Сложный вариант, 8 – 9 классы

1 (5 баллов). *В ряд записаны $n > 2$ различных ненулевых чисел, причём каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину. Обратные к этим n числам тоже удалось записать в ряд (возможно, в другом порядке) так, что каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину (возможно, иную, чем в первом случае). Чему могло равняться n?*

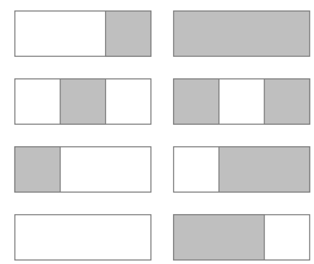
(Алексей Заславский)

Ответ: 3 или 4. *Примеры:* $-1, \frac{1}{2}, 2$ и $-3, -1, 1, 3$.

Оценка. Если чисел больше 4, то среди них есть три одного знака (пусть положительных). Выберем три наименьших их них: $a-d$, a, $a+d$, где $0 < d < a$. Обратные числа будут идти в обратном порядке: $\frac{1}{a-d} > \frac{1}{a} > \frac{1}{a+d}$, но $\frac{1}{a-d} - \frac{1}{a} = \frac{d}{a(a-d)} \neq \frac{d}{a(a+d)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+d}$.

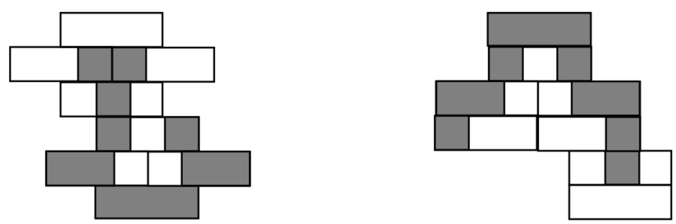
Замечание. Оба примера — единственные с точностью до постоянного множителя.

2 (6 баллов). *На столе лежат 8 всевозможных горизонтальных полосок 1×3 из трёх квадратиков 1×1, каждый из которых либо белый, либо серый (см. рисунок). Разрешается переносить полоски в любых направлениях на любые (не обязательно целые) расстояния, не поворачивая и не переворачивая. Можно ли расположить полоски на столе так, чтобы все белые точки образовали многоугольник, ограниченный замкнутой несамопересекающейся ломаной, и все серые — тоже? (Полоски не должны перекрываться.)* *(Михаил Ильинский)*



Ответ: можно.

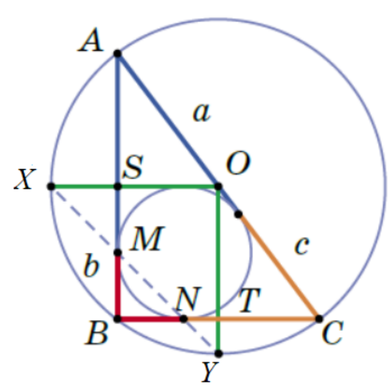
См. примеры на рисунке.



3 (7 баллов). *В прямоугольный треугольник с гипотенузой длины 1 вписали окружность. Через точки её касания с его катетами провели прямую. Отрезок какой длины может высекать на этой прямой окружность, описанная около исходного треугольника?* *(Максим Волчкевич)*

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Первое решение. Пусть ABC — наш треугольник с прямым углом B, точка O — центр его описанной окружности, M и N — точки касания вписанной окружности с катетами AB и BC, X и Y — середины дуг AB и BC соответственно. Достаточно доказать, что M и N лежат на XY. Опустим из O перпендикуляры OS и OT на катеты AB и BC и продлим перпендикуляры до пересечения с описанной окружностью в точках X и Y соответственно. Пусть a, b, c — длины касательных из точек A, B, C к вписанной окружности.

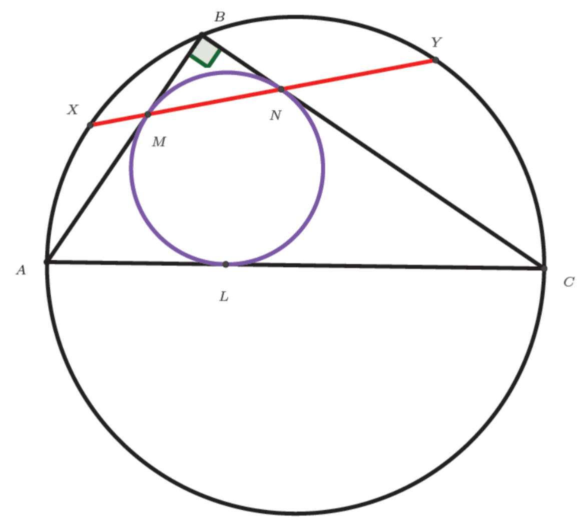


Треугольник XOY — равнобедренный прямоугольный. Заметим, что $OX = \frac{a+c}{2}$, $OS = \frac{b+c}{2}$, откуда $XS = OX - OS = \frac{a-b}{2}$. Если M' — точка пересечения XY с AB, то $SM' = SX = \frac{a-b}{2}$, откуда $SM' + MB = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2} = BS$, а значит, M' и M совпадают. Аналогично, N лежит на XY.

