10 – 11 классы

1. [4] В комнате находится несколько детей и куча из 1000 конфет. Дети по очереди подходят к куче. Каждый подошедший делит количество конфет в куче на количество детей в комнате, округляет (если получилось нецелое), забирает полученное число конфет и выходит из комнаты. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди.

Максим Дидин

Решение. Деление с остатком кучи конфет на k детей можно представлять себе так: мы раскладываем конфеты на k кучек, которые либо одинаковы (если остаток 0), либо в части кучек конфет на 1 больше, чем в остальных (количество таких куч равно остатку).

Пусть первый ребёнок разложит так конфеты на кучки, расположив кучи слева направо по возрастанию числа конфет в них. Можно считать, что он возьмёт себе правую кучку, если он мальчик, или левую, если он — девочка.

Когда зайдёт следующий ребёнок, конфеты уже будут разложены на кучки, как если бы он сам делил с остатком (ведь и число детей, и число куч уменьшилось на 1), и снова мальчик возьмёт правую кучу, а девочка — левую, и т.д. В итоге мальчики возьмут все правые кучки в количестве, равном числу мальчиков, что не зависит от порядка детей в очереди.

2. [5] Существует ли такое натуральное n, что для любых вещественных чисел x и y найдутся вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенствам

$$x = a_1 + \ldots + a_n \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}?$$

Артемий Соколов

Ответ: существует.

Решение 1. Докажем, что подходит $n = 6$. Предварительно заметим, что любую пару $(0, y)$ с ненулевым y можно получить так: $0 = \frac{3}{2y} + \frac{3}{2y} - \frac{3}{y}$, $y = \frac{2y}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{y}{3}$. Аналогично можно получить любую пару $(x, 0)$ с ненулевым x. Тогда любую пару (x, y) с отличными от нуля x и y можно получить как «сумму» двух рассмотренных выше пар. Пару $(x, 0)$ можно получить как сумму двух пар $(\frac{x}{2}, 0)$, аналогично можно получить пару $(0, y)$, а пару $(0, 0)$ — как $1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1$.

Решение 2. Докажем, что подходит $n = 4$. Заметим, что если мы зафиксируем положительное число k и рассмотрим все возможные пары положительных чисел a, b с суммой k, то множество значений выражения $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ — это луч $[\frac{4}{k}; +\infty)$ (проверьте это, записав сумму в виде $\frac{1}{a} + \frac{1}{k-a} = \frac{k}{a(k-a)}$).

Тогда для данных x и y выберем положительные суммы $a + b$ и $c + d$ так, что $a + b - c - d = x$ (сами числа a, b, c, d пока не фиксируем).

Поскольку выражения $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c} + \frac{1}{d}$, по сказанному выше, принимают все достаточно большие значения, можно подобрать положительные a, b, c, d так, чтобы разность этих выражений равнялась y.

Решение 3. Докажем, что подходит $n = 4$. Будем искать числа $a_1, \ldots, a_4$ как корни многочлена вида $P(t) = t^4 - xt^3 - ut^2 - yt + 1$ (согласно формулам Виета они удовлетворяют указанным равенствам). Поскольку $P(0) = 1$, для того чтобы многочлен $P(t)$ имел четыре вещественных корня, достаточно, чтобы числа $P(1) = 2-x-u-y$ и $P(-1) = 2+x-u+y$ были отрицательны. Мы этого добьемся, взяв $u > |x+y|+2$.

Замечание. Можно доказать, что $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$ не подходят.

3. [5] Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Окружность ω проходит через точку A, касается прямой BC в точке M и пересекает сторону AB в точке D, а сторону AC — в точке E. Пусть X и Y — середины отрезков BE и CD соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника MXY касается ω.

