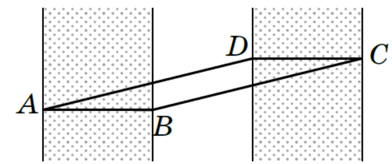
СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8 – 9 классы

1 [4]. *Для всякого ли выпуклого четырёхугольника найдётся окружность, пересекающая каждую его сторону в двух внутренних точках?*

(Александр Перепечко)

Ответ: нет. Возьмём параллелограмм, как на рисунке. Если бы окружность пересекла его стороны AB и CD, то её центр лежал бы на каком-то перпендикуляре к отрезку AB и на каком-то перпендикуляре к отрезку CD. Но такие перпендикуляры не пересекаются (они лежат в непересекащихся полосах).



2 [7]. *Назовём пару различных натуральных чисел* удачной, *если их среднее арифметическое (полусумма) и среднее геометрическое (квадратный корень из произведения) — натуральные числа. Верно ли, что для каждой удачной пары найдётся другая удачная пара с тем же средним арифметическим? (Пояснение: пары (a, b) и (b, a) считаются одинаковыми.)*

(Борис Френкин)

Ответ: да, верно.

Пусть среднее арифметическое удачной пары равно натуральному числу m. Тогда числа из этой пары — одной чётности, и их можно представить в виде $m+n$ и $m-n$, где n тоже натуральное. Так как среднее геометрическое чисел пары — натуральное число, их произведение — полный квадрат: $m^2 - n^2 = k^2$, где k натуральное. Тогда $m^2 - k^2 = n^2$, откуда $m+k$ и $m-k$ — удачная пара с тем же средним арифметическим, причём $k \neq n$ (иначе $m^2 = 2n^2$, что невозможно в силу иррациональности $\sqrt{2}$).

Замечание. Если числа исходной пары — это a, b, то числа новой пары имеют вид $\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{ab}$.

3. *Петя и Вася играют в такую игру. Каждым ходом Петя называет какое-то целое число, а Вася записывает на доску либо названное число, либо сумму этого числа и всех ранее написанных чисел. Всегда ли Петя сможет добиться того, чтобы в какой-то момент на доске среди написанных чисел было*
а) [3] *хотя бы сто чисел 5*;
б) [4] *хотя бы сто чисел 10?*

(Андрей Аржанцев)

а) **Ответ:** не всегда.

Пусть Вася действует так: если Петя называл чётное число, Вася его и записывает, а если Петя назвал нечётное — записывает сумму его и всех чисел на доске. Тогда Вася может записать на доску нечётное число лишь один раз — когда Петя впервые назвал нечётное число. Значит, на доске будет написано не более одного нечётного числа, и тем самым не более одной пятёрки.

б) **Ответ:** всегда.

Как Пете добиться того, чтобы Вася написал на доске число 10:

(1) Если сумма чисел на доске равна 0, то Петя называет число 10, и Вася обязан написать 10.

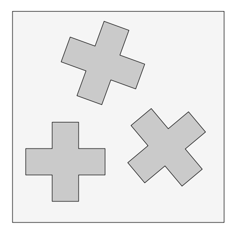
(2) Если сумма чисел на доске равна -5, то Петя называет число 10, и Вася либо пишет число 10, либо пишет число 5 и попадает в ситуацию (1).

(3) Если сумма чисел на доске равна 5, то Петя называет число -10, и Вася либо пишет число -5 и попадает в ситуацию (1), либо пишет число -10 и попадает в ситуацию (2).

(4) Если сумма чисел на доске равна 10, то Петя называет число -15, и Вася либо пишет число -15 и попадает в ситуацию (2), либо пишет число -5 и попадает в ситуацию (3).

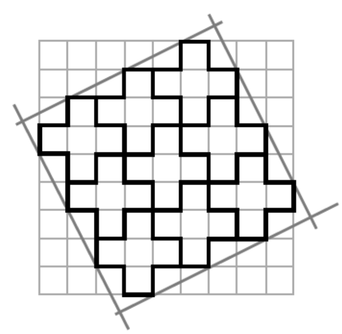
Заметим, что если на доске другая сумма чисел, скажем n, то Петя может назвать число $-n+10$, и Вася либо напишет число 10, либо попадёт в ситуацию (4). Таким образом, имея любой набор чисел на доске, мы можем в итоге заставить Васю написать 10. Значит, мы сможем сделать так, чтобы на доске было 100 десяток.

