10 – 11 классы

1. [4] *Даны n натуральных чисел. Боря для каждой пары этих чисел записал на чёрную доску их среднее арифметическое, а на белую доску — их среднее геометрическое, и для каждой пары хотя бы одно из этих двух средних было целым. Докажите, что хотя бы на одной из досок все числа целые.*

(Борис Френкин)

Пусть на чёрной доске не все числа целые. Тогда среди исходных чисел есть чётные и нечётные. Пусть a — любое из чётных исходных чисел, b — любое из нечётных. По условию их среднее геометрическое — целое число, то есть их произведение — полный квадрат. Если взять любые два чётных исходных числа a_1 и a_2, то тогда $a_1 b$ и $a_2 b$ — полные квадраты, откуда $a_1 a_2 b^2$ — полный квадрат, а значит, и $a_1 a_2$ — полный квадрат. Аналогично, произведение любых двух нечётных исходных чисел — полный квадрат. Но тогда на белой доске все числа целые.

2. [5] *Барон Мюнхгаузен придумал теорему: если многочлен $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$ имеет n натуральных корней, то на плоскости найдутся a прямых, у которых ровно b точек пересечения друг с другом. Не ошибается ли барон?*

(Фёдор Ивлев)

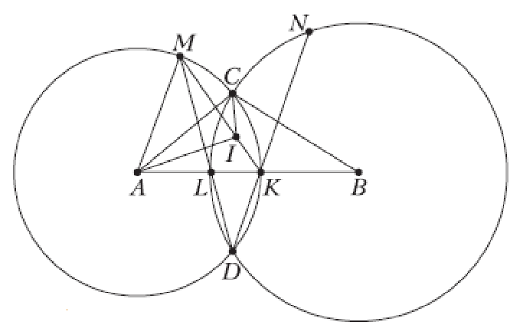
Ответ: не ошибается. Пусть корни многочлена из условия — числа $x_1, \ldots, x_n$. Выберем n различных направлений на плоскости и возьмём x_1 прямых первого направления, x_2 — второго, $\ldots$, x_n — n-го направления.

Тогда, по формулам Виета, число прямых $x_1 + \ldots + x_n$ будет равняться a, а число их точек пересечения между собой будет равняться b, если только никакие три прямые не пересекутся в одной точке. Этого можно добиться, проводя прямые последовательно: очередную прямую нужного направления выбираем так, чтобы она не задевала уже имеющиеся точки пересечения (их на каждом шаге конечное число).

3. [6] *Окружности α и β с центрами в точках A и B соответственно пересекаются в точках C и D. Отрезок AB пересекает окружности α и β в точках K и L соответственно. Луч DK вторично пересекает окружность β в точке N, а луч DL вторично пересекает окружность α в точке M. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника $KLMN$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.*

(Константин Кноп)

Достаточно доказать, что прямая KM проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC (для прямой LN доказательство аналогично). Обозначим через I центр описанной окружности треугольника CKL. Пусть $\angle CML = \varphi$. Тогда $\angle CAK = \overset{\frown}{CK} = \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{CD} = \angle CMD = \varphi$ и $\angle CIL = 2\angle CKA = 180^\circ - \angle CAK = 180^\circ - \varphi$, откуда точки M, A, L, I, C лежат на одной окружности. Значит, I — середина дуги $\overset{\frown}{CL}$, откуда AI — биссектриса угла BAC. Аналогично BI — биссектриса угла ABC, следовательно, I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Так как I — середина дуги $\overset{\frown}{CL}$, а K — середина дуги $\overset{\frown}{CD}$, точки I и K лежат на биссектрисе угла CMD, что и требовалось.