Второе решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Точки касания вписанной окружности с катетами, очевидно, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку IC. По известной лемме о трезубце на этом же серединном перпендикуляре лежат середины K и L дуг AC и BC. Очевидно, дуга KL равна $45°$.

Третье решение. Воспользуемся так называемой *Задачей 255*:

Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Тогда проекция K точки C на биссектрису угла BAC лежит на прямой MN.



Пусть точка P — проекция точки A на биссектрису угла C, точка Q — проекция точки C на биссектрису угла A. По Задаче 255 точки P и Q лежат на прямой MN. Так как $90° = \angle ABC = \angle APC = \angle AQC$, то точки P и Q совпадают соответственно с X и Y. Значит, PQ — искомая хорда. Так как AQ и CP — биссектрисы, то P и Q — середины дуг AB и BC соответственно. Тогда центральный угол окружности, опирающийся на хорду PQ, прямой, и поэтому $PQ = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Четвёртое решение. Обозначения те же, что в предыдущем решении, а данная хорда обозначается XY (точки на прямой MN идут в порядке $X - M - N - Y$). Пусть L — точка касания вписанной окружности со стороной AC. Пусть $1 = BM = BN$ (а не $AC = 1$!), тогда $NM = \sqrt{2}$, $AM = AL = a$, $CN = CL = b$, $MX = x$, $NY = y$.

Выразив двумя способами площадь треугольника ABC (как $\frac{AB \cdot BC}{2}$ и как pr), получим $\frac{(a+1)(b+1)}{2} = (1 + a + b) \cdot 1$, откуда $\boxed{ab = a + b + 1}$.

Запишем степень точки M относительно окружности: $\boxed{a = x(y + \sqrt{2})}$ (тот же результат можно получить, записав подобие треугольников MXA и MBY) и степень точки N: $\boxed{b = y(x + \sqrt{2})}$. Теперь подставляем a и b:

$$\begin{aligned} xy(x+\sqrt{2})(y+\sqrt{2}) = ab = a + b + 1 &= 2xy + \sqrt{2}(x+y) + 1, \\ xy(xy + \sqrt{2}(x+y) + 2) &= 2xy + \sqrt{2}(x+y) + 1, \\ \sqrt{2}(x+y)(xy-1) + (xy)^2 - 1 &= 0, \\ (xy + 1 + \sqrt{2}(x+y))(xy-1) &= 0, \\ xy &= 1. \end{aligned}$$

Подставляем полученное значение $xy = 1$:

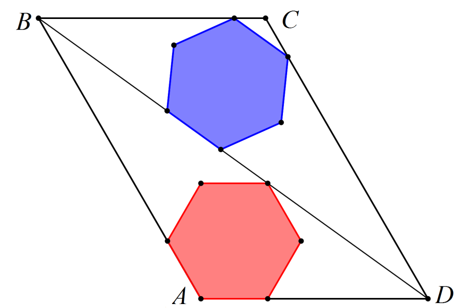
$$\begin{aligned} a = x(y+\sqrt{2}) &= 1 + \sqrt{2}x, \\ b = y(x+\sqrt{2}) &= 1 + \sqrt{2}y, \\ a + b &= \sqrt{2}(x + y + \sqrt{2}), \\ AC &= \sqrt{2}XY. \end{aligned}$$

4 (8 баллов). *На доске написано число 7. Петя и Вася по очереди приписывают к текущему числу по одной цифре, начинает Петя. Цифру можно приписать в начало числа (кроме нуля), в его конец или между любыми двумя цифрами. Побеждает тот, после чьего хода число на доске станет точным квадратом. Может ли кто-нибудь гарантированно победить, как бы ни играл соперник? (Александр Грибалко)*

Ответ: нет. На первом ходу Вася не проиграет, так как нет точных двузначных квадратов с цифрой 7. Покажем, что далее каждый может приписать в конец текущего числа 2 или 3 так, чтобы соперник не выиграл следующим ходом.

