СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 25 октября 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
4	1. Даны n натуральных чисел. Боря для каждой пары этих чисел записал на чёрную доску их среднее арифметическое, а на белую доску — их среднее геометрическое, и для каждой пары хотя бы одно из этих двух средних было целым. Докажите, что хотя бы на одной из досок все числа целые. *Борис Френкин*
5	2. Барон Мюнхгаузен придумал теорему: если многочлен $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$ имеет n натуральных корней, то на плоскости найдутся a прямых, у которых ровно b точек пересечения друг с другом. Не ошибается ли барон? *Фёдор Ивлев*
6	3. Окружности α и β с центрами в точках A и B соответственно пересекаются в точках C и D. Отрезок AB пересекает окружности α и β в точках K и L соответственно. Луч DK вторично пересекает окружность β в точке N, а луч DL вторично пересекает окружность α в точке M. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника $KLMN$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC. *Константин Кноп*
7	4. За каждым из двух круглых столиков сидит по n гномов. Каждый дружит только со своими соседями по столику слева и справа. Добрый волшебник хочет рассадить гномов за один круглый стол так, чтобы каждые два соседних гнома дружили между собой. Он имеет возможность подружить $2n$ пар гномов (гномы в паре могут быть как с одного столика, так и с разных), но после этого злой волшебник поссорит между собой n пар гномов из этих $2n$ пар. При каких n добрый волшебник может добиться желаемого, как бы ни действовал злой волшебник? *Михаил Святловский*
7	5. Существует ли прямоугольник, который можно разрезать на 100 прямоугольников, которые все ему подобны, но среди которых нет двух одинаковых? *Михаил Мурашкин*
10	6. Петя и Вася по очереди пишут на доску дроби вида $1/n$, где n — натуральное, начинает Петя. Петя за ход пишет только одну дробь, а Вася за первый ход — одну, за второй ход — две, и так каждым следующим ходом на одну дробь больше. Вася хочет, чтобы после какого-то хода сумма всех дробей на доске была натуральным числом. Сможет ли Петя помешать ему? *Андрей Аржанцев*
12	7. Белая фигура «жук» стоит в угловой клетке доски $1000 \times n$, где n — нечётное натуральное число, большее 2020. В двух ближайших к ней углах доски стоят два чёрных шахматных слона. При каждом ходе жук или переходит на клетку, соседнюю по стороне, или ходит как шахматный конь. Жук хочет достичь противоположного угла доски, не проходя через клетки, занятые или атакованные слоном, и побывав на каждой из остальных клеток ровно по одному разу. Покажите, что количество путей, по которым может пройти жук, не зависит от n. *Николай Белухов*