Алексей Доледенок

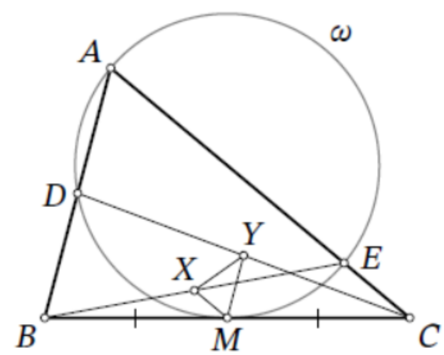
Решение. Заметим, что MX и MY — средние линии треугольников CBE и BCD соответственно. По условию

$$BD \cdot BA = BM^2 = CM^2 = CE \cdot CA,$$

откуда

$$MX : MY = CE : BD = BA : CA.$$

Поскольку $MX || AC$ и $MY || AB$, треугольники MXY и ABC подобны. Значит, $\angle MXY = \angle B = \angle YMC$. По теореме об угле между касательной и хордой сторона BC касается описанной окружности треугольника MXY, откуда следует утверждение задачи.



4. [8] В ряд лежат $100N$ бутербродов с колбасой. Дядя Фёдор и кот Матроскин играют в игру. Дядя Фёдор за одно действие съедает один из крайних бутербродов. Кот Матроскин за одно действие может стянуть колбасу с одного бутерброда (а может ничего не делать). Дядя Фёдор каждый ход делает по 100 действий подряд, а кот Матроскин делает только 1 действие; дядя Фёдор ходит первым, кот Матроскин вторым, далее ходы чередуются. Дядя Фёдор выигрывает, если последний съеденный им бутерброд был с колбасой. Верно ли, что при каждом натуральном N он сможет выиграть независимо от ходов кота Матроскина?

Иван Митрофанов

Решение. Докажем, что при $N = 3^{100}$ выиграет кот Матроскин. Для этого достаточно, чтобы на последнем шаге дяди Фёдора все оставшиеся 100 бутербродов оказались без колбасы.

Пронумеруем бутерброды по порядку. Стратегию кота Матроскина разделим на несколько стадий. Сначала покажем, что он может действовать так, чтобы к моменту, когда останется треть от исходного количества бутербродов, все бутерброды, номер которых даёт остаток 1 при делении на 100, были без колбасы.

Отметим в каждой сотне бутербродов тот бутерброд, номер которого даёт остаток 1 при делении на 100. Пусть за первые 3^{99} ходов кот Матроскин стянет колбасу с каждого отмеченного бутерброда среди центральной трети бутербродов. Так как Дядя Фёдор за это время съедает $3^{99} \cdot 100$ бутербродов, никакие бутерброды среди центральной трети съедены не будут. Следующие 3^{99} ходов кот Матроскин будет забирать колбасу с произвольного отмеченного бутерброда, а если отмеченных бутербродов с колбасой не останется — ничего не делать. Так как за один ход дядя Фёдор съедает не более одного отмеченного бутерброда (см. замечание 1), то ещё через 3^{99} ходов все оставшиеся отмеченные бутерброды будут без колбасы.

На следующей стадии своей стратегии кот Матроскин аналогичным образом добьётся того, чтобы все бутерброды, номер которых даёт остаток 2 при делении на 100, оказались без колбасы; при этом количество бутербродов снова уменьшится в 3 раза. На каждой следующей стадии он будет освобождать от колбасы очередной остаток от деления на 100; через сто стадий, когда останется ровно 100 бутербродов, они все будут без колбасы.

Замечание 1. Каждым ходом дядя Фёдор будет съедать бутерброды с номерами, дающими различные остатки от деления на 100, даже если съедает их с двух сторон. Это можно понять, заметив, что до его хода количества бутербродов для каждого остатка одинаковы, так как общее их количество кратно 100; и после его хода ситуация такая же.

Замечание 2. Можно уточнить стратегию кота Матроскина, показав, что при $N = 2^{100}$ он тоже выигрывает; на каждой стадии количество бутербродов при этом будет уменьшаться в 2 раза. Для этого ему нужно стягивать колбасу только с тех бутербродов (с номерами, дающими данный остаток от деления на 100), до которых дядя Фёдор на данной стадии гарантированно не доберётся. Нетрудно понять, что такой бутерброд действительно всегда найдётся.