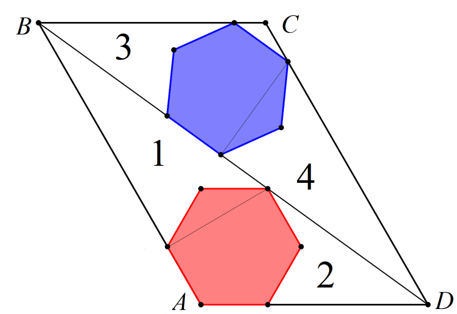
Пусть у нас было число A, и соперник может сделать квадрат, приписав цифру как к числу $\overline{A2}$, так и к числу $\overline{A3}$. Поскольку точные квадраты не оканчиваются ни на 2, ни на 3, он припишет цифру в конец: скажем, x — в первом случае и y — во втором. Тогда оба числа $\overline{A2x}$ и $\overline{A3y}$ — точные квадраты, разность между которыми меньше 20. Но каждое из этих чисел хотя бы трёхзначное, и тогда разность между соседними точными квадратами не меньше $11^2 - 10^2 > 20$. Противоречие.

5 (9 баллов). *Параллелограмм $ABCD$ разделён диагональю BD на два равных треугольника. В треугольник ABD вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние стороны лежат на AB и AD, а одна из вершин — на BD. В треугольник CBD вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние вершины лежат на CB и CD, а одна из сторон — на BD. Какой из шестиугольников больше? (Константин Кноп)*

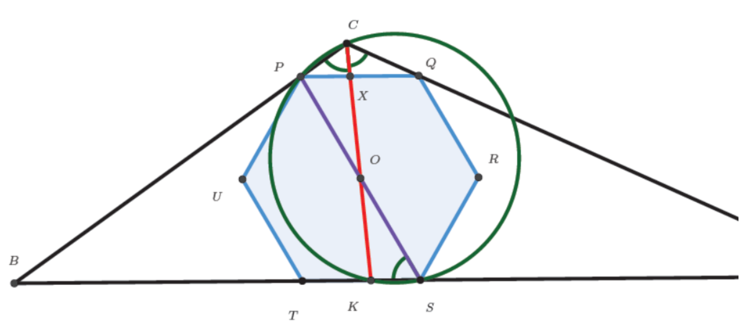


Ответ: тот, который примыкает к вершине A.

Первое решение (Макар Чудновский, 7 класс). Параллелограмм разделён на два данных шестиугольника, четыре невыпуклых четырёхугольника, которые мы обозначили на рисунке цифрами 1, 2, 3, 4, и треугольник, примыкающий к вершине C. Заметим, что четырёхугольники 1 и 4 подобны — они получаются вырезанием из двух подобных прямоугольных треугольников равнобедренных треугольников с углом 120° при вершине. Аналогично, подобны четырёхугольники 2 и 3. Заметим, что коэффициенты подобия равны отношению сторон данных шестиугольников. Но площади половинок параллелограмма ABD и CBD равны, причём половинка ABD состоит из первого шестиугольника и четырёхугольников 1 и 2, а вторая — из второго шестиугольника, четырёхугольников 3 и 4 и ещё белого треугольника. Значит, сторона шестиугольника, примыкающего к вершине A, больше.



Второе решение. Диагональ красного шестиугольника совпадает с биссектрисой треугольника ABD, которая равна биссектрисе CK треугольника BCD. Пусть синий шестиугольник — это $PQRSTU$, как на рисунке. Требуется сравнить диагонали CK и PS правильных шестиугольников. Они пересекаются в центре O шестиугольника, так как четырёхугольник $PCQO$ вписанный, CK биссектриса и поэтому делит дугу POQ пополам, то есть проходит через O.



Заметим, что прямая CO пересекает отрезок PQ, поэтому (из симметрии относительно O) она пересекает и отрезок TS. Углы PCK и PSK равны по 60°. Далее есть несколько способов.

Первый способ. Треугольники PCO и KSO подобны по двум углам. Пусть $PO = SO = a$, $OK = 1$, тогда $OC = a^2$. В треугольнике PCO: $\angle P > 60^\circ = \angle C$, значит, $CO > PO$ и поэтому $a > 1$. Получаем $PS = 2a$, $CK = a^2 + 1$, их разность $CK - PS = (a-1)^2 > 0$.

