

## Сложный вариант, младшие классы

1. Назовём *сложностью* целого числа  $n > 1$  количество сомножителей в его разложении на простые. Для каких  $n$  все числа между  $n$  и  $2n$  имеют сложность

а) [2] не больше, чем у  $n$ ; б) [2] меньше, чем у  $n$ ? (Борис Френкин)

**Ответ.** а) Для  $n = 2^k$ ; б) таких чисел нет. **Решение.** а) Очевидно,  $2^k$  – наименьшее число сложности  $k$ . Поэтому все числа между  $2^k$  и  $2^{k+1}$  имеют сложность не больше  $k$ . Пусть  $n$  – не степень двойки. Тогда между  $n$  и  $2n$  есть степень двойки (можно взять наибольшую степень двойки, меньшую  $n$ , и удвоить её). Очевидно, её сложность больше, чем у  $n$ .

б) В силу пункта а), достаточно рассмотреть случай  $n = 2^k$ , где  $k$  натуральное. Но число  $3 \cdot 2^{k-1}$  имеет такую же сложность, как и  $n$ , и находится между  $n$  и  $2n$ .

**Для знатоков.** Утверждение б) следует из *постулата Бертрана*: если  $p$  – простое число, то следующее простое меньше  $2p$ . Действительно, представим  $n$  в виде  $pr$ , где  $p$  – простое,  $r$  – натуральное. Пусть  $q$  – следующее за  $p$  простое число. Тогда  $n < qr < 2n$ , а сложность  $qr$  равна сложности  $n$ .

2. [7] Два остроугольных треугольника  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  таковы, что точки  $B_1$  и  $C_1$  лежат на стороне  $BC$ , а точка  $A_1$  – внутри треугольника  $ABC$ . Пусть  $S$  и  $S_1$  – соответственно площади этих треугольников. Докажите, что 
$$\frac{S}{AB + AC} > \frac{S_1}{A_1B_1 + A_1C_1}.$$
 (Наури Седракан, Илья Богданов)

**Решение.** Пусть точки  $D$  и  $D_1$  симметричны точкам  $A$  и  $A_1$  относительно  $BC$ . Проведём биссектрисы  $AK$  и  $A_1K_1$  наших треугольников. Заметим, что  $K$  и  $K_1$  – центры окружностей, вписанных в четырёхугольники  $ABDC$  и  $A_1B_1D_1C_1$ , а требуемое неравенство превратилось в очевидное неравенство  $r > r_1$ , где  $r$  и  $r_1$  – радиусы указанных окружностей.

3. [7] Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 г, серебряные – по 2 г, медные – по 1 г. Как на чашечных весах без гирек определить тип у всех монет не более чем за 101 взвешивание?

(Владислав Новиков)

**Решение 1.** (А. Шаповалов) Назовём ситуацию *победной*, если проведено не более чем  $k + 1$  взвешивание и определены веса  $k$  монет, причём среди них есть серебряная или две медных. В победной ситуации, сравнивая неизвестную монету с весом 2 г, мы определим её вес, увеличив число известных монет и число взвешиваний на 1 и так определим все монеты не более чем за 101 взвешивание.

В каждый момент будем сравнивать число *затронутых* (участвовавших во взвешиваниях) монет  $z$  с числом взвешиваний  $v$ . Сначала выделим одну монету и будем сравнивать незатронутые монеты с ней, пока не найдём монету другого веса. Пусть  $A$  – более лёгкая, а  $B$  – более тяжёлая из затронутых монет. Далее сравниваем незатронутые монеты с  $B$ , пока снова не получим неравенство. Теперь у нас  $v = z - 1$ ; есть одна или несколько монет одинакового веса  $a$ , одна или несколько монет другого веса  $b > a$  и одна монета  $C$  веса  $c \neq b$ . Сравним  $C$  с  $A$ . Возможны два случая.

1)  $c = a$ . Сравним  $B$  с  $A+C$ , то есть  $b$  с  $2a$ . Возможны варианты:  $b = 3, a = 1$  (если  $b > 2a$ );  $b = 2, a = 1$  ( $b = 2a$ );  $b = 3, a = 2$  ( $b < 2a$ ). Во всех случаях ситуация победная:  $v = z + 1$ , веса  $z$  монет определены и есть нужные монеты (с общим весом 2).

2)  $c \neq a$ . Значит  $a, b, c$  – три разных веса, они как-то упорядочены ( $c > b > a, b > c > a$  или  $b > a > c$ ), поэтому определены однозначно. При этом  $v = z$  – ситуация победная.

**Замечание.** Иногда некоторые взвешивания можно не проводить: например, если  $C$  тяжелее  $B$ , то уже  $c > b > a$ ; если при первом неравенстве уже есть ещё монета веса  $a$ , её можно взять за  $C$ .

**Решение 2.** (А. Рябичев) Сначала докажем по индукции следующее вспомогательное

**Утверждение 1.** Пусть есть  $k$  монет, среди которых все три типа представлены, причём про пару монет  $A, a$  уже известно, что  $A > a$ . Тогда можно определить, какая из  $k$  монет какого типа, за  $k - 1$  взвешивание.