А вот при $N = 2^{100} - 1$ уже выигрывает дядя Фёдор. Действительно, первыми $2^{99} - 1$ ходами он съест любые $2^{99}-1$ сотен бутербродов; за это время усилиями соперника появится не более $2^{99}-1$ бутербродов без колбасы. Далее, если перед дядей Фёдором лежит 2^k сотен бутербродов, из которых не более $(100-k)\cdot 2^k-1$ без колбасы, то при $k > 0$ он может съесть ту половину ряда (правую или левую), в которой бутербродов без колбасы больше. Тогда их в ряду останется не более $(100-k)\cdot 2^{k-1}-1$ плюс, благодаря коту Матроскину, не более 2^{k-1} новых — всего не более $(100-k+1)\cdot 2^{k-1}-1$. Продолжая так и далее, при $k = 0$ дядя Фёдор получит сто бутербродов, из которых не более 99 будут без колбасы.

5. [8] В отель ночью приехали 100 туристов. Они знают, что в отеле есть одноместные номера 1, 2, ..., n, из которых k на ремонте (но неизвестно какие), а остальные свободны. Туристы могут заранее договориться о своих действиях, после чего по очереди уходят заселяться: каждый проверяет номера в любом порядке, находит первый свободный номер не на ремонте и остаётся там ночевать. Но туристы не хотят беспокоить друг друга: нельзя проверять номер, куда уже кто-то заселился. Для каждого k укажите наименьшее n, при котором туристы гарантированно смогут заселиться, не потревожив друг друга.

Фёдор Ивлев

Ответ: $n = 100(m+1)$ при $k = 2m$ и $n = 100(m+1)+1$ при $k = 2m+1$.

Решение. Пусть $k = 2m$ или $k = 2m+1$.

Алгоритм. Мысленно разделим номера на 100 участков по $m+1$ номеров, а в случае нечётного k оставшийся номер объявим запасным. Пусть i-й турист сначала проверяет все номера i-го участка, двигаясь слева направо, потом идёт в запасной номер (если тот есть), а потом проверяет номера $(i+1)$-го участка, но справа налево (если $i = 100$, проверяет 1-й участок). Никакие два туриста не попадут при этом в один номер, так как суммарно на двух их участках (включая запасной номер, если он есть), всего $k+2$ номера.

Оценка. Для того чтобы каждый из 100 туристов мог гарантированно заселиться в номер не на ремонте, он должен с самого начала иметь список из $k+1$ различных номеров, в которые будет заходить. Можно считать, что списки не меняются по ходу заселения других туристов (поскольку никакой информации о них мы не узнаём).

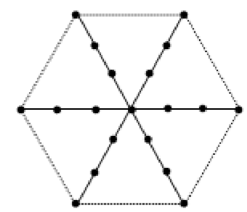
Рассмотрим для каждого туриста первые $m+1$ номеров из его списка. Все эти $100(m+1)$ чисел различны, иначе два туриста с совпавшим числом могут оба попасть в этот номер (если их предыдущие номера, которых суммарно не больше $m+m=2m$, все на ремонте). Следовательно, $n \geqslant 100(m+1)$.

При чётном k этой оценки достаточно. В случае нечётного k, если у какого-то туриста, скажем, Пети, $(m+2)$-й номер совпадает с каким-то из $100(m+1)$ «первых» номеров, скажем, с Васиным, то когда у Пети первые $m+1$ номеров будут на ремонте, а у Васи — все номера до совпадающего с Петиным (их не более m) будут на ремонте, они попадут в один номер. Значит, все $(m+2)$-е номера отличны от $100(m+1)$ первых (хотя могут совпадать друг с другом), то есть $n \geqslant 100(m+1)+1$.

Замечание. Для чётного числа туристов (а их у нас 100), алгоритм можно описать несколько иначе.

При чётном k мысленно представим план отеля как 50 коридоров, в каждом из которых вдоль одной стены расположены двери $k+2$ номеров. Каждой паре туристов «отдадим» один коридор по которому они двигаются с противоположных концов, проверяя все встреченные комнаты. В сумме эта пара может обнаружить не более k ремонтирующихся номеров, поэтому два свободных номера для них останутся.