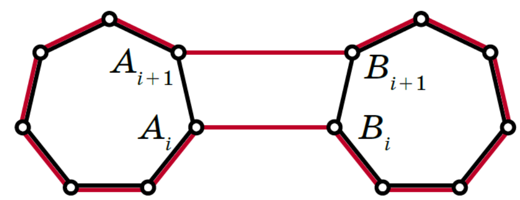
4. [7] *За каждым из двух круглых столиков сидит по n гномов. Каждый дружит только со своими соседями по столику слева и справа. Добрый волшебник хочет рассадить гномов за один круглый стол так, чтобы каждые два соседних гнома дружили между собой. Он имеет возможность подружить $2n$ пар гномов (гномы в паре могут быть как с одного столика, так и с разных), но после этого злой волшебник поссорит между собой n пар гномов из этих $2n$ пар. При каких n добрый волшебник может добиться желаемого, как бы ни действовал злой волшебник?*

(Михаил Святловский)

Ответ: при всех нечётных $n > 1$.

Обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ гномов, сидящих за первым столиком, а через $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — гномов, сидящих за вторым столиком.

Случай нечётного n. Пусть $n = 2k-1$. Стратегия доброго волшебника: подружить пары гномов (A_i, B_i) и (A_i, B_{i+1}) (здесь мы считаем, что $B_{2k} = B_1$). Очевидно, что добрый волшебник подружил ровно $2n$ пар гномов. Проверим, что при такой стратегии злой волшебник не сможет помешать доброму.



Действительно, так как злой волшебник ссорит ровно половину указанных пар, то либо среди пар (A_i, B_i) хотя бы k всё ещё дружат, либо среди пар (A_i, B_{i+1}) хотя бы k все еще дружат. Тогда в первом случае найдется i, для которого обе пары гномов (A_i, B_i), (A_{i+1}, B_{i+1}) дружат, и добрый волшебник может рассадить их за стол следующим образом: $A_i, B_i, B_{i-1}, \ldots, B_{i+1}, A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_{i-1}$. Второй случай аналогичен.

Случай чётного n. Приведем стратегию злого волшебника. Пусть добрый волшебник уже как-то подружил $2n$ пар гномов; построим граф, в котором вершины соответствуют гномам, а ребра — парам гномов, которые подружил добрый волшебник. Покрасим гномов за первым столиком в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, а за вторым — в красный и синий. Так как сумма степеней всех вершин равна $4n$, найдётся цвет, для которого сумма степеней вершин, покрашенных в этот цвет, не превосходит n. Не умаляя общности, это белый цвет, то есть гномы $A_1, A_3, \ldots, A_{n-1}$. Пусть злой волшебник поссорит все пары друзей, в которые входят гномы белого цвета. Тогда единственные оставшиеся друзья любого белого гнома A_{2l+1} — его старые соседи A_{2l} и A_{2l+2}, и очевидно, что добрый волшебник не сможет рассадить всех гномов за один стол требуемым образом.

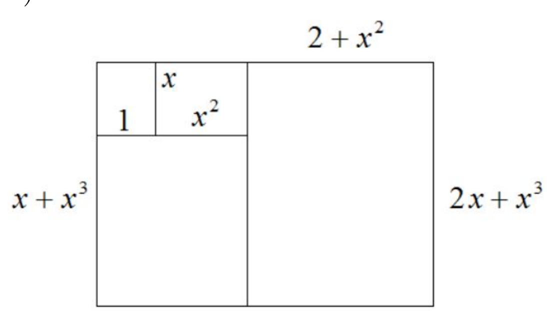
5. [7] *Существует ли прямоугольник, который можно разрезать на 100 прямоугольников, которые все ему подобны, но среди которых нет двух одинаковых?*

(Михаил Мурашкин)

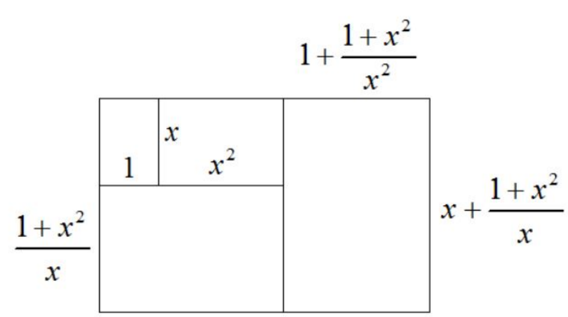
Ответ: да, существует.

