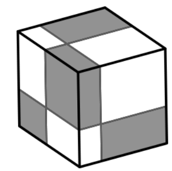
Базовый вариант, 10 – 11 классы

1 (3 балла). *Натуральное число k назовём* интересным, *если произведение первых k простых чисел делится на k (например, произведение первых двух простых чисел — это $2 \cdot 3 = 6$, и 2 — число интересное). Какое наибольшее количество интересных чисел может идти подряд?*

(Борис Френкин)

Ответ: 3 числа. *Оценка.* Число интересно в точности тогда, когда оно свободно от квадратов, то есть каждое простое число появляется не больше одного раза в его разложении на простые. Теперь заметим, что числа, кратные четырём, не свободны от квадратов. *Примеры.* 1, 2, 3; 5, 6, 7.

2 (4 балла). *Дан куб. Три плоскости, параллельные граням, разделили его на 8 параллелепипедов. Их покрасили в шахматном порядке. Объёмы чёрных параллелепипедов оказались равны 1, 6, 8, 12. Найдите объёмы белых параллелепипедов.* *(Олег Смирнов)*



Ответ: 2, 3, 4, 24. Обозначим точку пересечения трёх плоскостей, разрезающих куб, через A. Заметим, что объём любого из 8 полученных параллелепипедов равен произведению трёх его рёбер, выходящих из A. Пусть мы хотим найти объём какого-то белого параллелепипеда α. Перемножим объёмы трёх чёрных параллелепипедов, примыкающих к α. Мы получим произведение длин 9 отрезков: рёбра параллелепипеда α, выходящие из A, будут входить в произведение по два раза, а рёбра противоположного к α чёрного параллелепипеда β, выходящие из A, — по одному разу. Тогда, поделив полученное число на объём β, мы получим квадрат объёма α.

Таким образом, перемножая тройки чисел из условия и деля на четвёртое, мы получим квадраты объёмов белых параллелепипедов; останется извлечь корни.

3 (6 баллов). *В белом клетчатом квадрате* 2021×2021 *требуется закрасить чёрным две клетки. После этого через каждую минуту одновременно закрашиваются чёрным все клетки, которые граничат по стороне хоть с одной из уже закрашенных. Ваня выбрал две начальные клетки так, чтобы весь квадрат закрасился как можно быстрее. Через сколько минут закрасился квадрат?*

(Иван Ященко)

Ответ: через 1515 минут. Занумеруем строки и столбцы числами от -1010 до 1010. Через n минут будут закрашены клетки, до которых хромая ладья (за ход сдвигается на соседнюю клетку) дойдёт от одной из исходных клеток не более чем за n ходов.

Пример. Закрасим клетки $A(-505, 0)$ и $B(505, 0)$. За 1515 ходов ладья дойдёт из B до любой клетки правой половины доски (клетки (x, y) с неотрицательным x): потребуется не более 505 ходов по горизонтали и не более 1010 по вертикали. Аналогично из A ладья дойдёт до любой клетки левой половины.

Оценка. Назовём *расстоянием* между клетками сумму расстояний между ними по вертикали и по горизонтали. Оно равно минимальному числу ходов, за которое хромая ладья сможет дойти из одной клетки в другую (и поэтому удовлетворяет «неравенству треугольника»). Пусть все клетки будут чёрными через 1514 минут. Противоположные угловые клетки не могут быть «обслужены» одной ладьёй: расстояние между ними больше чем $2 \cdot 1514$. Поэтому каждая ладья «обслужила» две угловые клетки с одной стороны, например ладья из клетки A — обе левые: $(-1010, \pm 1010)$, а ладья из клетки B — обе правые: $(1010, \pm 1010)$. Но тогда вторая ладья не успела дойти ни до одной из клеток $(0, \pm 1010)$: расстояние от такой клетки до противоположной угловой клетки равно $3030 > 2 \cdot 1514$. Аналогично и первая ладья не дошла до этих клеток. Противоречие.

