СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

РЕШЕНИЯ ОСЕННЕГО ТУРА

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8 – 9 классы

1 [3]. *На окружности отмечено 100 точек. Может ли при этом оказаться ровно 1000 прямоугольных треугольников, все вершины которых — отмеченные точки?*

(Сергей Дворянинов)

Ответ: не может.

Треугольник прямоугольный тогда и только тогда, когда некоторые две его вершины — диаметрально противоположные точки его описанной окружности. Каждой паре диаметрально противоположных точек соответствуют ровно 98 прямоугольных треугольников, для разных пар они различны. Поэтому общее количество прямоугольных треугольников делится на 98, но 1000 не делится на 98.

2. *Группа из восьми теннисистов раз в год разыгрывала кубок по олимпийской системе (игроки по жребию делятся на 4 пары; выигравшие делятся по жребию на две пары, играющие в полуфинале; их победители играют финальную партию). Через несколько лет оказалось, что каждый с каждым сыграл ровно один раз. Докажите, что*
а) [2] *каждый побывал в полуфинале более одного раза;*
б) [3] *каждый побывал в финале.*

(Борис Френкин)

По условию каждый сыграл 7 партий, а всего было сыграно $8 \cdot 7 : 2 = 28$ партий. Поскольку каждый год играется 7 партий, кубок разыгрывался 4 раза.

а) Игрок, сыгравший в полуфинале не более одного раза, за 4 года сыграл не более $3+3 \cdot 1 = 6$ партий, что противоречит условию.

б) Всего в четырёх финалах было $2 \cdot 4 = 8$ мест. Если кто-то не играл в финале, то кто-то другой должен был сыграть в финале как минимум дважды. Но тогда он сыграл не меньше $2 \cdot 3+2 \cdot 1 = 8$ партий, что противоречит условию.

3 [5]. *В куче n камней, играют двое. За ход можно взять из кучи количество камней, либо равное простому делителю текущего числа камней в куче, либо равное 1. Выигрывает взявший последний камень. При каких n начинающий может играть так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?*

(Фёдор Ивлев)

Ответ: при n, не кратном 4.

Стратегия: каждый раз оставлять в куче кратное 4 число камней: при $n = 4k + 1$ надо взять один камень, при $n = 4k + 2$ — два камня; при $n = 4k + 3$ надо взять p камней, где p — простой делитель числа n вида $4q + 3$ (такой есть, иначе все простые делители n имеют вид $4m + 1$, а произведение чисел такого вида тоже имеет такой вид и не равно $4k + 3$).

Противник из кучи с кратным 4 числом камней не может взять число камней, кратное 4 (это будет не простое число), поэтому начинающий и дальше может играть по стратегии.

4 [5]. *Дан равносторонний треугольник со стороной d и точка P, расстояния от которой до вершин треугольника равны положительным числам a, b и c. Докажите, что найдётся равносторонний треугольник со стороной a и точка Q, расстояния от которой до вершин этого треугольника равны b, c и d.*

(Александр Эвнин)

Пусть A, B, C — вершины данного треугольника, такие, что $AP = a$, $BP = b$, $CP = c$. Пусть F — образ точки P при повороте вокруг A на $60°$, переводящем C в B. Тогда треугольник APF — равносторонний со стороной a, и отрезок FB является образом отрезка PC при этом повороте, откуда $FB = PC = c$. При этом $AB = d$, $PB = b$, и, значит, треугольник APF вместе с точкой B образуют нужную конфигурацию.

5 [5]. *Директор зоопарка приобрёл восемь слонов с номерами 1, 2, …, 8. Какие у них были массы, он забыл, но запомнил, что масса каждого слона, начиная с третьего, равнялась сумме масс двух предыдущих. Вдруг до директора дошёл слух, что один слон похудел. Как ему за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти этого слона или убедиться, что это всего лишь слух? (Ему известно, что ни один слон не потолстел, а похудеть мог максимум один.)*

(Александр Грибалко)

Мысленно расположим слонов в виде таблицы, как на рисунке. Первым взвешиванием сравниваем друг с другом две первые строки, вторым — два первых столбца. За первое взвешивание мы найдём строку, где должен быть похудевший слон, если он есть, а за второе — столбец. На пересечении этой строки и столбца и будет похудевший слон (если в пересечении окажется пустая клетка, то никто из слонов не похудел).

2	6	1
3	4	5
8	7	