Для начала покажем, что существует прямоугольник, который можно разрезать на 4 подобных ему прямоугольника разного размера. На приведенных ниже рисунках показано, что для произвольного x существует прямоугольник, который можно разрезать на 4 прямоугольника с отношением сторон, равным x (два способа):

1)



2)



В первом случае все 4 прямоугольника будут подобны исходному, если $1+x^2+2+x^2 = x(2x+x^3)$, откуда $x = \sqrt[4]{3}$. При этом, как несложно проверить, они имеют разный размер. Во втором случае все 4 прямоугольника будут подобны исходному, если $1 + x^2 + 1 + \frac{1+x^2}{x^2} = x(x + \frac{1+x^2}{x})$, откуда $x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$. При этом они, опять же, имеют разный размер.

Теперь перейдём к доказательству основного факта. Возьмём, для определённости, прямоугольник с отношением сторон $\sqrt[4]{3}$ и разобьём его на 4 прямоугольника указанным способом. Выберем меньший из них и разобьём таким же способом, и т.д. После каждого разбиения все прямоугольники имеют разный размер, так как мы разбиваем наименьший. После 33 разбиений мы получим 100 прямоугольников, что и требовалось.

Замечание. Как известно, существует разрезание квадрата как на 25, так и на 26 различных квадратов (см. ru.wikipedia.org/wiki/Квадрирование квадрата). Проведём разрезание на 25 квадратов, потом разрежем меньший из них на 26 квадратов. Получится разрезание на 50 квадратов. Повторив такую операцию еще дважды, получим разрезание квадрата на 100 различных квадратов.

6. [10] *Петя и Вася по очереди пишут на доску дроби вида $1/n$, где n — натуральное, начинает Петя. Петя за ход пишет только одну дробь, а Вася за первый ход — одну, за второй ход — две, и так каждым следующим ходом на одну дробь больше. Вася хочет, чтобы после какого-то хода сумма всех дробей на доске была натуральным числом. Сможет ли Петя помешать ему?*

(Андрей Аржанцев)

Ответ: сможет.

Лемма. Любое число a можно представить в виде суммы k дробей вида $\frac{1}{n}$ конечным числом способов (если вообще можно представить).

Доказательство леммы. Будем доказывать индукцией по k. Для $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для $k = l - 1$. Докажем для $k = l$. Посмотрим на наибольшую дробь в разложении, она не может быть меньше, чем $\frac{a}{k}$, иначе сумма всех дробей точно меньше a. Значит, знаменатель этой дроби точно не больше, чем $\frac{k}{a}$, то есть у нас существует конечное количество значений наибольшей дроби. Далее для каждого отдельного значения этой наибольшей дроби мы получаем, что сумма оставшихся $l - 1$ дробей должна быть каким-то фиксированным числом. По предположению индукции мы знаем, что таких $l - 1$ дробей для каждого отдельного значения наибольшей дроби конечно, а, значит, и всего представлений a в виде суммы k дробей конечно.

Теперь покажем, как Петя может ходить так, чтобы Вася после своего хода никогда не сделал сумму целой. Пусть перед ходом Пети сумма чисел на доске равна S, а Вася после его хода будет выписывать k дробей. Заметим, что после хода Васи сумма чисел точно не станет больше чем $S + k + 1$, то есть он точно не получит натуральное число, большее $S + k + 1$. Для каждой из оставшихся потенциальных натуральных сумм (а их осталось конечное количество) посчитаем, на сколько надо увеличить текущую сумму, чтобы она стала такой. Из леммы следует, что для каждого такого числа существует лишь конечное количество представлений его в виде суммы $k+1$ дроби вида $\frac{1}{n}$. Значит, всего во всех представлениях задействовано конечное число дробей вида $\frac{1}{n}$.

Пусть Петя тогда запишет на доску ту дробь, которая не задействована ни в одном из представлений. Тогда Вася точно не сможет написать k дробей так, чтобы сумма стала натуральной.

