3\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{12}\right)] = \frac{1}{8} (1 + 6\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{12}\right)) = \frac{1}{8} (1 + 3(1 + \cos\frac{\pi}{6}) + \\ &+ (\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right))^2) = \frac{1}{8} (1 + 3 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + (\frac{1 + \cos\frac{\pi}{6}}{2})^2) = \frac{1}{8} (4 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} (2\cos\frac{\pi}{6} + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right))) = \\ &= \frac{1}{8} (4 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} * \frac{3}{4}) = \frac{1}{8} (4 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{16}) = \frac{1}{8*16} (64 + \\ &+ 24\sqrt{3} + 4 + 4\sqrt{3} + 3) = \frac{1}{8*16} (71 + 28\sqrt{3}) = \frac{71}{8*16} + \frac{28\sqrt{3}}{8*16} = \frac{71}{128} + \frac{7\sqrt{3}}{32}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{71}{128} + \frac{7\sqrt{3}}{32}$

2. Вычислить (максимум 5 баллов)

Найти функцию $g(x)$, если для любого действительного числа x

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 5 \\ f(1 - 3g(x)) = 21 - 6x \end{cases}$$

Решение:

$$f(1 - 3g(x)) = 2(1 - 3g(x)) - 5 \quad \Rightarrow$$

$$2(1 - 3g(x)) - 5 = 21 - 6x$$

$$2 - 6g(x) - 5 = 21 - 6x$$

$$6g(x) = 2 - 5 - 21 + 6x$$

$$6g(x) = 6x - 24$$

$$g(x) = x - 4$$

Ответ: $g(x) = x - 4$

3. Решить неравенство (максимум 10 баллов)

$$\sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}} + \sqrt{6+x-6\sqrt{x-3}} \leq 1$$

Решение:

$$\sqrt{(x-3)-4\sqrt{x-3}+4} + \sqrt{(x-3)-6\sqrt{x-3}+9} \leq 1$$

$$\sqrt{(\sqrt{x-3}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-3}-3)^2} \leq 1$$

$$|\sqrt{x-3}-2| + |\sqrt{x-3}-3| \leq 1$$

$$\text{ОДЗ: } x-3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

$$t = \sqrt{x-3}; t \geq 0$$

$$|t-2| + |t-3| \leq 1$$

I. $t < 2$

$$2-t+3-t \leq 1$$

$$2t \geq 4$$

$$t \geq 2$$

\emptyset пустое множество

II. $2 \leq t < 3$

$$t-2+t-3 \leq 1$$

$$1 \leq 1$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$2 \leq t < 3$ – решение данного пункта

III. $t \geq 3$

$$t-2+t-3 \leq 1$$

$$2t \leq 6$$

$$t \leq 3$$

$t = 3$ – решение данного пункта

Объединяя решения пунктов, получаем

$$2 \leq t \leq 3$$

$$2 \leq \sqrt{x-3} \leq 3$$

$$4 \leq x-3 \leq 9$$

$7 \leq x \leq 12$ – решение неравенства

Ответ: [7; 12]

4. Решить задачу (**максимум 15 баллов**)

Торгово-промышленная биржа уплатила производителю за товар некоторую сумму. Посреднические услуги биржи выразились в увеличении цены товара на определённый процент. После чего, пятая часть товара была отправлена в качестве гуманитарной помощи пострадавшим от землетрясения, остальное поступило на торговое предприятие. Торговая наценка предприятия на **30%** выше, чем наценка биржи. Потребитель заплатил за товар сумму, превышающую на **44%** сумму, полученную производителем. Сколько процентов берёт биржа за свои посреднические услуги?

$$\frac{4}{5} \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{i+30}{100}\right) = 1,44 \Rightarrow i^2 + 230i - 5000 = 0 \Rightarrow i = 20\%$$

5. Решить задачу (максимум 15 баллов)

Две окружности O и O_1 касаются внутренним образом. Третья окружность O_2 касается первых двух и линии их центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности (O_2), если известно, что радиусы окружностей O и O_1 равны 6 и 2, соответственно.