При нечётном k представим коридоры отеля как большие диагонали правильного 100-угольника: на каждой диагонали по $k+2$ номера, причём один номер общий для всех коридоров (на рисунке изображена аналогичная конструкция для 6 туристов и $k=5$). Каждая пара туристов двигается с противоположных концов по своему коридору. Заметим, что если какой-то турист дошел до центрального номера, то он обнаружил $\frac{k+1}{2}$ ремонтирующихся номеров, поэтому никакой другой турист до центрального номера не дойдёт.



6. [10] Найдите хоть одно вещественное число A со свойством: для любого натурального n расстояние от верхней целой части числа A^n до ближайшего квадрата целого числа равно 2. (Верхняя целая часть числа x — наименьшее целое число, не меньшее x.)

Дмитрий Креков

Решение. Рассмотрим любое квадратное уравнение с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, у которого два положительных корня, произведение которых равно 1. Подойдёт, например, уравнение x^2-4x+1, его корни — это $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$. Заметим, что сумма и произведение этих корней — целые, а тогда и сумма $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ — целая при любом натуральном n (это нетрудно доказать по индукции или просто раскрыв скобки: слагаемые с $\sqrt{3}$ либо входят в чётной степени, либо взаимно уничтожаются).

Тогда $((2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n)^2$ — точный квадрат, и он равен $(2+\sqrt{3})^{2n}+2+(2-\sqrt{3})^{2n}$ (так как произведение корней равно 1), то есть отстоит на 2 от числа $(2+\sqrt{3})^{2n}+(2-\sqrt{3})^{2n}$, которое, в свою очередь, есть верхняя целая часть числа $(2+\sqrt{3})^{2n}$ (поскольку второй корень положителен и меньше 1).

Но тогда число $A=(2+\sqrt{3})^2$ — искомое.

Коментарий. Несложно видеть, что в качестве t можно взять любое число, являющееся бóльшим корнем многочлена вида $x^2-nx+1=0$, где n — натуральное число, не меньшее 3. Действительно, как и в решении выше, сумма корней $t^n+\frac{1}{t^n}$ этого многочлена оказывается целой, откуда для $A=t^2$ следует утверждение задачи.

В этом решении мы увидели, что для взятых нами чисел t расстояние от степени t^n до ближайшего целого стремится к нулю с ростом t. На самом деле, чисел, степени которых становятся всё ближе и ближе к целым числам, больше (но про остальные нельзя сказать, что они подходят для решения данной задачи!).

А именно, пусть $P(x)$ — приведенный многочлен с целыми коэффициентами, у которого все корни (в том числе комплексные), кроме одного, по модулю меньше 1. Тогда этот корень x_1 вещественный, и расстояние от x_1^n до ближайшего целого числа стремится к 0 с ростом n. Это следует из того, что сумма n-х степеней всех корней многочлена $P(x)$ целочисленно выражается через его коэффициенты, и потому является целой. А степени всех остальных корней стремятся к 0 — как раз потому, что они по модулю меньше 1. Это рассуждение можно прочитать в статье А. Егорова «Числа Пизо» (журнал ««Квант», номера 5 и 6 за 2005 год); см. также проект «Дробные части степеней» на XII Летней конференции Турнира городов.

Такие числа — корни приведённого многочлена с целыми коэффициентами, у которого все остальные корни по модулю меньше 1, — называются *числами Пизо* или *числами Пизо—Виджаярагхавана*. Они представляют интерес в связи с задачами диофантовой аппроксимации и изучались в работах Туэ, Харди, Пизо (см., например, книгу: Дж. В. С. Касселс. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961. [5, глава VIII]).

Свое название эти числа получили после публикации Шарля Пизо, который в своей диссертации открыл много замечательных свойств этих чисел.

