СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 1 марта 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
4	1. На плоскости даны две параболы: $y = x^2$ и $y = x^2 - 1$. Пусть U — множество всех точек плоскости, лежащих между параболами (включая точки на самих параболах). Существует ли отрезок длины более 10^6, целиком содержащийся в U? *Алексей Толпыго*
5	2. Алёша задумал натуральные числа a, b, c, а потом решил найти такие натуральные x, y, z, что $a = \text{НОК}(x, y)$, $b = \text{НОК}(x, z)$, $c = \text{НОК}(y, z)$. Оказалось, что такие x, y, z существуют и определены однозначно. Алёша рассказал об этом Боре и сообщил ему только числа a и b. Докажите, что Боря может восстановить c. *Борис Френкин*
8	3. Может ли в сечении какого-то тетраэдра двумя разными плоскостями получиться два квадрата: один — со стороной, не большей 1, а другой — со стороной, не меньшей 100? *Михаил Евдокимов*
9	4. К Ивану на день рождения пришли $2N$ гостей. У Ивана есть N чёрных и N белых цилиндров. Он хочет устроить бал: надеть на гостей цилиндры и выстроить их в хороводы (один или несколько) так, чтобы в каждом хороводе было хотя бы два человека и люди в цилиндрах одного цвета не стояли в хороводе рядом. Докажите, что Иван может устроить бал ровно $(2N)!$ различными способами. (Цилиндры одного цвета неразличимы; все гости различимы.) *Глеб Погудин*
9	5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Окружности с диаметрами AB и CD пересекаются в двух точках X_1 и Y_1. Окружности с диаметрами BC и AD пересекаются в двух точках X_2 и Y_2. Окружности с диаметрами AC и BD пересекаются в двух точках X_3 и Y_3. Докажите, что прямые X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 пересекаются в одной точке. *Максим Дидин*
10	6. На доске написаны $2n$ последовательных целых чисел. За ход можно разбить написанные числа на пары произвольным образом и каждую пару чисел заменить на их сумму и разность (не обязательно вычитать из большего числа меньшее, все замены происходят одновременно). Докажите, что на доске больше никогда не появятся $2n$ последовательных чисел. *Александр Грибалко*
12	7. Для каких k можно закрасить на белой клетчатой плоскости несколько клеток (конечное число, большее нуля) в чёрный цвет так, чтобы на любой клетчатой вертикали, горизонтали и диагонали либо было ровно k чёрных клеток, либо вовсе не было чёрных клеток? *А. Динев, К. Гаров и Н. Белухов*