**База.** Если монет три, сравнив оставшуюся монету с  $A$  и с  $a$ , мы упорядочим их по весу.

**Шаг.** Сравним какие-нибудь две монеты, кроме  $A$  и  $a$ . Если они равны, то одну можно отбросить (запомним, с какой она совпадает по весу), и воспользоваться предположением индукции для  $k - 1$  монеты. Если они не равны, скажем что получилась пара  $B > b$ . Теперь сравним  $A+a$  и  $B+b$ . Если веса пар равны, то  $A=B$  и  $a=b$ , так что мы можем выкинуть  $B$  и  $b$  (запомним, что они совпадают по весу с  $A$  и  $a$ ), и воспользоваться предположением индукции для  $k - 2$  монет.

Пусть веса пар различны, для определённости,  $A+a > B+b$ . Заметим, что тогда обязательно  $A = 3$  и  $b = 1$ . Монеты в паре  $(B, a)$  имеют либо веса  $(2,1)$ , либо  $(2,2)$ , либо  $(3,2)$ . Итак, сравнив  $A+a$  с  $B+a$ , мы однозначно восстановим веса всех четырёх монет. Среди них есть монета веса 2, будем сравнивать с ней все остальные монеты, на что уйдут оставшиеся  $k - 4$  взвешивания. Утверждение 1 доказано.

Теперь выведем по индукции следующее утверждение, усиливающее требуемое в задаче:

**Утверждение 2.** Если есть  $k$  монет, среди которых все три типа представлены, то можно определить, какая монета какого типа, за  $k$  взвешиваний.

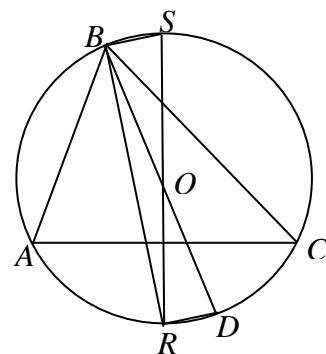
**База.** Если монет три, то, сравнив каждую с каждой, мы упорядочим их по весу.

**Шаг.** Сравним какие-нибудь две монеты. Если они равны, то одну можно отбросить (запомним, с какой она совпадает по весу), и мы переходим к случаю  $k - 1$  монеты, среди которых все типы представлены. Если они не равны, скажем, что образовалась пара  $A > a$  и воспользуемся утверждением 1.

**Замечание.** Мы сделали на одно взвешивание меньше, чем предполагалось в условии. Кроме того, мы использовали только то, что сумма весов двух серебряных монет равна сумме весов медной и золотой; тот факт, что серебряная монета вдвое тяжелее медной, для данного решения не важен.

4. [7] Из центра  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$  опустили перпендикуляры  $OP$  и  $OQ$  на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине  $B$ . Докажите, что прямая  $PQ$  делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон  $CB$  и  $AB$ . (Артёмий Соколов)

**Решение.** Проведём гомотетию с центром  $B$  и коэффициентом 2. Точка  $O$  перейдёт в точку  $D$ , диаметрально противоположную вершине  $B$  на описанной окружности  $\Omega$ , точка  $P$  – в точку  $R$  пересечения биссектрисы угла  $B$  с  $\Omega$ , точка  $Q$  – в диаметрально противоположную  $R$  точку  $S$ , «отрезок, соединяющий...» – в сторону  $AC$ . Осталось заметить, что диаметр  $RS$  проходит через середину стороны  $AC$ , так как  $R$  – середина дуги  $AC$ .



5. [8] Назовём пару  $(m, n)$  различных натуральных чисел  $m$  и  $n$  хорошей, если  $mn$  и  $(m + 1)(n + 1)$  – точные квадраты. Докажите, что для каждого натурального  $m$  существует хотя бы одно такое  $n > m$ , что пара  $(m, n)$  хорошая.

(Юрий Маркелов)

**Решение.** Пара  $(m, m(4m + 3)^2)$  хорошая. Действительно,  
 $(m + 1)(m(4m + 3)^2 + 1) = (m + 1)(16m^3 + 24m^2 + 9m + 1) = (m + 1)^2(16m^2 + 8m + 1) = ((m + 1)(4m + 1))^2$ .

**Путь к решению.** Естественно попытаться найти такое  $n$ , что оно есть квадрат, умноженный на  $m$ , и при этом  $n+1$  есть квадрат, умноженный на  $m+1$ . Тогда  $n+1$  имеет вид  $k^2(m+1)$ . Так как  $n$ , поделённое на  $m$ , тоже квадрат, имеем:  $(k^2(m+1) - 1)/m = k^2 + (k^2 - 1)/m$  – квадрат. Самый простой способ это обеспечить – положить  $(k^2 - 1)/m$  равным  $4k+4$ , тогда  $(k - 1)/m = 4$ , откуда  $k = 4m+1$ .

