10 – 11 классы

1 [3]. *Каждый из квадратных трёхчленов $P(x)$, $Q(x)$ и $P(x)+Q(x)$ с действительными коэффициентами имеет кратный корень. Обязательно ли все эти корни совпадают?*

(Борис Френкин)

Ответ: обязательно.

Первое решение. Предположим противное: $P(x)$ и $Q(x)$ имеют кратные корни a и b соответственно, $a \neq b$. Если ветви графиков $y=P(x)$ и $y=Q(x)$ направлены в одну сторону, то трёхчлен $P(x)+Q(x)$ не имеет корней (все его значения одного знака и ненулевые). Если ветви графиков $y=P(x)$ и $y=Q(x)$ направлены в разные стороны, то в точках a и b трёхчлен $P(x)+Q(x)$ принимает значения разных знаков, что невозможно для трёхчлена с кратным корнем. Противоречие.

Второе решение. Пусть c и d — кратные корни, a и b — старшие коэффициенты у P и Q соответственно. Тогда $P(x)+Q(x)=a(x-c)^2+b(x-d)^2=(a+b)x^2-2(ac+bd)x+ac^2+bd^2$, и поскольку этот трёхчлен имеет кратный корень, его дискриминант равен нулю, то есть

$$0=(ac+bd)^2-(a+b)(ac^2+bd^2)=2abcd-abd^2-bac^2=ab(c-d)^2,$$

откуда, так как a и b ненулевые, имеем $c=d$, и потому все три трёхчлена имеют кратный корень c.

Третье решение. Трёхчлен, имеющий кратный корень, с точностью до знака является полным квадратом. Без ограничения общности $P(x)=R^2(x)$. Рассмотрим два случая.

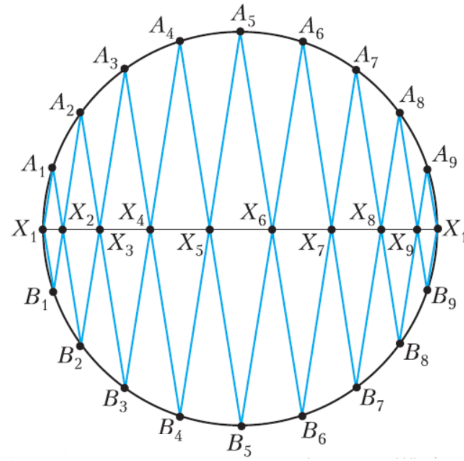
1) $Q(x)=S^2(x)$. Тогда $P(x)+Q(x)=R^2(x)+S^2(x)$ обращается в ноль только в точке, являющейся общий корнем $R(x)$ и $S(x)$, то есть общим корнем $P(x)$ и $Q(x)$.

2) $Q(x)=-S^2(x)$. Тогда трёхчлен $P(x)+Q(x)=(R(x)-S(x))(R(x)+S(x))$ имеет кратный корень, только когда корни линейных функций $R(x)-S(x)$ и $R(x)+S(x)$ совпадают. Но в такой точке $R(x)=S(x)=0$.

2 [4]. *На прямой отметили точки $X_1,\ldots,X_{10}$ (именно в таком порядке) и построили на отрезках X_1X_2, X_2X_3, …, X_9X_{10} как на основаниях равнобедренные треугольники с углом α при вершинах. Оказалось, что все эти вершины лежат на полуокружности с диаметром X_1X_{10}. Найдите α.*

(Егор Бакаев)

Ответ: 18°. Пусть построены треугольники $X_1A_1X_2$, …, $X_9A_9X_{10}$, а точки B_1, …, B_9 симметричны точкам A_1, …, A_9 соответственно (относительно прямой X_1X_{10}). Очевидно, точка X_i лежит на хорде $B_{i-1}A_i$ и на хорде B_iA_{i-1} ($i = 2, \ldots, 9$), поскольку при отражении возникают вертикальные углы (угол при основании равнобедренного треугольника и такой же угол отражённого соседнего треугольника). Поэтому



$$\angle X_1B_1A_2 = \angle A_2B_3A_4 = \angle A_4B_5A_6 = \angle A_6B_7A_8 = \angle A_8B_9X_{10} = \alpha.$$

Следовательно, 5α равно половине дуги X_1X_{10}, то есть 90°.

3 [5]. *Натуральное число N кратно 2020. В его десятичной записи все цифры различны, причём если любые две из них поменять местами, получится число, не кратное 2020. При каком количестве цифр в десятичной записи числа N такое возможно?*

(Сергей Токарев)

Ответ: при 6 цифрах.

