Базовый вариант, 8 – 9 классы

1 (4 балла). *Турнир Городов проводится раз в год. Сейчас год проведения осеннего тура делится на номер турнира:* $2021 : 43 = 47$. *Сколько ещё раз человечество сможет наблюдать это удивительное явление?* *(Алексей Заславский)*

Ответ: ещё 4 раза. Так как сейчас 43-й Турнир, то осенний тур n-го Турнира проходит в году $46 \cdot 43 + n$. Число $46 \cdot 43 + n$ делится на n тогда и только тогда, когда $46 \cdot 43 = 2 \cdot 23 \cdot 43$ делится на n. У числа $2 \cdot 23 \cdot 43$ есть 4 делителя, больших чем 43 — это $2 \cdot 23$, $2 \cdot 43$, $23 \cdot 43$ и $2 \cdot 23 \cdot 43$.

Номер турнира N на $2021 - 43 = 1978$ меньше номера года M, и так будет всегда. Поэтому $M : N = 1 + 1978 : N$. Таким образом, требуется, чтобы число 1978 нацело делилось на номер очередного Турнира. Но $1978 = 43 \cdot 23 \cdot 2$, то есть оно делится (из чисел, больших 43) на 46, 86, 989 и на само себя. Поэтому ответ: ещё 4 раза, в 2024, 2064, 2967 и 3956 годах.

2 (5 баллов). *Дан куб. Три плоскости, параллельные граням, разделили его на 8 параллелепипедов. Их покрасили в шахматном порядке. Объёмы чёрных параллелепипедов оказались равны 1, 6, 8, 12. Найдите объёмы белых параллелепипедов.* *(Олег Смирнов)*

Ответ: 2, 3, 4, 24. Обозначим точку пересечения трёх плоскостей, разрезающих куб, через A. Заметим, что объём любого из 8 полученных параллелепипедов равен произведению трёх его рёбер, выходящих из A. Пусть мы хотим найти объём какого-то белого параллелепипеда α. Перемножим объёмы трёх чёрных параллелепипедов, примыкающих к α. Мы получим произведение длин 9 отрезков: рёбра параллелепипеда α, выходящие из A, будут входить в произведение по два раза, а рёбра противоположного к α чёрного параллелепипеда β, выходящие из A, — по одному разу. Тогда, поделив полученное число на объём β, мы получим квадрат объёма α.

Таким образом, перемножая тройки чисел из условия и деля на четвёртое, мы получим квадраты объёмов белых параллелепипедов; останется извлечь корни.

3 (5 баллов). *У пирата есть пять мешочков с монетами, по 30 монет в каждом. Он знает, что в одном лежат золотые монеты, в другом — серебряные, в третьем — бронзовые, а в каждом из двух оставшихся поровну золотых, серебряных и бронзовых. Можно одновременно достать любое число монет из любых мешочков и посмотреть, что это за монеты (вынимаются монеты один раз). Какое наименьшее число монет нужно достать, чтобы наверняка узнать содержимое хотя бы одного мешочка?* *(Михаил Евдокимов)*

Ответ: 5 монет.

Пример. Достанем по одной монете из каждого мешочка. Среди этих пяти монет есть монеты всех трёх видов, поэтому какого-то вида есть только одна монета. Если она, например, золотая, то её достали из мешочка с золотыми монетами. Действительно, для каждой монеты из «смешанного» мешочка есть парная из соответствующего «однородного» мешочка.

Оценка. Пусть мы достали только 4 монеты (или меньше). Заметим, что не имеет смысла доставать больше одной монеты из одного и того же мешочка, так как они могут оказаться одинаковыми, а тогда никакой дополнительной информации мы не получим. Поэтому можно считать, что мы достали по одной монете из четырёх разных мешочков. Тогда мы могли достать монеты З, З, С, Б, и в этом случае есть по крайней мере два варианта распределения соответствующих мешочков: З, Смеш, С, Смеш, Б и Смеш, З, Смеш, Б, С, не совпадающих ни в одной из позиций (последним указан мешочек, из которого монеты не доставались).

4 (5 баллов). *Выпуклый n-угольник ($n > 4$) обладает таким свойством: если диагональ отсекает от него треугольник, то этот треугольник равнобедренный. Докажите, что среди любых четырёх сторон этого n-угольника есть хотя бы две равных.* *(Максим Дидин)*

Рассмотрим группы равных сторон, расположенных подряд. Заметим, что на стыке таких групп находится острый угол n-угольника — угол при основании равнобедренного треугольника. Но в многоугольнике не может быть больше трёх острых углов (сумма внешних углов равна $360°$, поэтому среди них не больше трёх тупых), значит, этих групп не больше трёх. Следовательно, среди каждых четырёх сторон найдутся две из одной группы, то есть равные.

5 (5 баллов). *В турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый играл с каждым один раз белыми и один раз чёрными. Обязательно ли найдутся такие два шахматиста, что один из них выиграл не меньше партий белыми и не меньше партий чёрными, чем другой? (Борис Френкин)*

Ответ: обязательно. Будем говорить, что шахматист A не слабее шахматиста B, если A выиграл и белыми, и чёрными не меньше партий, чем B. Предположим, что такой пары нет.

Если у каких-то двух игроков одинаковое число побед белыми, один из них не слабее другого. То же верно, если у каких-то двух игроков одинаковое число побед чёрными. Значит, число побед белыми у всех разное, и число побед чёрными — тоже. Отсюда следует, что количества побед белыми у 20 игроков равны числам 19, 18, $\ldots$, 2, 1 и 0, и то же для количеств побед чёрными. Пусть 19 партий белыми выиграл A, а 19 партий чёрными выиграл другой шахматист B. Но тогда игру A с B, где A играл белыми, а B — чёрными, выиграли и A, и B. Такая ситуация невозможна, поэтому 19 партий белыми и чёрными выиграл один и тот же шахматист. Но тогда он не слабее всех остальных. Противоречие.