## СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 3 апреля 2022 г.

**Предварительные решения задач.**

**У-1.** *Многочлен третьей степени имеет три различных корня строго между 0 и 1. Учитель сообщил ученикам два из этих корней. Ещё он сообщил все четыре коэффициента многочлена, но не указал, в каком порядке эти коэффициенты идут. Обязательно ли можно восстановить третий корень?* *(Б. Френкин)*

**Ответ:** да, можно.

**Решение.** Пусть $a, b, c, d$ — коэффициенты многочлена от старшего к младшему, $\alpha, \beta$ — известные корни, $\gamma$ — неизвестный корень. Прежде всего заметим, что так как все корни между 0 и 1, то в силу теоремы Виета коэффициент $d$ — наименьший из коэффициентов по абсолютной величине.

*Первый способ* (А.Тертерян). Рассмотрим всевозможные расстановки коэффициентов $a, b, c$, положим свободный член равным $d$ и проверим, будут ли $\alpha$ и $\beta$ корнями получившихся многочленов. При правильной расстановке ответ утвердительный. Предположим, что подойдёт и другая расстановка. Вычтем полученный многочлен из правильного и обозначим их разность $P(x)$. Её свободный член равен 0, поэтому $P(0) = 0$. Сумма коэффициентов также равна 0, поэтому $P(1) = 0$. Кроме того, $P(\alpha) = P(\beta) = 0$. Таким образом, многочлен степени не выше 3 имеет 4 различных корня. Противоречие.

*Второй способ* (Б.Френкин). Поскольку все корни многочлена положительны, знаки коэффициентов чередуются. Поэтому, зная $d$, определяем $b$. Если найти $a$, то определяется и $c$. Заметим, что $a\gamma = \frac{-d}{\alpha\beta}$. Поскольку $b = -a(\alpha + \beta + \gamma)$, можно найти $a(\alpha + \beta)$. Так как $\alpha$ и $\beta$ известны, отсюда определяется $a$.

**У-2.** *Назовём расположенный в пространстве треугольник $ABC$* удобным*, если для любой точки $P$ вне его плоскости из отрезков $PA$, $PB$ и $PC$ можно сложить треугольник. Какие углы может иметь удобный треугольник?* *(Д. Бродский)*

**Ответ:** все углы должны быть по $60°$.

**Решение.** Докажем сначала, что неравносторонний треугольник под условие подходить не может. Предположим противное, пусть такой треугольник $ABC$ есть и в нём $AB \neq AC$, причём длины этих сторон различаются хотя бы на $d$. Рассмотрим точку $P$, расположенную на перпендикуляре к плоскости $ABC$, проходящем через точку $A$, на расстоянии $\varepsilon$ от $A$. Тогда $PB = \sqrt{AB^2 + \varepsilon^2}$, $PC = \sqrt{AC^2 + \varepsilon^2}$. Можно выбрать $P$ настолько близко к вершине $A$, уменьшая $\varepsilon$, чтобы $PB$ и $PC$ отличались соответственно от $AB$ и $AC$ меньше, чем на $d/3$, и чтобы $\varepsilon$ было меньше $d/3$. Тогда стороны $PB$ и $PC$ будут различаться более чем на $d/3$, а длина стороны $PA$ меньше $d/3$ — противоречие с неравенством треугольника.

Покажем теперь, что равносторонний треугольник удобен.

*Первый способ.* Пусть $AB = BC = CA$. Отметим на лучах $PA$, $PB$, $PC$ точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ так, чтобы выполнялись равенства:

$$AB \cdot PA_1 = PB \cdot PC,$$

$$BC \cdot PB_1 = PC \cdot PA,$$

$$CA \cdot PC_1 = PB \cdot PA.$$

Theугольники $APB$ и $B_1PA_1$ подобны по углу и отношению двух сторон, откуда $A_1B_1 = \frac{AB \cdot PA_1}{PB} = PC$. Аналогично вычисляем длины остальных сторон. Получаем, что треугольник $A_1B_1C_1$ — искомый.

*Второй способ.* Опустим из точки $P$ перпендикуляр $PQ$ на плоскость треугольника $ABC$. Достаточно доказать, что отрезки $QA$, $QB$, $QC$ (возможно, вырожденные) удовлетворяют нестрогим неравенствам треугольника. В самом деле, пусть $QA = a$, $QB = b$, $QC = c$ и пусть $PQ = x > 0$. Докажем, например, что из неравенства $a + b \geqslant c$ следует неравенство $PA + PB > PC$. Первое неравенство равносильно такому: $a^2 + b^2 + 2ab \geqslant c^2$. Возведя второе неравенство $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + x^2} > \sqrt{c^2 + x^2}$ в квадрат, получаем эквивалентное неравенство $a^2 + b^2 + 2x^2 + 2\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} > c^2 + x^2$, которое выполнено, так как $2x^2 > x^2$ и $2\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} > 2ab$ при $x > 0$.

