Сложный вариант, 10 – 11 классы

1 (5 баллов). *Мудрецам A, B, C, D сообщили, что числа $1, 2, \ldots, 12$ написаны по одному на 12 карточках и что эти карточки будут розданы им по три, причём каждый увидит лишь свои карточки. После раздачи мудрецы по очереди сказали следующее.*
A: «На одной из моих карточек — число 8».
B: «Все числа на моих карточках простые».
C: «А все числа на моих — составные, причём имеют общий простой делитель».
D: «Тогда я знаю, какие карточки у каждого из вас».
Какие карточки у А, если все сказали правду? *(Михаил Евдокимов)*

Ответ: 1, 8 и 9. **Решение.** Простые числа могут быть только у A, B и D. На карточках B — три из пяти возможных простых чисел (2, 3, 5, 7, 11). Остальные два простых числа — у D, иначе он не знал бы, какие именно из простых чисел есть у B, а какие — у A. На карточках C могут быть тройки (4, 6, 10), (4, 6, 12), (4, 10, 12), (6, 10, 12) или (6, 9, 12). Только если у D есть 6 или 12, он может определить, какая именно тройка у C. Итак, у D — два простых числа и одно из чисел 6 и 12, у C соответственно — 4, 6, 10, или 4, 10, 12, у B — три простых числа, у A — числа 1, 8, 9.

2 (7 баллов). *В одной из клеток шахматной доски 10×10 стоит ладья. Переходя каждым ходом в соседнюю по стороне клетку, она обошла все клетки доски, побывав в каждой ровно по одному разу. Докажите, что для каждой главной диагонали доски верно следующее утверждение: в маршруте ладьи есть два последовательных хода, первым из которых она ушла с этой диагонали, а следующим — вернулась на неё. (Главная диагональ ведёт из угла доски в противоположный угол.)* *(Александр Грибалко)*

Первое решение. Зафиксируем диагональ. Так как в маршруте чётное число клеток, крайние клетки маршрута будут разного цвета, поэтому на диагонали не более одной крайней клетки. Ход ладьи соединяет две клетки (направление не важно). Из крайних клеток маршрута выходит один ход, из всех остальных — по два. С диагонали выходит не менее $2 \cdot 10 - 1 = 19$ ходов. Все они ведут на соседние с диагональю клетки, а их только 18. Значит, есть два хода, соединяющих клетку диагонали с одной соседней клеткой. Это и есть искомая пара последовательных ходов.

Второе решение (Валерий Миронов, 11 кл.) На диагонали 10 клеток. Клетки, пройденные между ними, составляют 9 кусков маршрута. Тогда хотя бы 5 из этих 9 кусков должны располагаться с одной стороны от диагонали. У этих 5 кусков маршрута 10 начал/концов, расположенных на диагонали, соседней с главной, а на этой диагонали 9 клеток. Значит, начало и конец одного из кусков маршрута совпадают, что и требовалось.

3 (7 баллов). *На плоскости сидят кузнечик Коля и 2020 его товарищей. Коля собирается совершить прыжок через каждого из остальных кузнечиков (в произвольном порядке) так, что начальная и конечная точка каждого прыжка симметричны относительно перепрыгиваемого кузнечика. Назовём точку финишной, если Коля может в неё попасть после 2020-го прыжка. При каком наибольшем числе N найдётся начальная расстановка кузнечиков, для которой имеется ровно N различных возможных финишных точек?* *(Михаил Святловский)*

Ответ: C_{2020}^{1010}.

Первое решение. *Оценка.* Введём на плоскости систему координат так, чтобы Коля сидел в точке $(0,0)$. Пусть $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\ldots$, $\vec{a}_{2020}$ — радиус-векторы кузнечиков в порядке их перепрыгивания Колей. Нетрудно найти радиус-вектор финишной точки: $2(-\vec{a}_1+\vec{a}_2-\vec{a}_3+\ldots-\vec{a}_{2019}+\vec{a}_{2020})$. Число различных по виду сумм равно C_{2020}^{1010} (числу способов выбрать 1010 слагаемых на нечётных местах).

