СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8 – 9 классы

1. [4] Число $2021 = 43 \cdot 47$ составное. Докажите, что если вписать в числе 2021 сколько угодно восьмёрок между 20 и 21, тоже получится составное число.

Михаил Евдокимов

Решение. Разность двух таких чисел, в которых число восьмёрок различается на 1, имеет вид $1880\ldots0$. Но $188 = 47 \cdot 4$, то есть делится на 47, как и 2021. Поэтому, добавляя восьмёрки по одной, мы будем получать числа, делящиеся на 47.

2. [5] В комнате находится несколько детей и куча из 1000 конфет. Дети по очереди подходят к куче. Каждый подошедший делит количество конфет в куче на количество детей в комнате, округляет (если получилось нецелое), забирает полученное число конфет и выходит из комнаты. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди.

Максим Дидин

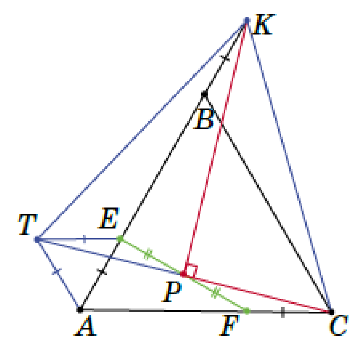
Решение. Деление с остатком кучи конфет на k детей можно представлять себе так: мы раскладываем конфеты на k кучек, которые либо одинаковы (если остаток 0), либо в части кучек конфет на 1 больше, чем в остальных (количество таких куч равно остатку).

Пусть первый ребёнок разложит так конфеты на кучки, расположив кучи слева направо по возрастанию числа конфет в них. Можно считать, что он возьмёт себе правую кучку, если он мальчик, или левую, если он — девочка.

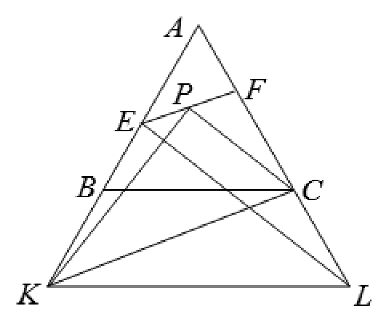
Когда зайдёт следующий ребёнок, конфеты уже будут разложены на кучки, как если бы он сам делил с остатком (ведь и число детей, и число куч уменьшилось на 1), и снова мальчик возьмёт правую кучу, а девочка — левую, и т.д. В итоге мальчики возьмут все правые кучки в количестве, равном числу мальчиков, что не зависит от порядка детей в очереди.

3. [6] Треугольник ABC равносторонний. На сторонах AB и AC выбрали точки E и F, а на продолжении стороны AB — точку K так, что $AE = CF = BK$. Точка P — середина EF. Докажите, что угол KPC прямой.

Владимир Расторгуев



Решение 1. На продолжении отрезка CP за точку P отметим такую точку T, что $CP = PT$. Тогда $FCET$ — параллелограмм, откуда TE равно и параллельно FC. Но тогда треугольники TEK и KBC равны по первому признаку: тупые углы у них равны 120° и соответствующие стороны при этих углах равны. Следовательно, треугольник TKC равнобедренный и его медиана KP является высотой.



Решение 2. Построим равносторонний треугольник AKL. Ясно, что PC — средняя линия треугольника EFL. Треугольники EKL и CAK равны ($KL = AK$, $EK = AC$, $\angle EKL = \angle CAK$). Значит, $CK = EL = 2PC$. Треугольники EAL и CLK также равны, поэтому $\angle ELA = \angle CKL$. Следовательно, $KCP = 60^\circ - \angle PCA + \angle BCK = 60^\circ - \angle ELA + \angle CKL = 60^\circ$ (мы использовали, что $PC \parallel EL$ и $BC \parallel KL$). Но тогда KPC — половина равностороннего треугольника, откуда угол KPC прямой.