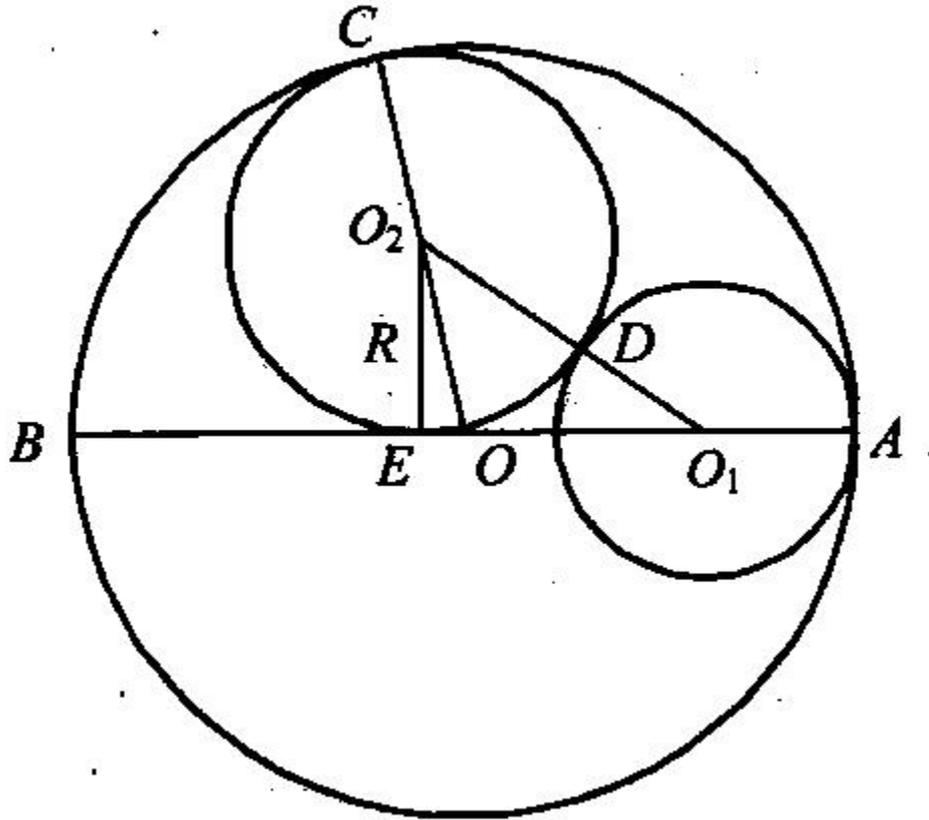


Рис. 1.

Решение:

а) Пусть AB диаметр большей из окружностей, O – её центр, O_1 – центр окружности радиуса r_1 , касающейся окружности с диаметром AB в точке A .

$$O_1A = r_1, O_2C = r_2 \Rightarrow OO_2 = OC - r_2, OO_1 = OA - r_1, O_1O_2 = r_1 + r_2,$$

тогда, периметр треугольника равен:

$$OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = OA - r_1 + OC - r_2 + r_1 + r_2 = 2OA = AB$$

б) $OA = 6, r_1 = 2$

$$O_2E = r_2, O_1O_2 = 2 + r_2, OO_1 = OA - O_1A = 6 - 2 = 4, OO_2 = OC - O_2C = 6 - r_2$$

Из прямоугольных треугольников: O_1O_2E и OO_2E :

$$O_1E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(2 + r_2)^2 - r_2^2} = \sqrt{4 + 4r_2}$$

$$OE = \sqrt{OO_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(6 - r_2)^2 - r_2^2} = \sqrt{36 - 12r_2}, \text{ так как } O_1E = OO_1 + OE$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 + 4r_2} = 6 - 2 + \sqrt{36 - 12r_2} \Rightarrow r_2 = 3, \text{ точка } E \text{ совпадает с } O.$$

