

Базовый вариант, старшие классы

1. [3] Фокусник выкладывает в ряд колоду из 52 карт и объявляет, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка треф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки треф можно гарантировать успех фокуса? (Алексей Воропаев)

Ответ: при крайних положениях. **Решение.** Тройку треф придётся выбросить, только если она в какой-то момент окажется в центре ряда, иначе можно выбросить другую карту. Так как ряд всегда содержит больше одной карты, то крайнюю карту можно сохранить до конца.

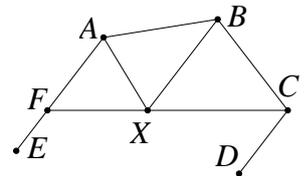
Пусть тройка треф T сначала была не с края. Приведём две стратегии для зрителя.

Стратегия 1. Зритель всегда называет номер положения T . Фокусник будет выкидывать другую карту (у него нет выбора), уменьшая на единицу большее из расстояний от тройки треф до края. Значит, когда-то расстояния до краёв совпадут и придётся выкинуть тройку треф.

Стратегия 2. Зритель называет что угодно, кроме крайних чисел, не давая удалять крайние карты. Когда останется три карты, тройка треф (если она ещё будет на столе) окажется в центре. Зритель назовёт 2.

2. [4] Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором $AE \parallel CD$ и $AB = BC$. Биссектрисы его углов A и C пересекаются в точке K . Докажите, что $BK \parallel AE$. (Егор Бакаев)

Решение. Пусть биссектриса угла C пересекает прямую AE в точке F , а прямая, проходящая через B параллельно AE , пересекает отрезок CF в точке X . Тогда $\angle BXC = \angle DCX = \angle BCX$. Отсюда $BX = BC = BA$. Значит, $\angle BAX = \angle BXA = \angle FAX$. Следовательно, AX – биссектриса угла A , поэтому X совпадает с K и $BK \parallel AE$.



Замечание. На рисунке точка F лежит на стороне AE , но в решении это не используется. Можно, впрочем, доказать, что биссектриса угла C не может пересекать сторону AB (а сторону ED – может).

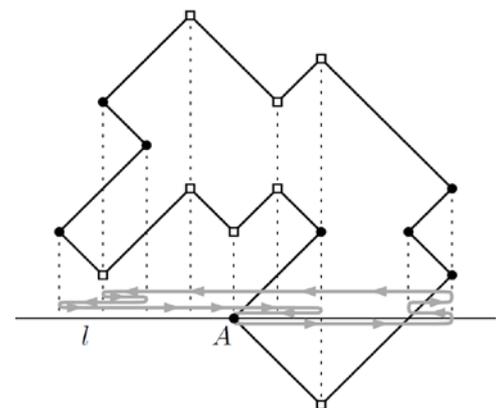
3. [4] Любое число x , написанное на доске, разрешается заменить либо на $3x + 1$, либо на $\lceil x/2 \rceil$. Докажите, что если вначале написано число 1, то такими операциями можно получить любое натуральное число. (Владислав Новиков)

Решение. Индукция. Число 1 написано. Покажем, как получить натуральное $n > 1$, если умеем получать все меньшие числа. Число n представимо в одном из трёх видов: $3k - 1$, $3k$ или $3k + 1$, где k – натуральное. 1) $2k - 1 \rightarrow 6k - 2 \rightarrow 3k - 1$; 2) $2k \rightarrow 6k + 1 \rightarrow 3k$; 3) $k \rightarrow 3k + 1$.

4. [5] Дан многоугольник, у которого каждые две соседние стороны перпендикулярны. Назовём две его вершины *не дружными*, если биссектрисы многоугольника, выходящие из этих вершин, перпендикулярны. Докажите, что для любой вершины количество не дружных с ней вершин чётно. (Михаил Скопенков)

Решение 1. Расположим многоугольник так, чтобы его стороны были горизонтальны и вертикальны. Пусть вертикальных сторон k , тогда горизонтальных сторон тоже k . Все вершины многоугольника делятся на 4 типа: \ulcorner , \lrcorner , \llcorner , \lrcorner . Пусть вершина A имеет тип 2 (без ограничения общности). Тогда не дружные с ней – вершины типа 1 и 4.