4. [7] Путешественник прибыл на остров, где живут 50 аборигенов, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Все аборигены встали в круг, и каждый назвал сначала возраст своего соседа слева, а потом возраст соседа справа. Известно, что каждый рыцарь назвал оба числа верно, а каждый лжец какой-то из возрастов (по своему выбору) увеличил на 1, а другой — уменьшил на 1. Всегда ли путешественник по высказываниям аборигенов сможет определить, кто из них рыцарь, а кто лжец?

Александр Грибалко

Ответ: всегда.

Решение 1. Выберем любого аборигена — будем называть его Петей, — и покажем, как найти его возраст. Мысленно наденем на каждого второго аборигена шапку, начиная с Пети. Занумеруем аборигенов без шапок, идущих за Петей по часовой стрелке: 1, 2, ..., 24, 25.

Заметим, что каждый абориген верно сообщает сумму возрастов своих соседей (если сложить названные аборигеном числа). Сложим числа, названные 1-м, 3-м, ..., 25-м аборигенами без шапок — это будет сумма возрастов всех аборигенов в шапках *плюс* возраст Пети. Сложим числа, названные 2-м, 4-м, ..., 24-м аборигенами без шапок — это будет сумма возрастов всех аборигенов в шапках *минус* возраст Пети. Вычтя из первой суммы вторую и поделив на 2, получим возраст Пети.

Зная возраст любого аборигена, легко узнать, кто его соседи, по их ответам.

Решение 2. Для удобства будем считать, что в круге стоят через одного 25 мужчин и 25 женщин. Покажем, как различить мужчин (женщины определяются аналогично). Заметим, что два высказывания о возрасте одной женщины отличаются на 1 тогда и только тогда, когда ее соседи – рыцарь и лжец. Поэтому достаточно опознать одного мужчину: далее по кругу определяются все остальные.

Разберём два случая.

1) Для одной из женщин высказывания об её возрасте различаются на 2. Тогда оба её соседа – лжецы, и, как сказано выше, все мужчины определяются.

2) Таких женщин нет. Все мужчины разбиваются на группы: внутри такой группы оба соседа каждой женщины говорят об её возрасте одно и то же. Но пока не известно, какие группы состоят из лжецов, а какие – из рыцарей.

Сложив все числа, названные мужчинами, получим удвоенную сумму возрастов женщин. Теперь сложим первые числа, названные мужчинами. Если полученная сумма имеет ту же чётность, что сумма возрастов женщин, то среди мужчин чётное число лжецов, а если не совпадает – нечётное. Поскольку из двух возможных вариантов количество лжецов чётно только в одном, путешественник определит, какой из вариантов правильный.

5. В центре каждой клетки клетчатого прямоугольника M расположена точечная лампочка, изначально все они погашены. За ход разрешается провести любую прямую, не задевающую лампочек, и зажечь все лампочки по какую-то одну сторону от этой прямой, если все они погашены. Каждым ходом должна зажигаться хотя бы одна лампочка. Требуется зажечь все лампочки, сделав как можно больше ходов. Какое максимальное число ходов удастся сделать, если

а) [4] M — квадрат 21×21;

б) [4] M — прямоугольник 20×21?

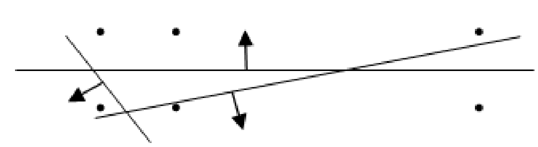
Александр Шаповалов

Ответы: а) 3 хода; **б)** 4 хода.

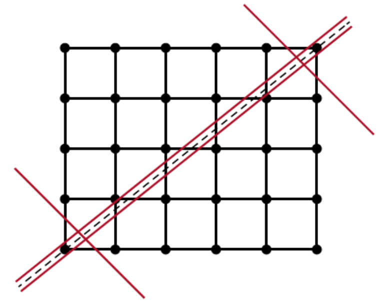
Решение. Вместо исходного прямоугольника M будем рассматривать прямоугольник N с вершинами в угловых лампочках.

