СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

РЕШЕНИЯ ВЕСЕННЕГО ТУРА

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8 – 9 классы

1 [4]. Может ли произведение каких-то 9 последовательных натуральных чисел равняться сумме (может быть, других) 9 последовательных натуральных чисел?

Борис Френкин

Ответ: может.

Решение. Например, $(8!-4)+(8!-3)+\ldots+8!+\ldots+(8!+4)=9\cdot 8!=9!$.

Замечание. См. также задачу 3 базового варианта старших классов.

2 [4]. В треугольнике ABC провели высоты AX и BZ, а также биссектрисы AY и BT. Известно, что углы XAY и ZBT равны. Обязательно ли треугольник ABC равнобедренный?

Жюри

Ответ: не обязательно.

Решение. Например, нетрудно проверить, что в треугольнике с углами $\angle A=40^\circ$, $\angle B=80^\circ$, $\angle C=60^\circ$ оба указанных угла равны 10°, а в треугольнике с углами $\angle A=30^\circ$, $\angle B=90^\circ$, $\angle C=60^\circ$ оба указанных угла равны 15°.

Замечание. Годится любой треугольник с углом C, равным 60°.

3 [4]. У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 1001, 1002, 1004 и 1005 г (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантированно определить, где какая гиря? (Следующее взвешивание выбирается по результатам прошедших.)

Жюри

Ответ: может.

Решение 1. Первые три взвешивания такие: разбиваем гири на две пары способом, который ещё не встречался, и сравниваем их. Разных способов как раз три. Мы получим равенство для пар 1001, 1005 и 1002, 1004. При этом только гиря 1001 в двух других взвешиваниях была в «лёгкой» паре и только гиря 1005 в двух других взвешиваниях была в «тяжёлой» паре — так находим их. Оставшиеся две гири 1002 и 1004 различаем четвёртым взвешиванием.

Решение 2. Сначала положим на чаши по две гири.

1) Одна из чаш перевесила. Тогда гири разбиваются на две пары: лёгкую и тяжёлую. Есть два варианта: лёгкая пара — гири 1001, 1002, тяжелая — 1004, 1005 или лёгкая пара — 1001, 1004, тяжёлая — 1002, 1005. Следующими двумя взвешиваниями упорядочим гири по весу в каждой паре. Четвёртым взвешиванием, сравнив более тяжелую гирю лёгкой пары с более лёгкой гирей тяжёлой пары, узнаем, какой из вариантов имеет место.

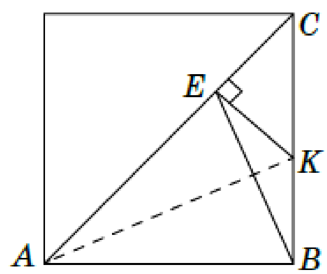
2) Весы в равновесии. Тогда гири разбиваются на две пары равного веса: 1001, 1005 и 1002, 1004. Вторым и третьим взвешиваниями упорядочим гири по весу в каждой паре. Четвёртым взвешиванием, сравнив более лёгкие гири пар, узнаём, какая пара какая.

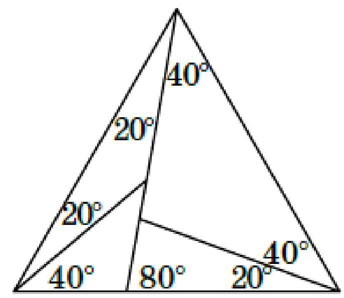
4. а) [3] Можно ли разрезать квадрат на 4 равнобедренных треугольника, среди которых нет равных?
б) [3] А можно ли разрезать равносторонний треугольник на 4 равнобедренных треугольника, среди которых нет равных?

Владимир Расторгуев

Ответы: можно в обоих пунктах.

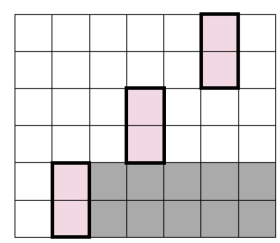
Решение. См. рисунки. На левом рисунке сначала проводим биссектрису AK угла BAC, а затем отражаем точку B относительно AK и получаем точку E.

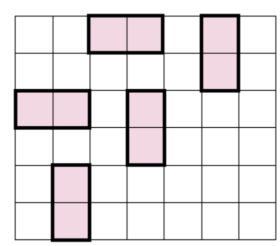




5. На клетчатой доске лежат доминошки, не касаясь даже углами. Каждая доминошка занимает две соседние (по стороне) клетки доски. Нижняя левая и правая верхняя клетки доски свободны. Всегда ли можно пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю, делая ходы только вверх и вправо на соседние по стороне клетки и не наступая на доминошки, если доска имеет размеры
а) [2] 100×101 клеток;
б) [4] 100×100 клеток?

Николай Чернятьев





а) Ответ: не всегда.

Решение. На рисунке справа вверху показано расположение доминошек на доске 6×7, которое не позволяет пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю. Действительно, попасть в (серую) область правее самой нижней доминошки нельзя, поскольку сначала мы должны подняться выше первой доминошки, и тогда мы уже выше серой полосы (а вниз ходить нельзя). Далее, нельзя попасть в аналогичную серую область правее следующей доминошки и т.д. Эта конструкция обобщается на любую доску размера $2n \times (2n+1)$.

Замечание. Для упрощения доказательства можно было бы добавить ещё горизонтальные доминошки над вертикальными, чтобы оставался единственный путь по доске, упирающийся в итоге в последнюю вертикальную доминошку (рисунок справа внизу).

б) Ответ: всегда.

Решение. Начальная и конечная клетки лежат на главной диагонали доски и имеют «координаты» $(1,1)$ и $(100,100)$. Докажем, что в любую свободную клетку этой диагонали можно попасть.

Действительно, пусть мы дошли до клетки (n,n). Если клетка $(n+1,n+1)$ свободна, то хоть одна из клеток $(n,n+1)$ и $(n+1,n)$ не занята и через неё можно пройти на клетку $(n+1,n+1)$.

Если же клетка $(n+1,n+1)$ занята, то из её соседей занята ровно одна клетка, причём по стороне, поэтому один из двух путей из (n,n) в $(n+2,n+2)$ не закрыт.