Осталось доказать, что для любой точки $Q$ в плоскости равностороннего треугольника $ABC$ отрезки (возможно, вырожденные) $QA$, $QB$, $QC$ удовлетворяют нестрогим неравенствам треугольника. Рассмотрим поворот на $60^\circ$ вокруг $A$, переводящий вторую вершину треугольника в третью, скажем, $B$ в $C$. Пусть $R$ — образ точки $Q$ при этом повороте. Тогда треугольник $AQR$ равносторонний, откуда $RQ = QA$. Кроме того, $QB = RC$. Тогда треугольник $QRC$ (возможно, вырожденный), имеет стороны $RQ$, $RC$ и $QC$, равные соответственно $QA$, $QB$ и $QC$, откуда следует требуемое.

**У-3.** *Дан клетчатый квадрат $n \times n$, где $n > 1$.* Кроссвордом *будем называть любое непустое множество его клеток, а* словом *— любую горизонтальную и любую вертикальную полоску (клетчатый прямоугольник шириной в одну клетку), целиком состоящую из клеток кроссворда и не содержащуюся ни в какой большей полоске из клеток кроссворда (ни горизонтальной, ни вертикальной). Пусть $x$ — количество слов в кроссворде, $y$ — наименьшее количество слов, которыми можно покрыть кроссворд. Найдите максимум отношения $x/y$ при данном $n$.*

*(Б. Френкин)*

**Ответ:** $1 + n/2$.

**Решение.** *Пример.* Для прямоугольника $n \times 2$ получаем $x = n + 2$, $y = 2$.

*Оценка. Первый способ.* Пусть в кроссворде $z$ клеток. Выберем некоторое его покрытие наименьшим количеством слов. Слова из этого покрытия назовём *правильными*, а остальные *неправильными*.

Каждая клетка содержится не более чем в одном горизонтальном и одном вертикальном слове. Хотя бы одно из этих слов правильное, так как правильные слова покрывают весь кроссворд. Значит, каждая клетка принадлежит не более чем одному неправильному слову. Поэтому сумма количеств клеток в неправильных словах не больше $z$.

Если клетка является словом, то к ней не примыкает другая клетка кроссворда ни по горизонтали, ни по вертикали. Следовательно, клетка входит в любое покрытие кроссворда словами и, значит, является правильным словом. Поэтому все неправильные слова содержат не меньше чем по две клетки и количество неправильных слов не больше $z/2$.

Так как правильные слова покрывают весь кроссворд, сумма количеств клеток в них не меньше $z$. Каждое слово содержит не больше $n$ клеток, поэтому количество правильных слов не меньше $z/n$. Отсюда $x/y \le 1 + \frac{z}{2}/\frac{z}{n} = 1 + n/2$, что и требовалось.

*Оценка. Второй способ.* Заметим, что если есть слова длины 1, то они обязательно входят в любое покрытие кроссворда. Значит, их можно выкинуть, от этого отношение $x/y$ не уменьшится, поскольку $x \ge y$. Поэтому далее считаем, что все слова имеют длину не меньше 2. Построим двудольный граф, в котором вершины первой доли — это все слова кроссворда, а вершины второй доли — все занятые клетки (ребро соединяет две вершины, если слово содержит клетку). Рассмотрим те из вершин первой доли, которые насыщают всю вторую долю, пусть сумма их степеней равна $d$. При этом $d \le ny$, поскольку степень каждой из этих вершин не больше $n$. Так как степень каждой из остальных вершин первой доли не меньше 2, то общее число рёбер в графе не меньше $d + 2(x - y)$. Во второй доле не более $d$ вершин, при этом степень каждой из них не больше 2, значит, число рёбер в графе не превосходит $2d$. Приходим к неравенству $d + 2(x - y) \le 2d$, откуда $2(x - y) \le d \le ny$, и получаем оценку.

**У-4.** *На доске написана функция $\sin x + \cos x$. Разрешается написать на доске производную любой написанной ранее функции, а также сумму и произведение любых двух написанных ранее функций, так можно делать много раз. В какой-то момент на доске оказалась функция, равная для всех действительных $x$ некоторой константе $c$. Чему может равняться $c$?* *(М. Евдокимов)*

**Ответ:** любому чётному числу.

**Решение.** Любая функция, полученная описанным способом, — многочлен от $\sin\ x$ и $\cos\ x$ с целыми коэффициентами. Доказательство индукцией по числу шагов: исходная функция имеет такой вид; производная многочлена с целыми коэффициентами — многочлен с целыми коэффициентами; аналогичное верно для суммы и произведения. При $x = 0$ синус и косинус принимают целые значения, поэтому значение многочлена от них с целыми коэффициентами — целое, то есть $c$ целое.

