СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, март 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. Найдите наибольшее натуральное число n со свойством: для каждого простого числа p, большего 2 и меньшего n, разность $n-p$ также является простым числом.

Игорь Акулич

7 2. Докажите, что из любого выпуклого четырёхугольника можно вырезать три его копии вдвое меньшего размера. (У копии соответственные углы равны исходным, а соответственные стороны — в два раза меньше исходных.)

Александр Юран

7 3. Для каждого из девяти натуральных чисел n, $2n$, $3n$, $\ldots$, $9n$ выписали на доску первую слева цифру в его десятичной записи. При этом n выбрали так, чтобы среди девяти выписанных цифр количество различных цифр было как можно меньше. Чему равно это количество?

Алексей Толпыго

4. В белом клетчатом квадрате 100×100 закрашено чёрным несколько клеток (не обязательно соседних). В каждой горизонтали или вертикали, где есть чёрные клетки, их количество нечётно, так что одна из клеток — *средняя* по счёту. Все чёрные клетки, средние по горизонтали, стоят в разных вертикалях. Все чёрные клетки, средние по вертикали, стоят в разных горизонталях.

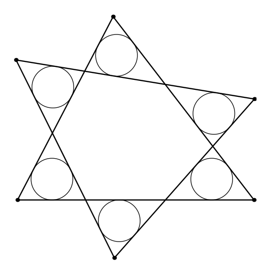
5 а) Докажите, что найдётся клетка, средняя и по горизонтали и по вертикали.

5 б) Обязательно ли каждая клетка, средняя по горизонтали — средняя и по вертикали?

Борис Френкин

10 5. Два треугольника пересекаются по шестиугольнику, который отсекает от них шесть маленьких треугольников. Радиусы вписанных окружностей этих шести треугольников равны. Докажите, что радиусы вписанных окружностей двух исходных треугольников также равны.

Андрей Кушнир



10 6. Для турнира изготовили 7 золотых, 7 серебряных и 7 бронзовых медалей. Все медали из одного металла должны весить одинаково, а из разных должны иметь различные массы. Но одна из всех медалей оказалась нестандартной — имела неправильную массу. При этом нестандартная золотая медаль может весить только меньше стандартной золотой, бронзовая — только больше стандартной бронзовой, а серебряная может отличаться по весу от стандартной серебряной в любую сторону. Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без гирь найти нестандартную медаль?

Александр Грибалко

12 7. На плоскости нарисован выпуклый многоугольник M, и дано простое число p. Оказалось, что существует ровно p разбиений многоугольника M на равносторонние треугольники со стороной 1 и квадраты со стороной 1. Докажите, что длина одной из сторон многоугольника M равна $p-1$.

Николай Белухов