6. Вычислить (максимум 15 баллов)

Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{x + |x|}{x} \\ (x - 2)^2 + a = y \end{cases}$$

Имеет единственное решение. Укажите это решение при каждом a .

$$a \in [-4; -2] \cup \{2\}$$

1) $a = 2, x_1 = 2, y_1 = 2$

2) $a \in [-4; -2], y_2 = 2, x_2 = \sqrt{2 - a} + 2$

7. Найдите решение уравнения (максимум 5 баллов):

$$(a + 56)^7 = 3142742836021$$

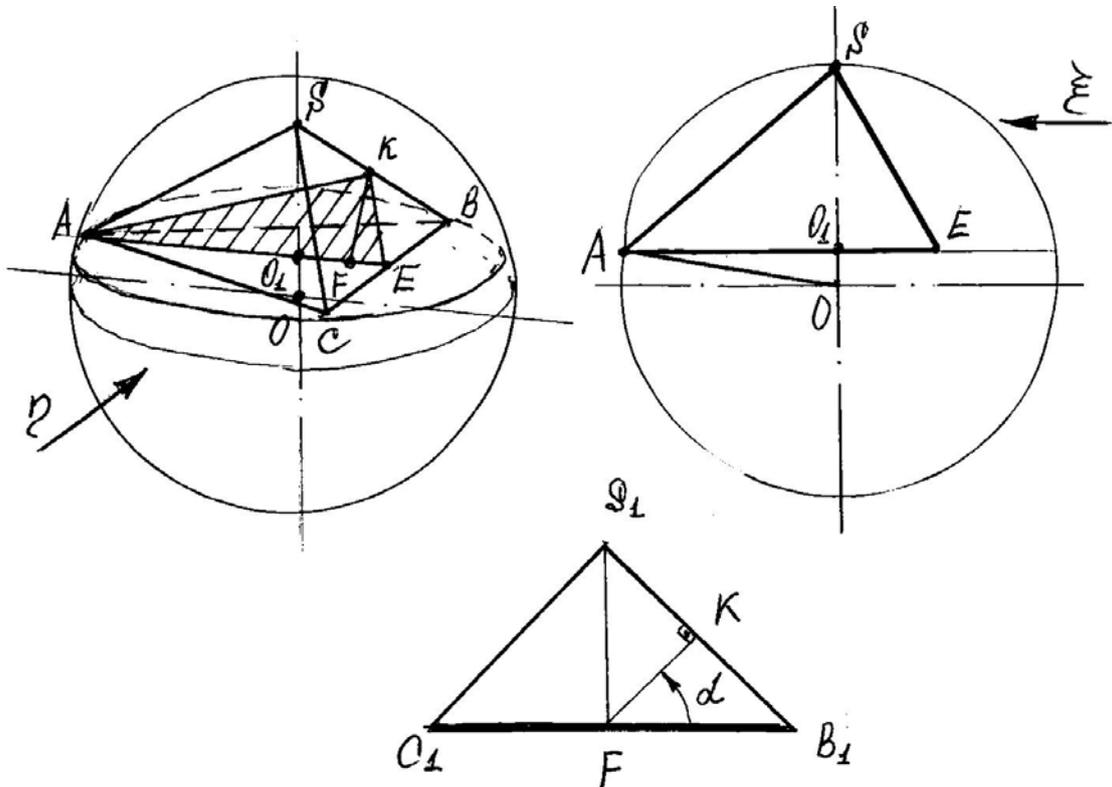
где a — простое число. Ответ нужно обосновать.

Решение: По количеству цифр в числе легко проверить, что $k^7 = (a + 56)^7 < 100^7$, а значит $k < 100$. Проверив на периодичность степень чисел от 1 до 9, можно заметить, что последние цифры полученных чисел чередуются. И только 1 дает в 7 степени последнюю цифру 1. А значит вторая цифра числа k это 1. Далее, т. к. a — простое число и вторая цифра числа $k-56$ это 5, то не трудно догадаться, что $a = 5$ (потому что нет других простых чисел с последней цифрой равной «5» кроме 5). Проверить себя можно разделив заданное число на $56+5 = 61$.

