

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 25 октября 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 4 1. Для всякого ли выпуклого четырёхугольника найдётся окружность, пересекающая каждую его сторону в двух внутренних точках?

Александр Перепечко

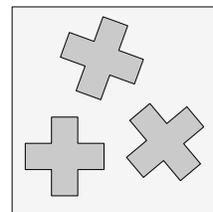
- 7 2. Назовём пару различных натуральных чисел *удачной*, если их среднее арифметическое (полусумма) и среднее геометрическое (квадратный корень из произведения) — натуральные числа. Верно ли, что для каждой удачной пары найдётся другая удачная пара с тем же средним арифметическим? (Пояснение: пары (a, b) и (b, a) считаются одинаковыми.)

Борис Френкин

- 3 3. Петя и Вася играют в такую игру. Каждым ходом Петя называет какое-то целое число, а Вася записывает на доску либо названное число, либо сумму этого числа и всех ранее написанных чисел. Всегда ли Петя сможет добиться того, чтобы в какой-то момент на доске среди написанных чисел было
4 а) хотя бы сто чисел 5?
б) хотя бы сто чисел 10?

Андрей Аржанцев

- 7 4. Пентамино «крест» состоит из пяти квадратиков 1×1 (четыре квадратика примыкают по стороне к пятому). Можно ли из шахматной доски 8×8 вырезать, не обязательно по клеткам, девять таких крестов? (На рисунке показано, как можно вырезать три креста.)



Александр Грибалко

- 8 5. Существуют ли 100 таких натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, что куб одного из них равен сумме кубов остальных?

Михаил Евдокимов

- 10 6. За каждым из двух круглых столиков сидит по n гномов. Каждый дружит только со своими соседями по столику слева и справа. Добрый волшебник хочет рассадить гномов за один круглый стол так, чтобы каждые два соседних гнома дружили между собой. Он имеет возможность подружить $2n$ пар гномов (гномы в паре могут быть как с одного столика, так и с разных), но после этого злой волшебник поссорит между собой n пар гномов из этих $2n$ пар. При каких n добрый волшебник может добиться желаемого, как бы ни действовал злой волшебник?

Михаил Святловский

- 6 7. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ обладает таким свойством: ни из каких трёх его сторон нельзя сложить треугольник. Докажите, что
6 а) один из углов этого четырехугольника не больше 60° ;
6 б) один из углов этого четырехугольника не меньше 120° .

Максим Дидин