Положим $f(x) = \sin x + \cos x$. Запишем на доску $f'(x) = \cos x - \sin x$, $f''(x) = -\sin x - \cos x$, $f'''(x) = -\cos x + \sin x$. Тогда $f^2(x) + f'^2(x) = (\sin x + \cos x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 \equiv 2$. Аналогично $f(x)f''(x) + f'(x)f'''(x) \equiv -2$. Суммируя такие функции, получаем все чётные константы.

Покажем, что нечётную константу получить нельзя. Заметим, что

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Поэтому все функции, которые можно получить, — это многочлены от $\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$ и $\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$ с целыми коэффициентами и нулевым свободным членом. При $x = \frac{\pi}{4}$ остаются лишь члены с косинусом (равным 1). Коэффициенты при чётных степенях косинуса чётны, а при нечётных либо иррациональны, либо равны нулю. Целочисленное значение получится, если сумма коэффициентов при нечётных степенях равна 0, но тогда значение чётно, что и требовалось доказать.

**У-5.** *Дан неравнобедренный треугольник $ABC$. Выберем произвольную окружность $\omega$, касающуюся описанной окружности треугольника $ABC$ внутренним образом в точке $B$ и не пересекающую прямую $AC$. Отметим на $\omega$ точки $P$ и $Q$ так, чтобы прямые $AP$ и $CQ$ касались $\omega$, а отрезки $AP$ и $CQ$ пересекались внутри треугольника $ABC$. Докажите, что все полученные таким образом прямые $PQ$ проходят через одну фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности $\omega$.* *(А. Марданов)*

Пусть $R$ — точка пересечения касательных $AP$ и $CQ$. Докажем, что все прямые $PQ$ проходят через точку $D$ — основание внешней биссектрисы угла $B$ треугольника $ABC$ (точка $D$ существует, так как треугольник неравнобедренный). По теореме, обратной к теореме Менелая, для треугольника $ARC$, достаточно проверить, что $\frac{AP}{PR} \cdot \frac{RQ}{QC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1$. Поскольку $RQ$ и $PR$ равны как касательные, достаточно проверить равенство $\frac{AP}{QC} = \frac{AD}{DC}$. Но $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ по свойству внешней биссектрисы, так что проверяем равенство $\frac{AP}{QC} = \frac{AB}{BC}$.

Пусть $AB$ и $BC$ пересекают окружность $\omega$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. Запишем степени точек $A$ и $C$ относительно окружности $\omega$: $AX \cdot AB = AP^2$, $CY \cdot CB = CQ^2$, поэтому осталось проверить равенство $AX/AB = CY/CB$. Это равенство следует из того, что $\omega$ касается описанной окружности треугольника $ABC$ в точке $B$.

**У-6.** *На доске написана буква А. Разрешается в любом порядке и количестве: а) приписывать А слева; б) приписывать Б справа; в) одновременно приписывать Б слева и А справа. Например, БААБ так получить можно (А → БАА → БААБ), а АББА — нельзя. Докажите, что при любом натуральном $n$ половину слов длины $n$ получить можно, а другую половину — нельзя.*

*(Предложил А. Шень)*

**Решение 1.** Назовем слова, которые можно получить, достижимыми. Всего существует $2^n$ различных слов длины $n$, поэтому достаточно доказать, что количество достижимых слов длины $n$ равно $2^{n-1}$. Докажем это утверждение по индукции.

*База индукции.* Для $n = 1$ и $n = 2$ это легко проверяется: А → АА, А → АБ.

*Шаг индукции.* Пусть для всех длин, не превосходящих $n$, утверждение верно. Посмотрим, как можно получить слово длины $n + 1$:

1) из слова длины $n$, применив операцию а): W → AW;

2) из слова длины $n$, применив операцию б): W → WБ;

3) из слова длины $n - 1$, применив операцию в): W → БWA.

Слов 1-го и 2-го типа по $2^{n-1}$, а слов 3-го типа — $2^{n-2}$. При этом слова 3-го типа не могут совпадать со словами 1-го и 2-го типа. А вот множества слов 1-го и 2-го типа пересекаются. Их общие слова имеют вид А$w$Б. Докажем, что слова $w$ (которые находятся между буквами А и Б) — это все достижимые слова длины $n-1$. Понятно, что если $w$ — достижимое слово, то за две операции из него можно получить А$w$Б. С другой стороны, если слово $w$Б достижимое, то посмотрим, как оно было получено. Если проделать все те же операции, но пропустить приписывание последней буквы Б, то будет получено слово $w$, значит, оно достижимое.

