СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 3 апреля 2022 г.

1. Многочлен третьей степени имеет три различных корня строго между 0 и 1. Учитель сообщил ученикам два из этих корней. Ещё он сообщил все четыре коэффициента многочлена, но не указал, в каком порядке эти коэффициенты идут. Обязательно ли можно восстановить третий корень?

Б. Френкин

2. Назовём расположенный в пространстве треугольник ABC *удобным*, если для любой точки P вне его плоскости из отрезков PA, PB и PC можно сложить треугольник. Какие углы может иметь удобный треугольник?

Д. Бродский

3. Дан клетчатый квадрат $n \times n$, где $n > 1$. *Кроссвордом* будем называть любое непустое множество его клеток, а *словом* — любую горизонтальную и любую вертикальную полоску (клетчатый прямоугольник шириной в одну клетку), целиком состоящую из клеток кроссворда и не содержащуюся ни в какой большей полоске из клеток кроссворда (ни горизонтальной, ни вертикальной). Пусть x — количество слов в кроссворде, y — наименьшее количество слов, которыми можно покрыть кроссворд. Найдите максимум отношения x/y при данном n.

Б. Френкин

4. На доске написана функция $\sin x + \cos x$. Разрешается написать на доске производную любой написанной ранее функции, а также сумму и произведение любых двух написанных ранее функций, так можно делать много раз. В какой-то момент на доске оказалась функция, равная для всех действительных x некоторой константе c. Чему может равняться c?

М. Евдокимов

5. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Выберем произвольную окружность ω, касающуюся описанной окружности треугольника ABC внутренним образом в точке B и не пересекающую прямую AC. Отметим на ω точки P и Q так, чтобы прямые AP и CQ касались ω, а отрезки AP и CQ пересекались внутри треугольника ABC. Докажите, что все полученные таким образом прямые PQ проходят через одну фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности ω.

А. Марданов

6. На доске написана буква А. Разрешается в любом порядке и количестве: а) приписывать А слева; б) приписывать Б справа; в) одновременно приписывать Б слева и А справа. Например, БААБ так получить можно (А $\to$ БАА $\to$ $\to$ БААБ), а АББА — нельзя. Докажите, что при любом натуральном n половину слов длины n получить можно, а другую половину — нельзя.

Фольклор, предложил А. Шень