4. [7] *Пентамино «крест» состоит из пяти квадратиков 1×1 (четыре квадратика примыкают по стороне к пятому). Можно ли из шахматной доски 8×8 вырезать, не обязательно по клеткам, девять таких крестов?*



(Александр Грибалко)

Ответ: можно. Расположим 9 крестов, как на рисунке, и опишем вокруг них квадрат. Этот квадрат состоит из девяти крестов (их суммарная площадь равна 45), восьми половинок прямоугольников 1×2 (их суммарная площадь равна 8) и четырёх «уголков». Каждый уголок целиком лежит в фигуре, состоящей из половинки прямоугольника 1×2 и половинки клетки, то есть его площадь не больше 1,5, откуда все уголки суммарно имеют площадь не больше 6. Тогда площадь квадрата не больше $45 + 8 + 6 = 59$, что меньше 64. Значит, сторона квадрата меньше 8, и его можно уместить на шахматную доску — а с ним и 9 крестов.



Несложно найти и точную длину стороны нашего квадрата — это $\frac{17}{\sqrt{5}}$.

5. [8] *Существуют ли 100 таких натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, что куб одного из них равен сумме кубов остальных?*

(Михаил Евдокимов)

Ответ: существуют.

Первое решение. Заметим, что $3^3+4^3+5^3=6^3$ (проверьте!). Домножив это равенство на 2^3, получим: $6^3+8^3+10^3=12^3$. Заменяя 6^3 на сумму из предыдущего равенства, получаем пять кубов, дающих в сумме куб: $3^3+4^3+5^3+8^3+10^3=12^3$. Домножив новое равенство на 2^3 и снова заменяя 6^3 на сумму трёх кубов, получаем 7 кубов, дающих в сумме куб:

$$3^3+4^3+5^3+8^3+10^3+16^3+20^3=24^3.$$

Действуя далее аналогично, мы сможем получить и 99 кубов, дающих в сумме куб, что и требуется в задаче.

Второе решение. Воспользуемся формулой $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Заметим, что

$$11^3+12^3+\ldots+109^3=(1^3+2^3+\ldots+109^3)-(1^3+2^3+\ldots+10^3)=\left(\frac{109\cdot 110}{2}\right)^2-\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{109^2\cdot 110^2-110^2}{4}=110^2\cdot\frac{109^2-1}{4}=110^2\cdot\frac{110\cdot 108}{4}=110^3\cdot 27=330^3.$$

6. [10] *За каждым из двух круглых столиков сидит по n гномов. Каждый дружит только со своими соседями по столику слева и справа. Добрый волшебник хочет рассадить гномов за один круглый стол так, чтобы каждые два соседних гнома дружили между собой. Он имеет возможность подружить $2n$ пар гномов (гномы в паре могут быть как с одного столика, так и с разных), но после этого злой волшебник поссорит между собой n пар гномов из этих $2n$ пар. При каких n добрый волшебник может добиться желаемого, как бы ни действовал злой волшебник?*

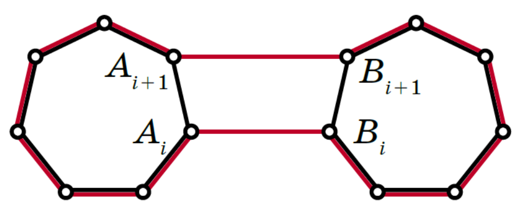
(Михаил Святловский)

Ответ: при всех нечётных $n>1$.

Обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ гномов, сидящих за первым столиком, а через $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — гномов, сидящих за вторым столиком.

Случай нечётного n. Пусть $n=2k-1$. Стратегия доброго волшебника: подружить пары гномов (A_i, B_i) и (A_i, B_{i+1}) (здесь мы считаем, что $B_{2k}=B_1$). Очевидно, что добрый волшебник подружил ровно $2n$ пар гномов. Проверим, что при такой стратегии злой волшебник не сможет помешать доброму.

Действительно, так как злой волшебник ссорит ровно половину указанных пар, то либо среди пар (A_i, B_i) хотя бы k всё ещё дружат, либо среди пар (A_i, B_{i+1}) хотя бы k все еще дружат. Тогда в первом случае найдется i, для которого обе пары гномов (A_i, B_i), (A_{i+1}, B_{i+1}) дружат, и добрый волшебник может рассадить их за стол следующим образом: $A_i, B_i, B_{i-1}, \ldots, B_{i+1}, A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_{i-1}$. Второй случай аналогичен.



Случай чётного n. Приведем стратегию злого волшебника. Пусть добрый волшебник уже както подружил $2n$ пар гномов; построим граф, в котором вершины соответствуют гномам, а ребра — парам гномов, которые подружил добрый волшебник. Покрасим гномов за первым столиком в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, а за вторым — в красный и синий. Так как сумма степеней всех вершин равна $4n$, найдётся цвет, для которого сумма степеней вершин, покрашенных в этот цвет, не превосходит n. Не умаляя общности, это белый цвет, то есть гномы $A_1, A_3, \ldots, A_{n-1}$. Пусть злой волшебник поссорит все пары друзей, в которые входят гномы белого цвета. Тогда единственные оставшиеся друзья любого белого гнома A_{2l+1} — его старые соседи A_{2l} и A_{2l+2}, и очевидно, что добрый волшебник не сможет рассадить всех гномов за один стол требуемым образом.