Оценки. Заметим, что каждым ходом зажигается хотя бы одна из четырёх угловых лампочек. Следовательно, ходов не больше 4. В п. а) заметим ещё, что мы должны на каком-то ходу зажечь центральную лампочку. Вместе с ней по одну сторону от проведённой прямой окажется хотя бы две угловых лампочки (поскольку прямая, параллельная проведённой и проходящая через центр, делит квадрат N на две симметричные относительно центра части).

Примеры. **а)** Сначала зажигаем всё, кроме нижнего ряда лампочек, затем зажигаем все из оставшихся лампочек, кроме угловой, и наконец зажигаем угловую лампочку. (На рисунке изображены два нижних слоя лампочек, стрелки указывают по какую сторону от прямой зажигаются лампочки.)



б) Прямоугольник N имеет размеры 19×20. На его диагонали нет других лампочек, поскольку 19 и 20 взаимно просты. Проведём первую прямую параллельно диагонали, чуть ниже, чтобы эти две лампочки оказались над ней, а все остальные лампочки остались с той же стороны, что и до этого; зажжём все лампочки ниже этой прямой. Аналогично проведём вторую прямую параллельно диагонали, но чуть выше, и зажжём все лампочки выше этой прямой, как на рисунке. (Для примера мы взяли N размером 4×5 — поменьше, но тоже с взаимно простыми сторонами.) Оставшиеся две угловые лампочки можно зажечь за два хода, отсекая прямой от остальных.



6. [10] В отель ночью приехали 100 туристов. Они знают, что в отеле есть одноместные номера 1, 2, $\ldots$, n, из которых k на ремонте (но неизвестно какие), а остальные свободны. Туристы могут заранее договориться о своих действиях, после чего по очереди уходят заселяться: каждый проверяет номера в любом порядке, находит первый свободный номер не на ремонте и остаётся там ночевать. Но туристы не хотят беспокоить друг друга: нельзя проверять номер, куда уже кто-то заселился. Для каждого k укажите наименьшее n, при котором туристы гарантированно смогут заселиться, не потревожив друг друга.

Фёдор Ивлев

Ответ: $n = 100(m+1)$ при $k = 2m$ и $n = 100(m+1)+1$ при $k = 2m+1$.

Решение. Пусть $k = 2m$ или $k = 2m+1$.

Алгоритм. Мысленно разделим номера на 100 участков по $m+1$ номеров, а в случае нечётного k оставшийся номер объявим запасным. Пусть i-й турист сначала проверяет все номера i-го участка, двигаясь слева направо, потом идёт в запасной номер (если тот есть), а потом проверяет номера $(i+1)$-го участка, но справа налево (если $i = 100$, проверяет 1-й участок). Никакие два туриста не попадут при этом в один номер, так как суммарно на двух их участках (включая запасной номер, если он есть), всего $k+2$ номера.

Оценка. Для того чтобы каждый из 100 туристов мог гарантированно заселиться в номер не на ремонте, он должен с самого начала иметь список из $k+1$ различных номеров, в которые будет заходить. Можно считать, что списки не меняются по ходу заселения других туристов (поскольку никакой информации о них мы не узнаём).

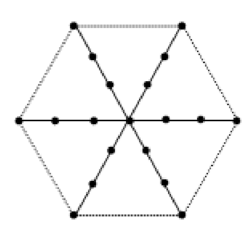
Рассмотрим для каждого туриста первые $m+1$ номеров из его списка. Все эти $100(m+1)$ чисел различны, иначе два туриста с совпавшим числом могут оба попасть в этот номер (если их предыдущие номера, которых суммарно не больше $m + m = 2m$, все на ремонте). Следовательно, $n \geqslant 100(m+1)$.

При чётном k этой оценки достаточно. В случае нечётного k, если у какого-то туриста, скажем, Пети, $(m+2)$-й номер совпадает с каким-то из $100(m+1)$ «первых» номеров, скажем, с Васиным, то когда у Пети первые $m+1$ номеров будут на ремонте, а у Васи — все номера до совпадающего с Петиным (их не более m) будут на ремонте, они попадут в один номер. Значит, все $(m+2)$-е номера отличны от $100(m+1)$ первых (хотя могут совпадать друг с другом), то есть $n \geqslant 100(m+1)+1$.