Ответ: 5

8. Решить задачу (максимум 20 баллов)

Какую наименьшую площадь может иметь сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через медиану основания, если высота пирамиды H составляет $\frac{6}{7}$ радиуса описанной сферы? Найдите угол между секущей плоскостью и основанием пирамиды в этом случае.



Дано: $OA = R$, $O_1S = H = \frac{6}{7}R$.

Решение: $R = \frac{7}{6}H$, $OO_1 = \frac{1}{6}H$. $O_1A = \sqrt{R^2 - OO_1^2} = \sqrt{\frac{49}{36}H^2 - \frac{1}{36}H^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}H$

$AE = \frac{3}{2}O_1A = \sqrt{3}H$, $AC = BC = \frac{AE}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2H$

S_1B_1 лежит в плоскости параллельной AE и содержащей SB .

$FK = \frac{\sqrt{2}}{2}H$ (т.к. ΔS_1FB_1 – прямоугольный, равнобедренный).

FK – расстояние (наименьшее) между скрещивающимися прямыми.

$S_{\min} = S_{\Delta AЕК} = \frac{1}{2}AE \cdot FK = \frac{1}{2}\sqrt{3}H \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}H = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}H^2$.

Ответ: Наименьшая площадь сечения пирамиды – $S_{\Delta AЕК} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}H^2$, $\alpha = 45^\circ$.

9. Решить задачу (максимум 5 баллов)

В прямоугольнике ABCD дана вершина A (-1;3); уравнение стороны $x-y=0$ и диагонали $2y - x = 1$. Написать уравнение второй диагонали.

Решение:

Т.к. координаты точки A не удовлетворяют уравнению $x - y = 0$, то дано уравнение стороны BC или CD. Пусть это уравнение BC.

Итак, BC: $x - y = 0 \Rightarrow y = x \Rightarrow k_{BC} = 1$ (угловой коэффициент).

$AD \parallel BC \Rightarrow k_{AD} = k_{BC} = 1$ (условие параллельности прямых).

Найдем уравнение AD: $y = x + b$; подставляя сюда координаты точки A, получим:
 $3 = -1 + b \Rightarrow b = 4$.

Итак, AD: $y = x + 4$.

Данная диагональ $2y - x = 1$ не проходит через т. A (-1;3), т.к. $2*3 - (-1) \neq 1$.

Следовательно, дано уравнение диагонали BD.

Найдем координаты точки D как пересечение стороны AD и диагонали BD:

$$D: \begin{cases} y = x + 4 \\ 2y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ 2(x + 4) - x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 8 - x = 1 \\ y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = -3 \end{cases}$$

Итак, D (-7; -3)

Найдем уравнение стороны CD.

$CD \perp BC \Rightarrow k_{CD} * k_{BC} = -1$ (условие перпендикулярности прямых).

Отсюда $k_{CD} = -\frac{1}{k_{BC}} = -1$.

CD : $y = -x + b$. Подставляя сюда координаты точки D (-7; -3), получим:
 $-3 = 7 + b \Rightarrow b = -10$.

Итак, CD : $y = -x - 10$

Теперь найдем координаты точки C как пересечение сторон CD и BC:

$$C: \begin{cases} y = -x - 10 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x - 10 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -5 \end{cases}$$

Итак, C (-5 ; -5).

Теперь найдем уравнение второй диагонали AC : $y = kx + b$. Подставляя координаты точек A (-1;3) и C (-5 ; -5) получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3 = -k + b \\ -5 = -5k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + k = -5 + 5k \\ 3 = -k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4k = 8 \\ b = k + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ b = 5 \end{cases}$$

Итак, $y = 2x + 5$ - уравнение второй диагонали.

Ответ: $y = 2x + 5$