7. [12] *Белая фигура «жук» стоит в угловой клетке доски $1000 \times n$, где n — нечётное натуральное число, большее 2020. В двух ближайших к ней углах доски стоят два чёрных шахматных слона. При каждом ходе жук или переходит на клетку, соседнюю по стороне, или ходит как шахматный конь. Жук хочет достичь противоположного угла доски, не проходя через клетки, занятые или атакованные слоном, и побывав на каждой из остальных клеток ровно по одному разу. Покажите, что количество путей, по которым может пройти жук, не зависит от n.*

(Николай Белухов)

Сориентируем доску так, чтобы у неё было 1000 столбцов и n строк, а жук сидел в нижнем левом углу. Покрасим клетки в шахматном порядке, причём клетку жука сделаем белой. Занумеруем столбцы числами от 1 до 1000 слева направо, а строки числами от 1 до n снизу вверх.

Рассмотрим некоторый путь жука из клетки $(1, 1)$ в клетку $(1000, n)$. Из каждой клетки пути нарисуем стрелку в следующую клетку. Тогда из каждой белой клетки пути стрелка ведёт в чёрную.

Пусть i — чётное число, причём $1000 \leq i \leq n - 1003$. Между строками i и $i + 1$ проведём горизонтальную прямую ℓ.

Ниже прямой ℓ количество белых клеток в пути превосходит количество чёрных не меньше чем на 1000, так как 1000 чёрных клеток в нижних строках находятся под боем слона. Поэтому не меньше 1000 стрелок идут из белых клеток ниже ℓ в чёрные клетки выше ℓ. Но так может проходить лишь стрелка из клетки в строке $i-1$ или i. А поскольку там всего 1000 белых клеток, в каждой из них начинается стрелка, идущая в чёрную клетку строки $i+1$ или $i+2$.

Стрелка из клетки $(1, i-1)$ может идти только в $(2, i+1)$. Тогда стрелка из $(3, i-1)$ может идти только в $(4, i+1)$. Последовательно рассматривая клетки $(5, i-1)$, $(7, i-1)$, $\ldots$, $(999, i-1)$, $(1000, i)$, $(998, i)$, $\ldots$, $(2, i)$, видим, что все 1000 стрелок в действительности определены однозначно (рис. 1).

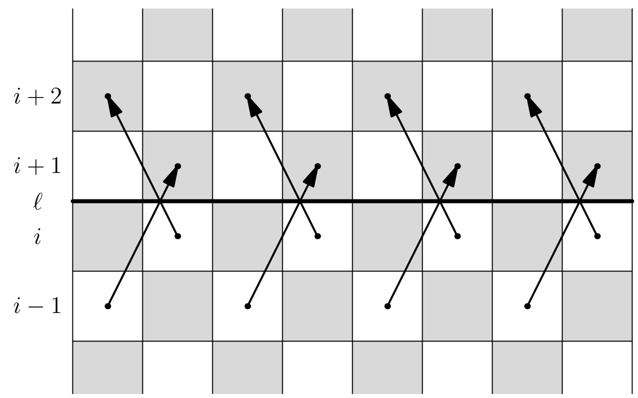


Рис. 1.

Аналогичное верно для $i+2$ и, значит, для белых клеток в строках $i+1$ и $i+2$. Поэтому если жук пришёл в белую клетку выше ℓ, то он уже никогда не вернётся в клетку ниже ℓ. Действительно, пусть жук впервые пересекает ℓ сверху вниз после того, как он побывал в белой клетке выше ℓ. Перед пересечением этой прямой жук находился в строке $i+1$ или $i+2$. Если жук был в белой клетке, то он пошёл бы вверх. А если жук был в чёрной клетке, то он пришёл в неё из клетки ниже ℓ — значит, он уже спускался ниже ℓ, побывав в белой клетке выше ℓ. Получили противоречие.

Среди стрелок из белых клеток строк $i-1$ и i рассмотрим пройденную последней. Так как до этого жук не побывал в белой клетке выше ℓ, то из концов остальных таких стрелок он спускался ниже ℓ. Таким образом, лишь из одной чёрной клетки в строках $i+1$ и $i+2$ стрелка ведёт в белую клетку выше ℓ.