Пример. Расположим кузнечиков в точках числовой прямой с координатами 0 (у Коли) и $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{2019}$ у остальных. Докажем, что все суммы степеней троек с коэффициентами ± 1 различны. Прибавив к такой сумме постоянную сумму $1+3+3^2+\ldots+3^{2019}$, получим сумму с коэффициентами 0 и 2. Она соответствует 2020-значному троичному числу из нулей и двоек, а все такие числа различны. (На самом деле, почти любое расположение кузнечиков даёт C_{2020}^{1010} финишных точек.)

Второе решение. *Оценка.* Сначала заметим, что если кузнечик перепрыгнет через какую-то точку A, а затем — через какую-то точку B, то в итоге он сдвинется на вектор $2\overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$. Это следует, например, из того, что средняя линия треугольника параллельна основанию и в два раза меньше его (случай, когда кузнечик сидит на прямой AB, можно рассмотреть отдельно).

Каждой финишной точке можно поставить в соответствие последовательность, в которой Коля перепрыгивал своих друзей, чтобы оказаться в этой точке после 2020 прыжков — то есть перестановку чисел от 1 до 2020 (считаем всех кузнечиков, кроме Коли, пронумерованными). Пусть Коля в какой-то момент оказался в точке O и собирается перепрыгнуть кузнечиков, расположенных в точках A, B, C (рассматриваем только 3 последовательных прыжка). Если Коля сделает эти прыжки в порядке ABC, то сначала он сдвинется на вектор $2\overrightarrow{OA}$, а затем за два прыжка сдвинется ещё на вектор $2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$, то есть в итоге за три прыжка сдвинется на вектор $2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$. Если же Коля сделает эти прыжки в порядке CBA, то, аналогично, сдвинется в итоге на вектор $2(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$, то есть попадёт в ту же самую точку, что и в предыдущем случае. Таким образом, в последовательности прыжков Коли можно поменять местами любых двух кузнечиков, стоящих через один, и это не изменит финишной точки. Значит, финишная точка характеризуется не перестановкой чисел от 1 до 2020 (которых $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2020$), а только тем, какие числа в такой перестановке стоят на нечётных местах. Соответственно, различных финишных точек не может быть больше C_{2020}^{1010}.

Пример. См. предыдущее решение.

4 (7 баллов). *При каком наименьшем k среди любых трёх ненулевых действительных чисел можно выбрать такие два числа a и b, что $|a-b| \leqslant k$ или $|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}| \leqslant k$?* *(Максим Дидин)*

Ответ: при $k=\frac{3}{2}$.

Докажем, что для любых трёх ненулевых чисел $a<b<c$ одна из шести разностей $b-a$, $c-b$, $c-a$, $|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}|$, $|\frac{1}{b}-\frac{1}{c}|$, $|\frac{1}{a}-\frac{1}{c}|$ не превосходит $\frac{3}{2}$. Не умаляя общности, хотя бы два числа положительны.

Первый способ. Предположим противное. Заменой всех чисел на обратные к ним можно добиться того, чтобы наименьшее число a было не меньше -1. Тогда среднее число $b>\frac{1}{2}$, а наибольшее $c>2$. При этом $\frac{1}{b}-\frac{1}{c}>\frac{3}{2}$. Значит, $b<2/3<1$ и $a<0$. Получаем систему неравенств

$$-a>\frac{3}{2}-b, \qquad -\frac{1}{a}>\frac{3}{2}-\frac{1}{c}>3-\frac{1}{b}.$$

Перемножив, получим $1 > (\frac{3}{2} - b)(3 - \frac{1}{b})$, откуда $2b > (3-2b)(3b-1)$. Раскрыв скобки и перенеся всё в левую часть, получим $6b^2 - 9b + 3 > 0$. Тогда $(b-1)(2b-1) > 0$, противоречие.

Второй способ. Разберём возможные случаи.

1) $a > 0$. Если $b \leqslant 1$, то $b - a < 1$; если $b > 1$, то $\frac{1}{b} - \frac{1}{c} < 1$.