Рассмотрим любую горизонтальную сторону. Её левый конец может быть только типа 1 или 3. Всего левых вершин у горизонтальных сторон столько же, сколько левых сторон, то есть k , откуда суммарное число вершин типа 1 и 3 равно k . Пусть вершин типа 1 всего x , тогда вершин типа 3 всего $k - x$. Рассматривая нижние концы вертикальных сторон, получаем аналогично, что



вершин типа 3 и 4 всего k , откуда вершин типа 4 всего $k - (k - x)$, то есть x . Но тогда вершин типа 1 и 4 всего $2x$ (чётное число), а это и есть вершины, которые не дружны с A .

Решение 2. Расположим многоугольник так, чтобы биссектриса l данной вершины A была горизонтальна. Пусть некая точка движется по периметру многоугольника с постоянной скоростью, начав и закончив в вершине A . Тогда её проекция на l также движется с постоянной скоростью, причём проекция меняет направление движения ровно в те моменты, когда точка проходит через вершину, дружную с A , или через саму A . Учитывая, что всего вершин чётное число, получаем требуемое.

Решение 3. Расположим многоугольник так, чтобы его стороны были горизонтальны и вертикальны. Поскольку они чередуются, число вершин чётно (пусть их $2n$). При этом угловой коэффициент биссектрисы равен 1 или -1 .

Занумеруем вершины против часовой стрелки числами от 1 до $2n$ и поставим в i -й вершине число a_i , равное 1, если угол в ней равен 90° , и -1 , если угол в ней равен 270° . Обходя многоугольник по контуру против часовой стрелки, в каждом угле в 90° мы поворачиваем на 90° против часовой стрелки, а в каждом угле в 270° – на 90° по часовой. Вернувшись в исходное положение после полного обхода, мы повернулись в итоге на 360° против часовой стрелки, откуда количество углов в 270° на 4 меньше, чем в 90° , то есть равно $(2n - 4)/2 = n - 2$, поэтому $a_1 a_2 \dots a_{2n} = (-1)^{n-2}$.

Заметим, что направления биссектрис в соседних вершинах совпадают тогда и только тогда, когда углы в них разные. Можно считать, что угловой коэффициент биссектрисы в первой вершине равен a_1 . Тогда для каждого i знак b_i углового коэффициента биссектрисы в i -й вершине совпадает с a_i , если i нечётно, и совпадает с $-a_i$, если i чётно. Поэтому $b_1 b_2 \dots b_{2n} = a_1 a_2 \dots a_{2n} (-1)^n = (-1)^{2n-2} = 1$. Следовательно, число «отрицательных» (а потому и «положительных») биссектрис чётно.

5. [5] В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые две соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно 4 фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке?
(Егор Бакаев)

Ответ. За 61 рубль. **Решение.** Занумеруем фишки и клетки по порядку от 0 до 99. Бесплатная операция не меняет остаток номера клетки при делении на 5.

Оценка. Мысленно расположим кучки фишек по кругу. Сначала кучка фишек с остатком 0, потом – с 1, и так далее до 4. Платная операция переставляет пару фишек из соседних кучек. Фишки из нулевой кучки должны участвовать хотя бы в одной такой замене, чтобы добраться до четвёртой кучки. Аналогично для фишек из четвёртой кучки. Фишки из первой кучки должны участвовать хотя бы в двух заменах, чтобы добраться до третьей кучки. Аналогично для третьей кучки. Значит, потребуется хотя бы $(20 + 20 + 40 + 40):2 = 60$ рублей. Но если будет потрачено только 60 рублей, то фишкам из первой кучки придётся идти через вторую кучку, поэтому хотя бы одна фишка из второй кучки будет участвовать в заменах. Следовательно, необходимо больше 60 рублей.

Алгоритм. Ясно, что бесплатными операциями можно расставить фишки внутри кучки в любом порядке. Поэтому правильно расставить все фишки из нулевой и четвёртой кучек можно за 20 рублей. Рассмотрим оставшиеся три кучки. Мысленно оставим только одну фишку A во второй кучке. Поменяем её с фишкой из первой кучки. Каждый раз будем передвигать дальше фишку, пришедшую во вторую кучку, за счёт новой фишки. Тогда за 40 рублей мы перетащим все фишки из первой кучки в третью, а из третьей – в первую кроме одной: она останется во второй кучке, не дойдя до первой. Поменяем её с A , и все фишки окажутся в нужных кучках.