Если в числе седьмая цифра справа — это a, а третья справа — это b, то, меняя их местами, мы изменим число на $b \cdot 10^6 - a \cdot 10^6 + a \cdot 10^2 - b \cdot 10^2 = (b - a) \cdot (10^4 - 1) \cdot 100$. Значит, при такой замене делимость на $2020 = 20 \cdot 101$ не испортится, поскольку $10^4 - 1$ делится на 101, а 100 делится на 20. Поэтому больше 6 цифр в числе N быть не может

Шесть цифр может быть. Например, подходит число 351480 (0 должен оставаться в конце, обмен 3 и 8 испортит делимость на 4, а обмен соседних цифр или цифр, стоящих через одну или через две, испортит делимость на 101, поскольку числа $10 - 1$, $10^2 - 1$ и $10^3 - 1$ на 101 не делятся). Есть и другие примеры, скажем, 531260.

Пяти- или четырёхзначное число, кратное 2020, получается умножением 2020 на число $10a + b$, меньшее 50. У числа $2020b$ вторая и четвёртая цифры равны, а у числа $20200a$ они равны нулю, поэтому у суммы эти цифры равны, что нас не устраивает.

4 [5]. *Стороны треугольника разделены основаниями биссектрис на два отрезка каждая. Обязательно ли из шести образовавшихся отрезков можно составить два треугольника?*

(Лев Емельянов)

Ответ: обязательно.

Пусть $a \leqslant b \leqslant c$ — длины сторон треугольника. Тогда стороны разделятся на такие части:

$$a = \frac{ab}{b+c} + \frac{ac}{b+c}, \quad b = \frac{ba}{a+c} + \frac{bc}{a+c}, \quad c = \frac{ca}{a+b} + \frac{cb}{a+b}.$$

Из отрезков, составляющих c, первый меньше a, а второй меньше b (так как $\frac{c}{a+b} < 1$).

Тогда возьмём в первую тройку отрезки $\frac{ab}{b+c}$, $\frac{ac}{b+c}$ составляющие a, и отрезок $\frac{ca}{a+b}$. Последний из них наибольший (его знаменатель не больше, а числитель не меньше, чем у других), но меньше a.

Во вторую тройку возьмём отрезки $\frac{ba}{a+c}$ и $\frac{bc}{a+c}$, составляющие b, и отрезок $\frac{cb}{a+b}$. Последний из них наибольший (аналогично), но меньше b.

Возможны и другие способы разбить отрезки на две тройки.

5. *По кругу лежит 101 монета, каждая весит 10 г или 11 г. Докажите, что найдётся монета, для которой суммарная масса k монет слева от неё равна суммарной массе k монет справа от неё, если*

а) [3] $k = 50$;

б) [3] $k = 49$.

(Александр Грибалко)

Решим сразу оба пункта. Пусть k — любое из чисел 49 или 50. Раскрасим монеты в чёрный и белый цвета (10 г — одним цветом, 11 г — другим). Монет какого-то цвета, скажем, белых, будет нечётное количество, пусть $2m+1$. Надо доказать, что среди k монет справа и k монет слева от какой-то монеты будет поровну белых.

Предположим противное. Тогда $m > 0$, иначе единственная белая монета — искомая. Назовём белую монету *правой*, если среди k монет справа от неё белых больше, чем среди k монет слева от неё, в противном случае — *левой* . Так как белых монет $2m+1$, правых и левых монет будет не поровну, пусть правых больше.

Пусть A — правая монета, а B — m-я справа от A белая монета (то есть на дуге, идущей вправо от A к B, белых монет между A и B ровно $m-1$).

Если бы среди k монет справа от A не было B, то среди них было бы не более $m-1$ белой монеты. Так как $k \geq 49$, то вместе среди k монет слева от A и k монет справа от A хотя бы $2m-2$ белые монеты, поэтому среди k монет слева от A было бы тогда не менее $m-1$ белой, то есть не меньше, чем справа, что противоречит тому что A — правая.

Значит среди k монет справа от A есть B, но тогда среди k монет слева от B встречаются все белые монеты, лежащие на дуге, идущей вправо от A к B, и сама монета A, то есть среди них встречается не менее m монет. Так как $k \leq 50$, то вместе среди k монет слева от B и k монет справа от B не более $2m$ белых, поэтому среди k монет справа от B не более m белых, то есть не больше, чем слева. Значит, монета B — левая.

Итак, для всякой правой монеты m-я справа от неё белая монета — левая. Значит, левых не меньше, чем правых, противоречие.