Таким образом, общих слов 1-го и 2-го типа столько же, сколько достижимых слов длины $n-1$, то есть $2^{n-2}$. Следовательно, количество слов длины $n+1$ равно $2^{n-1}+2^{n-1}-2^{n-2}+2^{n-2}=2^n$, что и требовалось доказать.

**Решение 2.** Назовём все слова, которые можно получить из А указанными операциями, допустимыми. Докажем сначала следующий критерий того, что слово допустимо. Надо подсчитать общее число букв А в слове, пусть это $k$, и посмотреть, какая буква стоит в слове на $k$-м месте слева: если там А, то слово допустимо, а если Б — нет (если $k=0$, то слово тоже недопустимо).

Ясно, что все допустимые слова удовлетворяют критерию: изначально он выполнен (одна буква А на первом месте), а далее при каждом приписывании сохраняется (нетрудно проверить).

Обратно, пусть слово удовлетворяет критерию. Удаляя слева буквы А по одной, мы, очевидно, сохраняем критерий, то же верно при удалении справа букв Б по одной. Дойдя так слева до буквы Б, а справа — до А, можем удалить эту пару, сохраняя критерий. Такими операциями можно прийти к одной букве, и это обязательно А, так как для неё критерий должен выполняться.

Решим теперь задачу. Будем считать, что $n$ хотя бы 2 (для $n=1$ задача очевидна). Общее число допустимых слов можно подсчитать так: допустимые с одной А, с двумя А, $\ldots$, с $n$ буквами А.

Рассмотрим допустимые слова с $k$ буквами А, где $0<k<n$. Чтобы их подсчитать, надо зафиксировать на $k$-м месте букву А и расставить на оставшихся местах $n-k$ букв Б, остальное заполнить буквами А.

Но ровно столько же будет недопустимых слов с $n-k$ буквами А, у которых на $(n-k)$-м месте стоит буква Б: комбинаторно их количество вычисляется аналогично.

Суммируя по $k$ от 1 до $n-1$ и добавляя допустимое слово А…А и недопустимое слово Б…Б, получаем все допустимые и все недопустимые слова, причём их количества равны.

**Решение 3.** Для каждого слова, для каждой его буквы подсчитаем разность количества букв Б слева и букв А справа. Легко видеть, что при переходе от буквы к соседней справа эта величина увеличивается на 1, если эти две буквы одинаковые, увеличивается на 2 при переходе от Б к А, не изменяется при переходе от А к Б. Буквы, для которых эта величина равна 0, назовём *центральными*; понятно, что в любом слове их не более двух, при этом слова длины $n$ бывают четырёх типов:

(1) в которых есть центральная А и нет центральной Б;

(2) в которых есть центральная Б и нет центральной А;

(3) в которых есть две центральные буквы, и тогда это рядом стоящие АБ;

(4) в которых нет центральных букв, тогда в слове есть рядом стоящие БА такие, что для Б наша величина равна $-1$.

Поставим слову типа 3 в соответствие слово, получающееся транспозицией его центральных букв, получится слово типа 4. Нетрудно видеть, что это взаимно однозначное соответствие (обратное отображение — смена БА на АБ, где у Б величина равна $-1$).

Рассмотрим слово типа 1, пойдём влево от центральной буквы А, пока не встретим букву Б (или не дойдём до конца слова), выделим все пройденные буквы А (включая центральную), заменим все выделенные буквы А на буквы Б, получится слово типа 2 (центральной Б будет полученная из левой выделенной А), которое назовём соответственным исходному, это соответствие тоже взаимно однозначное (обратное отображение строится аналогично).

Таким образом, слов длины $n$, в которых есть центральная А (слова типа 1 и типа 3), столько же, сколько слов, в которых центральной А нет (слова типа 2 и типа 4). Остаётся показать, что получить можно в точности слова, в которых есть центральная А.

При применении любой операции из условия, для любой уже написанной буквы рассмотренная величина не меняется, поэтому во всех словах, которые можно получить из А, есть центральная буква А. Обратно, индукцией по длине слова легко получить, что если в нём есть центральная буква А, то его можно получить (если слово заканчивается на Б, то эту Б можно выкинуть и применить предположение индукции, иначе, если слово начинается на А — выкинем левую А, а иначе можно выкинуть вместе левую Б и правую А).