2) $a < 0$. Можно считать, что $bc \leqslant 1$ (иначе заменим все числа на обратные). Пусть $b - a > \frac{3}{2}$ и $c - b > \frac{3}{2}$. Тогда $b(b + \frac{3}{2}) < bc \leqslant 1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{3}{2})$. Значит, $b < \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{a} < \frac{1}{\frac{3}{2} + b} + \frac{1}{\frac{3}{2} - b} = \frac{3}{\frac{9}{4} - b^2} < \frac{3}{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Улучшить результат нельзя: для чисел $-1, \frac{1}{2}, 2$ все шесть разностей не меньше $3/2$.

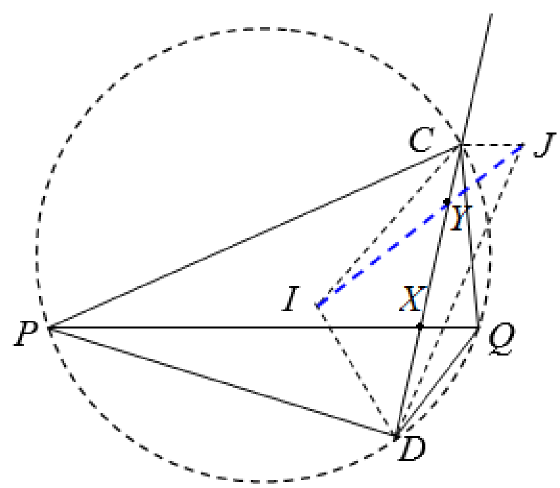
5 (9 баллов). *Внутри параллелограмма $ABCD$ взята такая точка P, что $\angle PDA = \angle PBA$. Пусть ω_1 — вневписанная окружность треугольника PAB, лежащая напротив вершины A. Пусть ω_2 — вписанная окружность треугольника PCD. Докажите, что одна из общих касательных к ω_1 и ω_2 параллельна AD.* *(Иван Фролов)*

Указание. После параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AD}$ задача превращается в такую:

Дан произвольный вписанный четырехугольник $CPDQ$. Тогда одна из общих касательных к окружности, вписанной в треугольник PCD и вневписанной для треугольника CDQ напротив вершины D, параллельна PQ.

Последнее следует из одной из вариаций известного факта о том, что прямая между соответствующими инцентрами (эксцентрами) треугольников PCD, QCD параллельна биссектрисе между CD и PQ (последнее в свою очередь следует из леммы о трезубце).

Решение. Перенеся треугольник PAB на вектор $\overrightarrow{AD}$, получим треугольник QDC. Окружность ω_1 также сдвинется параллельно AD и перейдёт во вневписанную окружность треугольника с центром J, поэтому достаточно доказать, что одна из общих касательных к ω_3 и ω_2 параллельна AD.



По условию $\angle QPD = \angle PDA = \angle PBA = \angle QCD$, значит, точки C, P, D и Q лежат на одной окружности. По известным формулам углов между биссектрисами

$$\angle CID + \angle CJD = \left(\frac{1}{2}\angle CPD + 90^\circ\right) + \left(\frac{1}{2}\angle CQD\right) = 180^\circ,$$

то есть точки C, I, D и J лежат на одной окружности.

Пусть X и Y — точки пересечения CD с PQ и IJ соответственно. Имеем

$$\angle IYD = \angle ICD + \angle CDJ = \frac{1}{2}(\angle PCD + \angle CDQ),$$

как угол между хордами, отсюда, в частности, угол IYD острый, так как

$$\angle PCD + \angle CDQ < \angle PCQ + \angle PDQ = 180^\circ.$$

Тогда точка D', симметричная точке D относительно IJ, лежит по ту же сторону от CD, что и P, и при этом

$$\angle CYD' = 180^\circ - \angle D'YD = 180^\circ - 2\angle IYD = 180^\circ - (\angle PCD + \angle CDQ) = \angle PDC + \angle DCQ = \angle PXC$$

(последнее верно, так как $PCQD$ вписанный). Итак, соответственные углы PXC и CYD' при пересечении прямой CD секущими PQ и $D'Y$ равны, значит $D'Y || PQ || AD$, и прямая $D'Y$ симметрична общей касательной CD относительно линии центров IJ, значит $D'Y$ тоже общая касательная, и она параллельна AD.