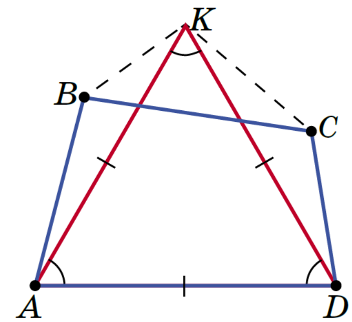
7. *Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ обладает таким свойством: ни из каких трёх его сторон нельзя сложить треугольник. Докажите, что*

а) [6] *один из углов этого четырёхугольника не больше $60°$;*

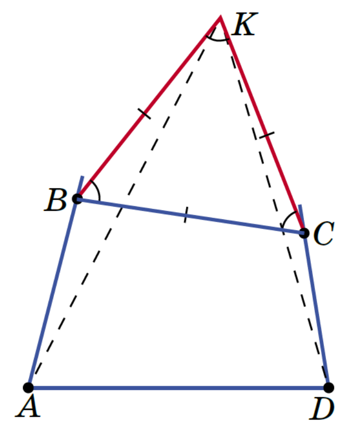
б) [6] *один из углов этого четырёхугольника не меньше $120°$.*

(Максим Дидин)

Первое решение. Пусть AD — наибольшая сторона четырёхугольника $ABCD$. По условию, сумма любых двух других сторон не больше AD.



а) Пусть углы A и D оба больше $60°$. Построим на стороне AD равносторонний треугольник AKD во внутреннюю сторону четырёхугольника. Его стороны AK и DK выходят из вершин A и D внутрь четырёхугольника. Точка K будет лежать вне четырёхугольника (иначе $AB + BC + CD > AK + KD = 2AD$, и тогда какие-то две стороны из AB, BC, CD в сумме больше AD, противоречие). Тогда $\angle BKC > 60°$, откуда в треугольнике BKC сторона BC не самая маленькая. Пусть она больше, например, BK. Тогда $AB + BC > AB + BK > AK = AD$ — противоречие.



б) Пусть каждый из углов B и C меньше $120°$. Продлим лучи AB и DC, дополнительные углы будут больше $60°$. Построим на стороне BC равносторонний треугольник BKC во внешнюю сторону четырёхугольника. Тогда угол AKD будет меньше $60°$ (стороны BK и CK «загибаются внутрь» от лучей), и значит, в треугольнике AKD сторона AD не самая большая. Пусть она меньше, например, чем AK. Тогда получаем: $AD < AK < AB + BK = AB + BC$ — противоречие.

Второе решение. Пусть AD — наибольшая сторона четырёхугольника $ABCD$ и $CD \leq AB$. Поскольку $AD \geq BC + CD > BD$, угол A острый. Аналогично угол D острый. Поэтому проекции P и Q точек B и C на прямую AD лежат на интервале AD.

а) Предположим, что оба угла A и D больше $60°$. Тогда $AD = AP + PQ + QD < \frac{1}{2}AB + BC + \frac{1}{2}CD \leqslant AB + BC$, то есть из сторон AD, AB и BC можно составить треугольник. Противоречие.

б) Заметим, что $PQ \leqslant BC$, $AB + BC \leqslant AD$, откуда $AB \leqslant AD - PQ = AP + QD$. Отметим такие точку X на луче BP и точку Y, что $BX = CQ$, $\overrightarrow{BY} = \overrightarrow{CD}$. Тогда треугольники BXY и CQD равны, $AY \geqslant AP + XY = AP + QD \geqslant AB \geqslant CD = BY$. Поэтому AY — наибольшая сторона треугольника ABY, а ABY — его наибольший угол, и тем самым $\angle ABY \geqslant 60°$. Тогда $\angle A + \angle D = \angle BAP + \angle BYX = \angle BAY + \angle BYA \leqslant 120°$ (использовано очевидное равенство $\angle AYX = \angle YAP$). Поскольку сумма углов четырёхугольника $ABCD$ равна $360°$, то $\angle B + \angle C \geqslant 240°$. Поэтому либо $\angle B \geqslant 120°$, либо $\angle C \geqslant 120°$.

А ещё мы заново решили пункт а): из неравенства $\angle A + \angle D \leqslant 120°$ следует, что хоть один из углов A, D не больше $60°$.