Второй способ. Заметим, что точки P, C, S, K лежат на одной окружности. Требуется сравнить её хорды CK и PS — диагонали правильных шестиугольников. Чтобы сравнить хорды, достаточно сравнить величины меньших дуг, которые они стягивают. Не умаляя общности, $\angle CBD \geqslant \angle CDB$, тогда угол CKS не острый, и равный ему угол CPS — тоже не острый. Тогда тупыми будут углы PKS и CPK, откуда дуги PKS и CPK — меньше полуокружности, их нам и надо сравнить.

Общую часть этих дуг можно выбросить и сравнить дуги CP и KS, а для этого достаточно сравнить хорды CP и KS. Пусть X — точка пересечения PQ и CK. Тогда $PX = SK$ (в силу симметрии относительно O). Заметим, что $\angle CPX = \angle CBK < 60^\circ$ (так как угол B параллелограмма равен 60°), $\angle PCX = 60^\circ$, откуда $\angle CXP > 60^\circ$. Значит, $SK = PX < PC$, так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Третий способ. Из той же окружности получаем, что

$$CK = OC + OK \geqslant 2\sqrt{OC \cdot OK} = 2\sqrt{OP \cdot OS} = 2OP = PS$$

(равенства нет, потому что $OE < OP < OC$).

6 (9 баллов). *Пусть $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x (то есть наибольшее целое число, не превосходящее x). Докажите для любых натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ неравенство*

$$\left\lfloor \frac{a_1^2}{a_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2^2}{a_3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a_n^2}{a_1} \right\rfloor \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

(Максим Дидин)

Перепишем очевидное неравенство $(a_k - a_{k+1})^2 \geqslant 0$ в виде $\frac{a_k^2}{a_{k+1}} \geqslant 2a_k - a_{k+1}$. Так как число справа — целое, то и $\left\lfloor \frac{a_k^2}{a_{k+1}} \right\rfloor \geqslant 2a_k - a_{k+1}$. Сложив такие неравенства, получим требуемое.

7 (12 баллов). *На столе в ряд лежат 20 плюшек с сахаром и 20 с корицей в произвольном порядке. Малыш и Карлсон берут их по очереди, начинает Малыш. За ход можно взять одну плюшку с любого края. Малыш хочет, чтобы ему в итоге досталось по десять плюшек каждого вида, а Карлсон пытается ему помешать. При любом ли начальном расположении плюшек Малыш может достичь своей цели, как бы ни действовал Карлсон?* *(Александр Грибалко)*

Ответ: при любом.

Пронумеруем плюшки в ряду числами от 1 до 40. Заметим, что у Малыша всегда есть возможность взять плюшку с номером любой чётности, а после каждого его хода Карлсон вынужден брать плюшку с номером другой чётности.

Пусть среди плюшек с нечётными номерами не меньше десяти с сахаром (если с корицей, то рассуждения аналогичны). Тогда Малыш начинает с того, что берёт плюшки с нечётными номерами и после каждого хода Карлсона вычисляет такую величину: количество полученных плюшек с сахаром + количество оставшихся на столе плюшек с сахаром с чётными номерами. В начальный момент эта величина не больше 10, а если Малыш будет брать плюшки только с нечётными номерами, то в конце она будет не меньше 10. При этом после каждой пары ходов Малыша и Карлсона эта величина изменяется не более чем на 1. Следовательно, в какой-то момент (возможно, начальный) она будет равна 10. После этого Малыш может брать только плюшки с чётными номерами и в итоге получит ровно 10 плюшек с сахаром, а значит, и 10 плюшек с корицей, что и требуется.

Замечание. Верно более общее утверждение: если в ряд лежит чётное число плюшек, и из них на нечётных местах ровно L с сахаром, а на чётных — ровно R с сахаром, то для всякого k между (нестрого) числами R и L Малыш может действовать так, чтобы взять ровно k плюшек с сахаром.

Для решения исходной задачи достаточно доказать это утверждение, ибо в нашем случае $R + L = 20$ и одно из чисел не меньше 10, а другое не больше 10.

Доказываем индукцией по количеству плюшек. Если их две, то утверждение очевидно. Шаг индукции: покрасим плюшки в шахматном порядке, чтобы нечётные стали белыми; если $k = L$, то Малышу достаточно каждым ходом есть белую плюшку, если $k = R$ — то чёрную. Если же k заключено строго между L и R, то Малыш может сделать первый ход произвольным образом, а далее добиться своего по предположению индукции. В самом деле, не умаляя общности, $L < k < R$, тогда белых плюшек с сахаром останется либо L, либо $L-1$, чёрных — либо R, либо $R-1$, а Малышу далее надо взять либо k, либо $k-1$ плюшку с сахаром, причём $L-1 < L \leqslant k-1 < k \leqslant R-1 < R$.