СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 24 октября 2021 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

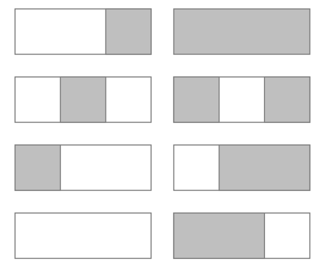
5

1. В ряд записаны $n > 2$ различных ненулевых чисел, причём каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину. Обратные к этим n числам тоже удалось записать в ряд (возможно, в другом порядке) так, что каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину (возможно, иную, чем в первом случае). Чему могло равняться n?

Алексей Заславский

6

2. На столе лежат 8 всевозможных горизонтальных полосок 1×3 из трёх квадратиков 1×1, каждый из которых либо белый, либо серый (см. рисунок). Разрешается переносить полоски в любых направлениях на любые (не обязательно целые) расстояния, не поворачивая и не переворачивая. Можно ли расположить полоски на столе так, чтобы все белые точки образовали многоугольник, ограниченный замкнутой несамопересекающейся ломаной, и все серые — тоже? (Полоски не должны перекрываться.)



Михаил Ильинский

7

3. В прямоугольный треугольник с гипотенузой длины 1 вписали окружность. Через точки её касания с его катетами провели прямую. Отрезок какой длины может высекать на этой прямой окружность, описанная около исходного треугольника?

Максим Волчкевич

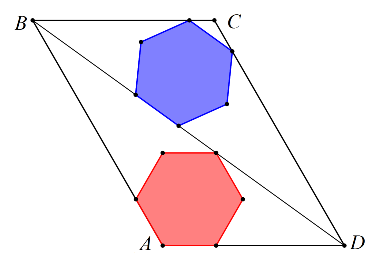
8

4. На доске написано число 7. Петя и Вася по очереди приписывают к текущему числу по одной цифре, начинает Петя. Цифру можно приписать в начало числа (кроме нуля), в его конец или между любыми двумя цифрами. Побеждает тот, после чьего хода число на доске станет точным квадратом. Может ли кто-нибудь гарантированно победить, как бы ни играл соперник?

Александр Грибалко

9

5. Параллелограмм $ABCD$ разделён диагональю BD на два равных треугольника. В треугольник ABD вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние стороны лежат на AB и AD, а одна из вершин — на BD. В треугольник CBD вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние вершины лежат на CB и CD, а одна из сторон — на BD. Какой из шестиугольников больше?



Константин Кноп

9

6. Пусть $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x (то есть наибольшее целое число, не превосходящее x). Докажите для любых натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ неравенство

$$\left\lfloor \frac{a_1^2}{a_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2^2}{a_3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a_n^2}{a_1} \right\rfloor \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Максим Дидин

12

7. На столе в ряд лежат 20 плюшек с сахаром и 20 с корицей в произвольном порядке. Малыш и Карлсон берут их по очереди, начинает Малыш. За ход можно взять одну плюшку с любого края. Малыш хочет, чтобы ему в итоге досталось по десять плюшек каждого вида, а Карлсон пытается ему помешать. При любом ли начальном расположении плюшек Малыш может достичь своей цели, как бы ни действовал Карлсон?

Александр Грибалко