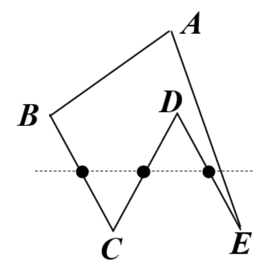
10 – 11 классы

1. а) [2] Выпуклый пятиугольник разбили непересекающимися диагоналями на три треугольника. Могут ли точки пересечения медиан этих треугольников лежать на одной прямой?
б) [2] Тот же вопрос для невыпуклого пятиугольника.

Александр Грибалко

Ответы: а) не могут; **б)** могут.

Решение. Ясно, что проведено ровно две диагонали, причём они выходят из одной вершины (пусть из A). Тогда указанные точки пересечения медиан получаются гомотетией с центром A и коэффициентом $2/3$ из середин сторон BC, CD и DE.



а) Эти середины сторон не могут лежать на одной прямой, так как прямая, не содержащая сторону выпуклого многоугольника, может пересечь его границу не более чем в двух точках.

б) Эти середины сторон могут лежать на одной прямой, как показано на рисунке справа.

2. а) [2] У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 1000, 1002, 1004 и 1005 г (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантированно определить, где какая гиря? (Следующее взвешивание выбирается по результатам прошедших.)
б) [2] Тот же вопрос, если у весов левая чашка на 1 г легче правой, так что весы показывают равенство, если масса на левой чашке на 1 г больше, чем на правой.

Алексей Толпыго

а) Ответ: не может.

Решение. Как бы Таня ни помещала гири на весы, равновесия они никогда не покажут. Поэтому каждое взвешивание делит множество подозрительных перестановок не более чем на две части. Вначале было 24 подозрительных перестановки, после первого взвешивания при «неудачном» исходе их останется не меньше 12, после второго — не меньше 6, …, после четвёртого — не меньше 2.

б) Ответ: может.

Решение 1. Сначала положим на чаши по две гири. В результате гири разбиваются на две пары: лёгкую и тяжёлую (если весы показали равновесие, то, как мы знаем, более тяжёлая группа — на левой чаше). Есть три варианта: лёгкая пара — гири 1000, 1002, тяжёлая — 1004, 1005; лёгкая пара — 1000, 1004, тяжёлая — 1002, 1005; лёгкая пара — 1000, 1005, тяжёлая — 1002, 1004. Следующими двумя взвешиваниями упорядочим гири по весу в каждой паре. Четвёртым взвешиванием сравним более тяжёлые гири обеих пар, положив на левую чашу гирю из тяжёлой пары. В первом варианте перевесит левая чаша, в третьем — правая, а во втором весы покажут равновесие (на левой чаша 1005, на правой — 1004).

Решение 2. Положим гирю A на левую чашу, а гирю B — на правую. Если равновесия нет, более тяжёлую гирю кладём на левую чашу и вторым взвешиванием сравниваем с C. Если снова нет равновесия, опять более тяжёлую гирю кладём на левую чашу и третьим взвешиванием сравниваем с D. У нас в запасе осталось одно взвешивание.

Если равновесие хоть раз было, более тяжёлая гиря в этом взвешивании весит 1005 г, другая — 1004 г, а две оставшиеся гири определяются ещё одним взвешиванием.

Если равновесия ни разу не было, мы заведомо нашли самую тяжёлую гирю (1005 г). Разберём случаи, какая это гиря, и покажем, что в каждом из них мы уже знаем также гирю 1004 г (тогда оставшиеся две гири мы различим четвёртым взвешиванием).

1) Это A. Она все три взвешивания была на левой чаше, значит, один раз весы показали бы «равновесие», а этот случай разобран.

2) Это B. Она дважды была на левой чаше, поэтому 1004 г может весить только A.

3) Это C. Тогда 1004 г весит гиря, «проигравшая» C при втором взвешивании (так как она более тяжёлая из A и B, а D не может весить 1004 г).

4) Это D. Тогда 1004 г весит самая тяжёлая гиря из трёх оставшихся (она определилась при втором взвешивании).

3. [5] При каких натуральных n найдутся n последовательных натуральных чисел, произведение которых равно сумме (может быть, других) n последовательных натуральных чисел?

Борис Френкин

Ответ: при нечётных n.

Решение. Произведение n последовательных целых чисел делится на n, значит, и равная ей сумма целых чисел делится на n. Поэтому среднее арифметическое этих чисел — целое число. Значит, n нечётно. Вот пример для $n = 2m+1$: $((2m)! - m) + ((2m)! - m + 1) + \ldots + ((2m)! + m) = (2m+1) \cdot (2m)! = n!$.

4. [5] Как известно, квадратное уравнение имеет не более двух корней. А может ли уравнение $[x^2] + px + q = 0$ при $p \neq 0$ иметь более 100 корней? ($[x^2]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x^2.)

Алексей Толпыго

Ответ: может.

