

СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 24 октября 2021 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 5 1. Мудрецам A, B, C, D сообщили, что числа $1, 2, \dots, 12$ написаны по одному на 12 карточках и что эти карточки будут розданы им по три, причём каждый увидит лишь свои карточки. После раздачи мудрецы по очереди сказали следующее.
 A : «На одной из моих карточек — число 8».
 B : «Все числа на моих карточках простые».
 C : «А все числа на моих — составные, причём имеют общий простой делитель».
 D : «Тогда я знаю, какие карточки у каждого из вас».
Какие карточки у A , если все сказали правду?

Михаил Евдокимов

- 7 2. В одной из клеток шахматной доски 10×10 стоит ладья. Переходя каждым ходом в соседнюю по стороне клетку, она обошла все клетки доски, побывав в каждой ровно по одному разу. Докажите, что для каждой главной диагонали доски верно следующее утверждение: в маршруте ладьи есть два последовательных хода, первым из которых она ушла с этой диагонали, а следующим — вернулась на неё. (Главная диагональ ведёт из угла доски в противоположный угол.)

Александр Грибалко

- 7 3. На плоскости сидят кузнечик Коля и 2020 его товарищей. Коля собирается совершить прыжок через каждого из остальных кузнечиков (в произвольном порядке) так, что начальная и конечная точка каждого прыжка симметричны относительно перепрыгиваемого кузнечика. Назовём точку *финишной*, если Коля может в неё попасть после 2020-го прыжка. При каком наибольшем числе N найдётся начальная расстановка кузнечиков, для которой имеется ровно N различных возможных финишных точек?

Михаил Святловский

- 7 4. При каком наименьшем k среди любых трёх ненулевых действительных чисел можно выбрать такие два числа a и b , что $|a - b| \leq k$ или $|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}| \leq k$?

Максим Дидин

- 9 5. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята такая точка P , что $\angle PDA = \angle PBA$. Пусть ω_1 — вневписанная окружность треугольника PAB , лежащая напротив вершины A . Пусть ω_2 — вписанная окружность треугольника PCD . Докажите, что одна из общих касательных к ω_1 и ω_2 параллельна AD .

Иван Фролов

- 10 6. На столе в ряд лежат 20 плюшек с сахаром и 20 с корицей в произвольном порядке. Малыш и Карлсон берут их по очереди, начинает Малыш. За ход можно взять одну плюшку с любого края. Малыш хочет, чтобы ему в итоге досталось по десять плюшек каждого вида, а Карлсон пытается ему помешать. При любом ли начальном расположении плюшек Малыш может достичь своей цели, как бы ни действовал Карлсон?

Александр Грибалко

- 6 7. Клетчатый квадрат 2×2 накрыт двумя треугольниками. Обязательно ли
6 а) хоть одна из четырёх его клеток целиком накрыта одним из этих треугольников;
6 б) в один из этих треугольников можно поместить квадрат со стороной 1?

Александр Шаповалов