Замечание. Для чётного числа туристов (а их у нас 100), алгоритм можно описать несколько иначе.

При чётном k мысленно представим план отеля как 50 коридоров, в каждом из которых вдоль одной стены расположены двери $k+2$ номеров. Каждой паре туристов «отдадим» один коридор по которому они двигаются с противоположных концов, проверяя все встреченные комнаты. В сумме эта пара может обнаружить не более k ремонтирующихся номеров, поэтому два свободных номера для них останутся.

При нечётном k представим коридоры отеля как большие диагонали правильного 100-угольника: на каждой диагонали по $k+2$ номера, причём один номер общий для всех коридоров (на рисунке изображена аналогичная конструкция для 6 туристов и $k = 5$). Каждая пара туристов двигается с противоположных концов по своему коридору. Заметим, что если какой-то турист дошел до центрального номера, то он обнаружил $\frac{k+1}{2}$ ремонтирующихся номеров, поэтому никакой другой турист до центрального номера не дойдёт.



7. [12] Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Лягушка прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0. Каждый раз она прыгает либо на p вправо, либо на q влево. Однажды лягушка вернулась в 0. Докажите, что для любого натурального $d < p+q$ найдутся два числа, посещённые лягушкой и отличающиеся ровно на d.

Николай Белухов

Решение 1. Случай $p = q = 1$ очевиден. Иначе p и q различны, пусть $p < q$. Всего лягушка пропрыгала путь, длина которого делится на p и на q, а значит, и на pq, так как p и q взаимно просты. Тогда длина пути равна kpq для некоторого натурального k, и лягушка сделала kq «коротких» прыжков вправо и kp «длинных» прыжков влево.

Известно, что при взаимно простых p и q можно представить d в виде $d = ap - bq$ с целыми a и b. Это равенство, очевидно, сохранится, если одновременно увеличить (или уменьшить) a на q и b на p. Поэтому можно выбрать a натуральным и не превосходящим q. При этом b будет неотрицательным (иначе $d \geqslant p+q$), и так как $a \leqslant q$, то $b < p$ (ведь $d > 0$). Поэтому $a + b < p + q \leqslant k(p + q)$.

Назовём каждую серию из $a + b$ последовательных прыжков лягушки *окном*. Условно считаем, что за последним прыжком лягушки идёт её первый прыжок (как при движении по кругу), поэтому окно может состоять и из нескольких последних и первых прыжков. Тогда всего окон ровно $k(p + q)$ штук.

Надо найти окно, где лягушка сделала ровно a коротких прыжков (и b длинных) — тогда она сдвинется на d за эти $a+b$ прыжков. Такое окно найдётся, если есть окно, где коротких прыжков не менее a, и окно, где их не более a: можно сдвигать первое окно по кругу, пока не дойдём до второго, число коротких прыжков в окне каждый раз меняется максимум на 1, поэтому будет момент, когда оно равно a.

Сложим число коротких прыжков во всех окнах — получим $kq(a+b)$, ведь каждый прыжок учли $a+b$ раз. Окон $k(p + q)$, и в среднем на окно придётся $\frac{kq(a+b)}{k(p+q)}$ коротких прыжков. Это число равно

$$\frac{kq(a + b)}{k(p + q)} = \frac{qa + qb}{p + q} = \frac{pa + qa - d}{p + q} = a - \frac{d}{p + q},$$

что больше $a - 1$ и меньше a. Значит, найдётся окно, где коротких прыжков не менее a, и окно, где их не более a.

Решение 2. Лягушку из условия назовём *старой*. Будем считать, что она пропрыгивает свою последовательность ходов бесконечное число раз по циклу. Посадим на прямую *новую* лягушку в точку d и заставим её прыгать ту же последовательность прыжков, что прыгает старая (тоже в бесконечном цикле).

Множество чисел, посещённых новой лягушкой, получается из множества чисел, посещённых старой, сдвигом на d. Если хотя бы одно число из нового множества совпадет с числом из старого, то обратный сдвиг даст нам искомую пару чисел. Предположим, что этого не произойдёт.