6. [9] У Пети было несколько сторублёвок, других денег не было. Петя стал покупать книги (каждая книга стоит целое число рублей) и получать сдачу мелочью (монетами в 1 рубль). При покупке *дорогой* книги (не дешевле 100 рублей) Петя расплачивался только сторублёвками (минимальным необходимым их количеством), а при покупке *дешёвой* (дешевле 100 рублей) расплачивался мелочью, если хватало, а если не хватало – сторублёвкой. К моменту, когда сторублёвок не осталось, Петя потратил на книги ровно половину своих денег. Мог ли Петя потратить на книги хотя бы 5000 рублей? (Татьяна Казыцына)

**Решение 1.** Посмотрим, сколько мелочи Петя мог получить.

Рассмотрим самую последнюю дешёвую покупку, которая увеличила количество мелочи. Пусть стоимость этой покупки  $x$ , тогда перед этим было не более  $x - 1$  рублей мелочи, а значит, после этого её станет не больше чем  $x - 1 + 100 - x = 99$  рублей. Так как дорогие покупки количество мелочи не уменьшают, то все предыдущие покупки вместе с рассмотренной дали в сумме не более 99 руб. мелочи. Тем более все *дешёвые* покупки в сумме принесли не более 99 рублей.

Пусть было  $n$  покупок дороже 100 рублей. Каждая из них добавляет не более 99 рублей мелочи. Если бы других покупок совсем не было, то на дорогие было бы потрачено не менее  $2n$  сотен, а сдача составила бы не более  $99n$  – меньше половины потраченного. Поэтому другие покупки есть. Но тогда у Пети было не менее  $2n + 1$  сторублёвки, а мелочи в конце стало не больше  $99n + 99$ . Значит,  $(2n + 1)50 \leq 99n + 99$ , откуда  $n \leq 49$ . Таким образом, мелочи останется не более  $99 \cdot 49 + 99 < 5000$  руб. Значит, и потрачено менее 5000 рублей.

**Решение 2.** Пусть какой-то товар куплен за  $x$  рублей мелочью. Эта мелочь появилась как сдача при предыдущих покупках. Увеличим стоимость этих покупок на соответствующие величины, в сумме составляющие  $x$  рублей, а данную покупку отменим. Аналогично избавимся от всех покупок за мелочь. На каждом шаге количество мелочи уменьшается, поэтому новых покупок за мелочь не появится.

Имеется покупка стоимостью не больше 50 рублей (*маленькая*), иначе осталось бы меньше половины всех денег. Маленькая покупка только одна, так как вторая маленькая покупка была бы сделана на сдачу за первую, а покупок за мелочь теперь нет.

Разность между сдачей за маленькую покупку и её ценой не больше  $99 - 1 = 98$  руб. Для каждой другой покупки эта разность отрицательна, и она чётна (так как сумма цены и сдачи кратна 100, то есть чётна). Значит, эта разность не меньше  $-98$  и не больше  $-2$ . Поэтому остальных покупок не больше  $98:2 = 49$ , и за каждую из них отдано не больше двух сторублёвок (иначе указанная разность не больше  $99 - 201 < -98$ ). Следовательно, всего сторублёвок было не больше  $1 + 2 \cdot 49 = 99$ , а половина от этой суммы не больше  $9900:2 = 4950 < 5000$ .

7. [10] В клетчатом деревянном квадрате 102 клетки намазаны чёрной краской. Петя, используя квадрат как печать, 100 раз приложил его к белому листу, и каждый раз эти 102 клетки (и только они) оставляли чёрный отпечаток на бумаге. Мог ли в итоге на листе получиться квадрат  $101 \times 101$ , все клетки которого, кроме одной угловой, чёрные? (Александр Грибалко)

**Ответ.** Мог. **Решение.** Покажем, что любой квадрат  $(2N+1) \times (2N+1)$  без угловой клетки можно получить,  $2N$  раз приложив печать из  $2N + 2$  клеток. Для пояснения приведём рисунок для  $N = 4$ .

Квадрат без правого верхнего угла представим как квадрат  $2N \times 2N$  с двумя приклеенными сверху и справа полосками  $1 \times 2N$ . Разобьём квадрат  $2N \times 2N$  на четыре квадратика  $N \times N$ . Покрасим левый нижний и правый верхний квадратика  $N \times N$  и верхнюю полоску в серый цвет. Теперь белая часть получается из серой поворотом на  $90^\circ$  по часовой стрелке (относительно центра квадрата  $2N \times 2N$ ). Левый край каждого серого квадратика  $N \times N$  и две клетки серой полоски на тех же вертикалях сделаем тёмными. Это будет первый отпечаток. Сдвинув его вправо на одну клетку, сделаем второй отпечаток, и т.д. Тогда  $N$  отпечатков покроют в точности серую область. Развернув печать на  $90^\circ$ ,  $N$  отпечатками покроем белую область.

**Замечание.** Есть и другие варианты печатей. Например, такой (для простоты рассмотрен случай  $N = 3$ ):