7. Дано целое $n > 2$. На сфере радиуса 1 требуется расположить n попарно не пересекающихся дуг больших окружностей, все дуги равной длины α. Докажите, что а) [6] при любом $\alpha < \pi + \frac{2\pi}{n}$ это возможно; б) [7] при любом $\alpha > \pi + \frac{2\pi}{n}$ это невозможно.

Илья Богданов

Решение. а) Пусть вертикальная прямая ℓ проходит через центр сферы O. Пусть две параллельных горизонтальных плоскости высекают на сфере две равных (не больших!) окружности γ_+ и γ_-. Тогда существует большая окружность Ω_0, касающаяся γ_+ и γ_- в (диаметрально противоположных) точках P_0 и M_0 соответственно. Повернув Ω_0 на угол $\frac{2\pi k}{n}$ вокруг ℓ, получим большую окружность Ω_k, также касающуюся двух окружностей в точках P_k и M_k соответственно.

Рассмотрим одну дугу P_0M_0 окружности Ω_0, а также дуги P_kM_k, полученные из неё поворотами. Все эти дуги не пересекаются, поскольку любая горизонтальная плоскость пересекает эти дуги в вершинах правильного n-угольника. Более того, каждую из этих дуг P_kM_k можно расширить до ближайших к ней (но не лежащих на ней) точек пересечения Ω_k с другими окружностями Ω_i. Заметим, что точки пересечения Ω_k и Ω_i лежат в (вертикальной) плоскости, симметрия относительно которой меняет эти окружности местами (эта плоскость содержит, например, биссектрису угла P_iOP_k). Отсюда легко видеть, что ближайшими к нашей дуге будут точки пересечения с Ω_{k-1} и с Ω_{k+1}, и каждую дугу P_kM_k можно расширить до дуги между этими точками (не включающей концы).

Если теперь плоскости, высекающие γ_+ и γ_-, взять близкими к центру сферы, то точки пересечения Ω_k и Ω_{k-1} будут (из симметрии) близки к серединам дуг P_kP_{k-1} и M_kM_{k-1}. Поэтому длины полученных дуг можно сделать сколь угодно близкими к $\pi + \frac{2\pi}{n}$, что и требовалось.

б) Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — попарно не пересекающиеся дуги больших окружностей с длинами $\pi + \alpha_1$, $\pi + \alpha_2, \ldots, \pi + \alpha_n$ при положительных α_i; мы считаем, что они содержат свои концы. Мы докажем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 2\pi,$$

откуда и следует требуемое.

В дальнейшем под *полюсом* полусферы мы понимаем точку этой полусферы, наиболее удалённую от её границы.

Обозначим через B_i дугу большой окружности, дополнительную к A_i (её длина равна $\pi - \alpha_i$). Рассмотрим все (открытые) полусферы, содержащие B_i; пусть X_i и Y_i — концы B_i (мы считаем, что они принадлежат B_i). Полусфера содержит B_i тогда и только тогда, когда она содержит X_i и Y_i, то есть когда её полюс лежит в открытых полусферах с полюсами X_i и Y_i. Значит, множество $\mathcal{S}_i$ полюсов таких полусфер — это пересечение этих двух полусфер, то есть сферический «ломтик» раствора α_i; его площадь равна $2\alpha_i$.

Докажем теперь, что множества $\mathcal{S}_i$ попарно не пересекаются; поскольку площадь сферы равна 4π, отсюда вытекает требуемое неравенство. Предположим, что некоторая точка Z лежит в $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$; тогда полусфера с полюсом Z содержит B_1 и B_2, а значит, дополнительная к ней (замкнутая) полусфера $\mathcal{H}$ пересекает A_1 и A_2 по целым полуокружностям (а не их частям). Но любые две таких полуокружности на полусфере $\mathcal{H}$ пересекаются (ибо концы любой — диаметрально противоположные точки на границе полусферы). Это противоречит нашему предположению.

Замечание. Для любых положительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, сумма которых меньше 2π, на сфере можно расположить попарно не пересекающиеся дуги длин $\pi + \alpha_i$ тем же методом, что и в решении пункта а).