6 (10 баллов). *На столе в ряд лежат 20 плюшек с сахаром и 20 с корицей в произвольном порядке. Малыш и Карлсон берут их по очереди, начинает Малыш. За ход можно взять одну плюшку с любого края. Малыш хочет, чтобы ему в итоге досталось по десять плюшек каждого вида, а Карлсон пытается ему помешать. При любом ли начальном расположении плюшек Малыш может достичь своей цели, как бы ни действовал Карлсон?* *(Александр Грибалко)*

Ответ: при любом.

Пронумеруем плюшки в ряду числами от 1 до 40. Заметим, что у Малыша всегда есть возможность взять плюшку с номером любой чётности, а после каждого его хода Карлсон вынужден брать плюшку с номером другой чётности.

Пусть среди плюшек с нечётными номерами не меньше десяти с сахаром (если с корицей, то рассуждения аналогичны). Тогда Малыш начинает с того, что берёт плюшки с нечётными номерами и после каждого хода Карлсона вычисляет такую величину: количество полученных плюшек с сахаром + количество оставшихся на столе плюшек с сахаром с чётными номерами. В начальный момент эта величина не больше 10, а если Малыш будет брать плюшки только с нечётными номерами, то в конце она будет не меньше 10. При этом после каждой пары ходов Малыша и Карлсона эта величина изменяется не более чем на 1. Следовательно, в какой-то момент (возможно, начальный) она будет равна 10. После этого Малыш может брать только плюшки с чётными номерами и в итоге получит ровно 10 плюшек с сахаром, а значит, и 10 плюшек с корицей, что и требуется.

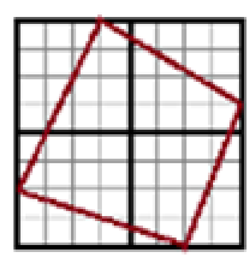
Замечание. Верно более общее утверждение: если в ряд лежит чётное число плюшек, и из них на нечётных местах ровно L с сахаром, а на чётных — ровно R с сахаром, то для всякого k между (нестрого) числами R и L Малыш может действовать так, чтобы взять ровно k плюшек с сахаром.

Для решения исходной задачи достаточно доказать это утверждение, ибо в нашем случае $R + L = 20$ и одно из чисел не меньше 10, а другое не больше 10.

Доказываем индукцией по количеству плюшек. Если их две, то утверждение очевидно. Шаг индукции: покрасим плюшки в шахматном порядке, чтобы нечётные стали белыми; если $k = L$, то Малышу достаточно каждым ходом есть белую плюшку, если $k = R$ — то чёрную. Если же k заключено строго между L и R, то Малыш может сделать первый ход произвольным образом, а далее добиться своего по предположению индукции. В самом деле, не умаляя общности, $L < k < R$, тогда белых плюшек с сахаром останется либо L, либо $L-1$, чёрных — либо R, либо $R-1$, а Малышу далее надо взять либо k, либо $k-1$ плюшку с сахаром, причём $L-1 < L \leqslant k-1 < k \leqslant R-1 < R$.

7. *Клетчатый квадрат 2×2 накрыт двумя треугольниками. Обязательно ли*
а) (6 баллов) хоть одна из четырёх его клеток целиком накрыта одним из этих треугольников;
б) (6 баллов) в один из этих треугольников можно поместить квадрат со стороной 1?
(Александр Шаповалов)

а) Ответ: не обязательно. Впишем в квадрат четырёхугольник без параллельных сторон так, чтобы одна его сторона разбила на части обе левые клетки, вторая — обе верхние, третья — обе правые, четвёртая — обе нижние. Продлим пары противоположных сторон до пересечения. Теперь квадрат покрыт двумя углами, при этом нет клетки, целиком покрытой одним углом. Отрезав лишнее, превратим углы в треугольники. На рисунке — пример искомого четырёхугольника на клетчатой бумаге со вспомогательными клетками размера $0,25 \times 0,25$.