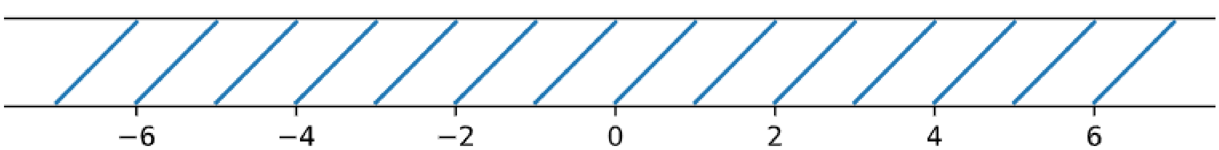
Решение. Рассмотрим, например, уравнение $[x^2] - 100x + 2500 = 0$. Оно имеет 199 корней вида $50 + \frac{k}{100}$ (где $k = -99, -98, \ldots, 99$). Действительно,

$$\left[\left(50 + \frac{k}{100}\right)^2\right] = \left[2500 + k + \left(\frac{k}{100}\right)^2\right] = 2500 + k = 100 \cdot \left(50 + \frac{k}{100}\right) - 2500.$$

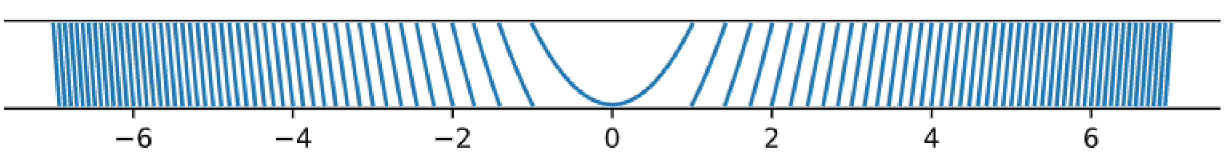
Идеология. Прямая $y = 100x - 2500$ касается параболы $y = x^2$ в точке $(50, 2500)$.

Замечание. Поясним неформально, как можно было придумать решение задачи.

Поскольку $[x^2] = x^2 - \{x^2\}$, исходное уравнение можно переписать в виде $x^2 + px + q = \{x^2\}$. Будем решать его графически: искать пересечения графиков параболы и дробной части квадрата. График дробной части $y = \{x\}$ представляет собой ряд равномерно идущих наклонных полуинтервалов:



Аналогично, график $y = \{x^2\}$ состоит из кусочков параболы: мы разрезаем параболу $y = x^2$ горизонтальными прямыми вида $y = n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, на кусочки и каждый кусочек параллельно сдвигаем вниз к оси абсцисс. Но эти кусочки идут уже не равномерно, а «чем дальше от нуля, тем всё чаще» (ведь при стремлении x к бесконечности ордината возрастает на 1 при увеличении x на всё меньшее (стремящееся к 0) число:

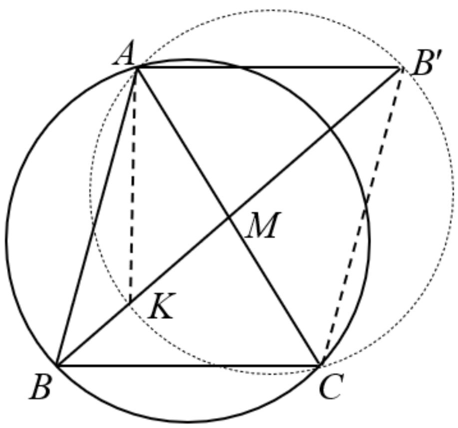


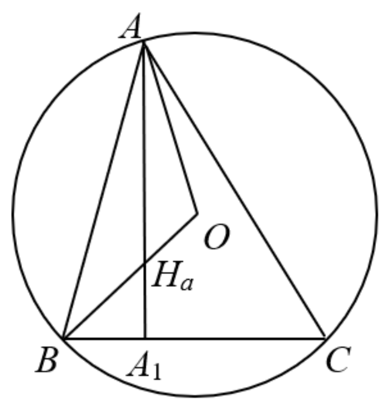
Но тогда любое уравнение вида $(x-a)^2 = \{x^2\}$ с достаточно большим а годится: в окрестности своей вершины парабола $y = (x-a)^2$ пересечёт много кусочков графика $y = \{x^2\}$.

5. [6] Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, точка M — середина стороны AC. Прямая BO пересекает высоты AA_1 и CC_1 в точках H_a и H_c соответственно. Описанные окружности треугольников BH_aA и BH_cC вторично пересекаются в точке K. Докажите, что K лежит на прямой BM.

Михаил Евдокимов

Решение 1. Пусть B' — точка, симметричная точке B относительно точки M, а описанная окружность треугольника ACB' пересекает медиану BM в точке K. Тогда внешний угол AKB' треугольника AKB равен $\angle ACB' = \angle A$ (см. далее рисунок слева). Но и внешний угол BH_aA_1 треугольника AH_aB равен $\angle BAA_1 + \angle ABO = 90^\circ - \angle B + 90^\circ - \angle C = \angle A$ (см. далее рисунок справа). Поэтому $\angle AKB = \angle AH_aB$, то есть точка K лежит на описанной окружности треугольника BH_aA. Аналогично она лежит на описанной окружности треугольника BH_cC.





Решение 2. Пусть BD — диаметр описанной окружности треугольника ABC. Поскольку $\angle ADB = \angle C$, имеем:

$$\angle CAH_a = \angle CAA_1 = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - \angle ADB = \angle ABH_a.$$

Следовательно, сторона AC касается описанной окружности треугольника BH_aA. Аналогично она касается описанной окружности треугольника BH_cC. Как известно, радикальная ось BK этих двух окружностей проходит через середину M отрезка AC их общей касательной.