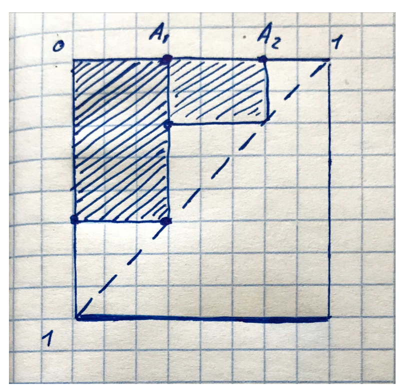
4 (6 баллов). *Дан отрезок AB. Точки X, Y, Z в пространстве выбираются так, чтобы ABX был правильным треугольником, а $ABYZ$ — квадратом. Докажите, что ортоцентры всех получающихся таким образом треугольников XYZ попадают на некоторую фиксированную окружность.* *(Александр Матвеев)*

Пусть $AB = 2$, O и M — середины отрезков AB и YZ соответственно, H — ортоцентр треугольника XYZ. Поскольку треугольник XYZ равнобедренный, точка H лежит на серединном перпендикуляре к стороне YZ, то есть в плоскости π, перпендикулярной AB и проходящей через O. Точка X лежит на окружности ω радиуса $\sqrt{3}$ с центром O, лежащей в π. Пусть прямая XM второй раз пересекает ω в точке W (если XM касается ω, то точки X и W совпадают), а прямая OM пересекает ω в точках P и Q. Тогда $MX \cdot MW = MP \cdot MQ = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$.

Пусть YN — высота треугольника XYZ. Прямая YN пересекает прямую XM в ортоцентре H. Заметим, что прямоугольные треугольники HYM и YXM подобны, так что $MH : MY = MY : MX$. Поскольку $MY = 1$, то $MX \cdot MH = 1$. Поэтому $MH = MW$, а так как обе точки H и W лежат на луче MX, они совпадают. Таким образом, H лежит на ω.

5 (6 баллов). *Дан отрезок $[0; 1]$. За ход разрешается разбить любой из имеющихся отрезков точкой на два новых отрезка и записать на доску произведение длин этих двух новых отрезков. Докажите, что ни в какой момент сумма чисел на доске не превысит $1/2$.* *(Михаил Лукин)*

Первое решение. Построим на нашем отрезке как на стороне квадрат и проведём в нём диагональ, противоположную точке 0 (см. рисунок). Отметим точку A_1, разбив исходный отрезок на два. Произведение длин полученных отрезков равно площади заштрихованного прямоугольника, две противоположные вершины которого — 0 и точка на диагонали, лежащая на проведённом через A_1 перпендикуляре к стороне квадрата. Добавляя новые точки, мы будем добавлять на картинке новые прямоугольники, которые не накладываются друг на друга и все лежат не ниже диагонали. Поэтому их суммарная площадь (равная сумме чисел на доске) меньше половины площади квадрата, то есть $\frac{1}{2}$.



Второе решение. Будем писать на доске удвоенные произведения длин и докажем, что их сумма меньше 1. Заведём вторую доску, на которой будем записывать квадраты всех отрезков разбиения. Вначале на ней записано число 1. В дальнейшем при разбиении отрезка длины a на отрезки длин b

и c на первой доске появится число $2bc$, а на второй число $a^2 = (b+c)^2$ заменится на b^2 и c^2. Таким образом, общая сумма чисел на обеих досках не изменится, то есть останется равной 1. Поскольку сумма чисел на второй доске положительна, сумма чисел на первой всегда будет меньше 1.

Замечание. Усилить неравенство нельзя. Действительно, разделим отрезок пополам, затем — каждый из отрезков пополам, снова каждый из отрезков пополам, и т.д. Сумма чисел на доске будет равна $\frac{1}{4}$, затем $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, затем $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$, и т.д., то есть может быть сколь угодно близка к $\frac{1}{2}$.