б) Ответ: обязательно. Отметим 9 вершин клеток квадрата 2×2 как на рисунке 1. Треугольники их все накрывают. Возможны три случая распределения вершин квадрата A, B, C, D между треугольниками.

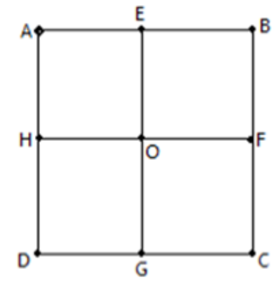


Рис. 1

1) В один накрывающий треугольник T попали три вершины, скажем, A, B, C. Тогда фигура T накрывает весь треугольник AB и, тем более, клетку $BFOE$.

2) В накрывающие треугольники попали пары вершин на противоположных сторонах, скажем, в один A, B, в другой C, D. Тогда первый накрывает и точку E, а второй — точку G. Из трёх точек H, O, F либо две, либо все три попадут в один треугольник. В силу выпуклости среди них есть пара точек на расстоянии 1. Пусть, например, H и O попали вместе с A, E, B. Тогда в этом треугольнике лежит клетка $AEOH$.

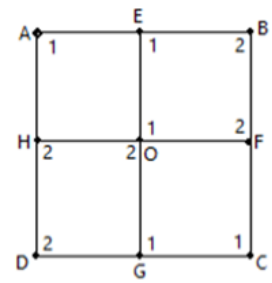


Рис. 2

3) В накрывающие треугольники T_1 и T_2 попали пары противоположных вершин квадрата: скажем, в T_1 — A и C, в T_2 — B и D (рис. 2). Тогда лежащая на пересечении диагоналей точка O попала и в T_1, и в T_2. Будем искать такое распределение точек E, F, G, H по треугольникам, чтобы ни один из треугольников не накрывал целую клетку. Можно считать, что точка E попала в T_1. Тогда H — в T_2 (иначе T_1 накроет клетку $AEOH$), G — в T_1 (иначе T_2 накроет $HOGD$), F — в T_2 (иначе T_1 накроет $OFCG$).

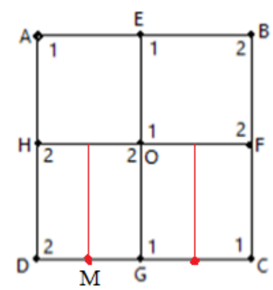


Рис. 3

Рассмотрим теперь середину M отрезка DG (рис. 3). Если она тоже принадлежит T_1, то, сдвинув клетку $DHOG$ на $1/2$ вправо, мы расположим её целиком в T_1 (ведь середина AG, лежащая над M, лежит в T_1, и середина EC лежит в T_1). Значит, можно считать, что M лежит в T_2.

Аналогично, можно считать, что середина N отрезка EB лежит в T_2. Но тогда в T_2 лежит параллелограмм $MHNF$ (рис. 4).

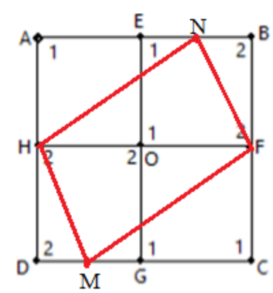


Рис. 4

Осталось доказать, что внутрь $MHNF$ помещается квадрат 1×1. Заметим, что угол NHM тупой (например, потому, что угол MHB прямой). Далее, площадь параллелограмма $MHNF$ равна $4 - 2 \cdot 1,5 - 2 \cdot 0,5 = 2$. Далее, $HN = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Тогда высота HX параллелограмма $MHNF$, опущенная из H на MF, равна $2 : \frac{\sqrt{13}}{2} > 1$. При этом

$$MX = \sqrt{HM^2 - HX^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} - HX^2} < \sqrt{1 + \frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{2}.$$

Тогда $HN - MX > \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2} > 1$, откуда в параллелограмм $MHNF$ помещается квадрат с вершиной H и стороной длины 1, идущей вдоль HN.