Поскольку стрелка из $(1, i+2)$ не может вести в белую клетку ниже ℓ, стрелки из всех остальных чёрных клеток в строках $i+1$ и $i+2$ должны вести в белые клетки ниже ℓ. Последовательно рассматривая клетки $(3, i+2)$, $(5, i+2)$, $\ldots$, $(999, i+2)$, $(1000, i+1)$, $(998, i+1)$, $\ldots$, $(2, i+1)$, видим, что все 999 стрелок в действительности определены однозначно (рис. 2).

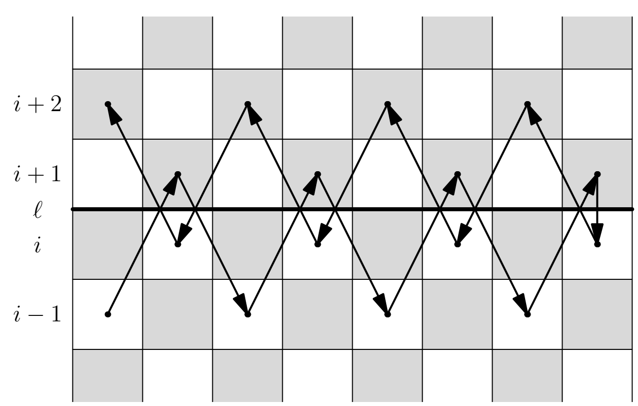


Рис. 2.

Аналогичное рассуждение для всех чётных значений i между 1000 и $n-1003$ показывает, что средняя часть пути жука определена однозначно и при росте n продолжается в виде пружины (рис. 3).

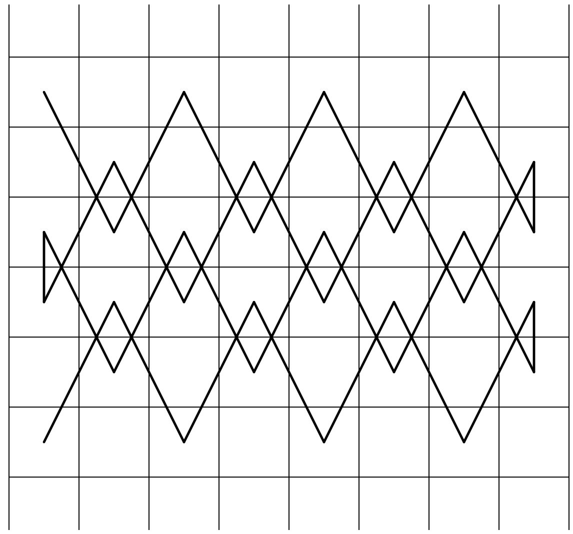


Рис. 3.

Следовательно, количество возможных путей не зависит от n.

Замечание. Конструкция на рисунке 4 показывает, что рассматриваемые пути действительно существуют.

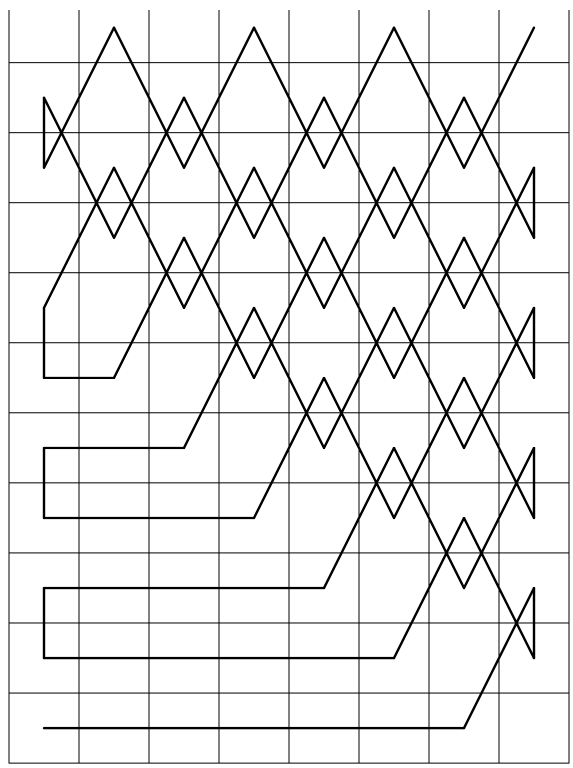


Рис. 4.