Как и в предыдущем решении, представим число d в виде $ap - bq$ для некоторых неотрицательных a и b. Заставим старую лягушку пропрыгать $a + b$ ходов по её циклу; она окажется в точке $e = xp - yq$, где $x + y = a + b$. Так как $a - x = y - b$, разность координат новой и старой лягушек кратна $p + q$: $d - e = (a - x)p - (b - y)q = (a - x)(p + q)$.

Далее пустим лягушек прыгать одновременно: старую по продолжению исходной траектории, а новую — по сдвинутой. На каждом шаге разность их координат будет либо не меняться (если они прыгают в одну сторону), либо меняться на $p + q$ (если одна прыгает на $+p$, а другая на $-q$). Таким образом, разность всегда будет оставаться кратной $p + q$; при этом она, по предположению, не может становиться нулевой, поэтому она всегда будет сохранять знак.

Пусть лягушки пропрыгали полный цикл и вернулись (новая в d, а старая в e). Количество ходов в цикле обозначим через T. Сумму всех чисел, посещённых новой лягушкой (без учёта начальной позиции), обозначим через S_1, а сумму чисел, посещённых старой, — через S. С одной стороны, числа на соответствующих ходах отличались не менее чем на $p+q$, причём разность всегда имела один и тот же знак, поэтому $|S_1 - S| \geq T(p + q)$. С другой стороны, набор чисел, посещённых новой лягушкой за цикл, отличается от аналогичного набора старой лягушки сдвигом на d, поэтому $|S_1 - S| = Td$ (отметим, что эти наборы могут содержать некоторые числа по несколько раз, если в течение цикла лягушка посещала их неоднократно). Подставляя и сокращая на T, получаем $d \geq p + q$, что противоречит условию задачи.

Решение 3. Как и в решении 2, будем считать, что лягушка прыгает в бесконечном цикле. Также воспользуемся представлением $d = ap - bq$ для неотрицательных a и b, сумму $a + b$ обозначив через r.

Через δ_i обозначим разность между положениями лягушки в момент $i + r$ (то есть через $i + r$ шагов после начала) и в момент i. Так как их разделяет r шагов, то

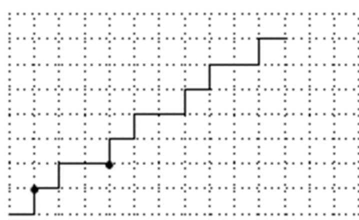
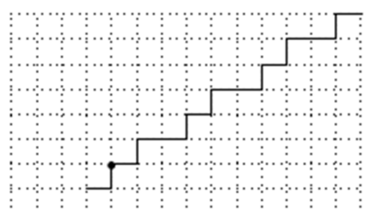
$$\begin{aligned} \delta_i = xp - (r - x)q = ap + (x - a)p - bq - (r - x - b)q = \\ = d + (x - a)p + (x - (r - b))q = d + (x - a)(p + q)\,. \end{aligned}$$

Если δ_i равно d, то мы нашли искомые позиции. Предположим противное, пусть $\delta_i \neq d$ для всех i. Тогда все числа δ_i имеют вид $d + (p + q)k_i$ для целых $k_i \neq 0$.

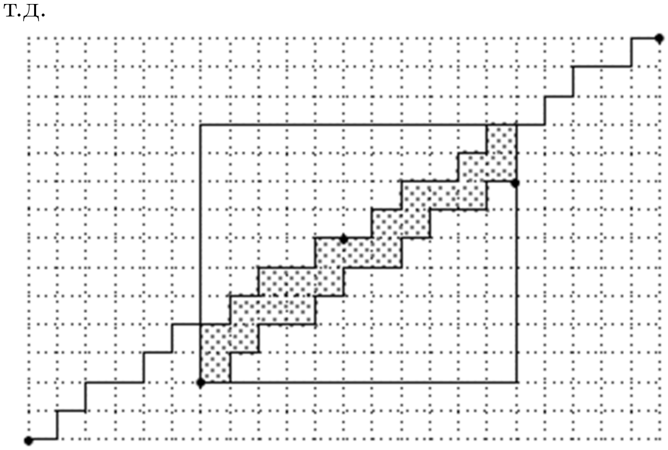
Заметим, что разность между δ_i и δ_{i+1} определяется тем, какими были $(i + 1)$-й и $(i + r + 1)$-й шаги; разобрав случаи, нетрудно убедиться, что она равна $\pm(p + q)$ или 0. Это означает, что числа δ_i либо все меньше 0, либо все больше 0.

Рассмотрим позицию лягушки через rT шагов, где T — количество шагов в её цикле. С одной стороны, она равна сумме $\delta_0 + \delta_r + \delta_{2r} + \ldots + \delta_{r(T-1)}$, которая по доказанному выше должна быть либо отрицательной, либо положительной. С другой стороны, через rT шагов лягушка вернётся на позицию 0. Противоречие.

Решение 4. Поскольку p и q взаимно просты, лягушка может вернуться в исходную точку, только сделав kq прыжков вправо и kp прыжков влево, где k — натуральное число. Изобразим путь P лягушки на целочисленной решетке так: когда лягушка прыгает (на p) вправо будем сдвигаться на 1 вправо, а когда прыгает влево — на 1 вверх. Ниже на рисунке слева изображен такой путь P для $p = 7$, $q = 11$, $k = 1$ и последовательности прыжков $7 - 11 + 7 - 11 + 7 + 7 - 11 + 7 - 11 + 7 + 7 - 11 + 7 - 11 + 7 + 7 - 11 + 7 = 0$.

Как известно, найдутся натуральные a и b, для которых $d = pa - qb$. Сдвинув путь P на a вправо и на b вверх, получим новый путь Q. Выше на рисунке справа изображён путь Q, полученный из пути на левом рисунке для $d = 10$, $a = 3$ и $b = 1$ $(10 = 7 \cdot 3 - 11 \cdot 1)$. Если P и Q имеют общую точку (x, y), то точка $(x - a, y - b)$ также лежит на P. Соответствующие положения лягушки на числовой прямой равны $p(x - a) - q(y - b)$ и $px - qy$, а $(px - qy) - (p(x - a) - q(y - b)) = pa - qb = d$, что и требовалось. То же будет верно, если путь Q имеет общую точку с расширенным путем $\mathbf{P}$, полученным добавлением к P его копий, полученными сдвигами на (kq, kp), $(2kq, 2kp)$ и т.д.



Предположим, что общих точек у путей $\mathbf{P}$ и Q нет, например, Q лежит ниже $\mathbf{P}$. На рисунке справа $\mathbf{P}$ состоит из двух копий P, а Q получен из P сдвигом, соответствующим $d = 20$, $a = 6$, $b = 2$ $(20 = 7 \cdot 6 - 11 \cdot 2)$.

Рассмотрим заштрихованную фигуру F, расположенную «между» $\mathbf{P}$ и Q, и наименьший содержащий её прямоугольник (его размеры $kq \times (kp + l)$, где l — натуральное число). Когда Q совпадает с P, площадь $S(F)$ равна 0. Сдвиг на a вправо увеличил эту площадь на kpa, а сдвиг на b вверх уменьшил её на kqb. Значит, $S(F) = k(pa - qb) = kd$.

Оценим площадь F снизу другим способом. Фигуру F можно разбить на kq вертикальных полосок толщиной в одну клетку. В каждой полоске есть минимум одна клетка (нижняя). Фигуру F пересекают по внутренним отрезкам $kp + l - 1$ горизонтальных линий сетки. В каждой вертикальной полоске клеток хотя-бы на одну больше, чем количество пересекающих её линий, т.к. есть клетка прямо под каждой линией, и клетка выше самой верхней линии. Значит, общая площадь F не менее $kq + kp + l - 1$ клеток, что не меньше $k(p + q)$ клеток. Это противоречит неравенству $d < p + q$.

в каждой вертикальной полоске клеток хотя-бы на одну больше чем количество пересекающих её линий, т.к. есть клетка прямо под каждой линией, и клетка выше самой верхней линии.

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$