**ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ**

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 22 октября 2017 г.

*(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)*

---

баллы задачи

5 **1.** Было 100 дверей, у каждой свой ключ (отпирающий только эту дверь). Двери пронумерованы числами 1, 2, . . . , 100, ключи тоже, но, возможно, с ошибками: номер ключа совпадает с номером двери или отличается на 1. За одну попытку можно выбрать любой ключ, любую дверь и проверить, подходит ли этот ключ к этой двери. Можно ли гарантированно узнать, какой ключ какую дверь открывает, сделав не более

1 а) 99 попыток;

2 б) 75 попыток;

3 в) 74 попыток.

*Алексей Лебедев, Александр Шаповалов*

5 **2.** Дан правильный шестиугольник с центром $O$. Провели шесть равных окружностей с центрами в вершинах шестиугольника такие, что точка $O$ находится внутри окружностей. Угол величины $\alpha$ с вершиной $O$ высекает на этих окружностях шесть дуг. Докажите, что суммарная величина этих дуг равна $6\alpha$.

*Егор Бакаев*

6 **3.** Аналитик сделал прогноз изменения курса доллара на каждый из 12 ближайших месяцев: на сколько процентов (число, большее 0% и меньшее 100%) изменится курс за октябрь, на сколько — за ноябрь, ..., на сколько — за сентябрь. Оказалось, что про каждый месяц он верно предсказал, на сколько процентов изменится курс, но ошибся с направлением изменения (то есть, если он предсказывал, что курс увеличится на $x$%, то курс падал на $x$%, и наоборот). При этом через 12 месяцев курс совпал с прогнозом. В какую сторону в итоге изменился курс?

*Алексей Заславский*

8 **4.** Покажите, что для любой последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, состоящей из единиц и минус единиц, найдутся такие $n$ и $k$, что

$$|a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k+1} + \ldots + a_n \cdot a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{n+k}| = 2017.$$

*Иван Митрофанов*

**5.** Кусок сыра надо разрезать на части с соблюдением таких правил: 1) вначале режем сыр на 2 куска, затем один из них режем на 2 куска, затем один из трёх кусков опять режем на 2 куска, и т.д.; 2) после каждого разрезания части могут быть разными по весу, но отношение веса любой части к весу любой другой должно быть строго больше заданного числа $R$.

3 а) Докажите, что при $R = 0,5$ можно резать сыр так, что процесс никогда не остановится (после любого числа разрезаний можно будет отрезать ещё один кусок).

4 б) Докажите, что если $R > 0,5$, то процесс резки когда-нибудь остановится.

4 в) На какое наибольшее число кусков можно разрезать сыр, если $R = 0,6$?

*Алексей Толпыго*

10 **6.** Дан треугольник $ABC$. Пусть $I$ — центр вневписанной окружности, касающейся стороны $AB$, а $A_1$ и $B_1$ — точки касания двух других вневписанных окружностей со сторонами $BC$ и $AC$ соответственно. Пусть $M$ — середина отрезка $IC$, а отрезки $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются в точке $N$. Докажите, что точки $N$, $B_1$, $A$ и $M$ лежат на одной окружности.

*Фёдор Ивлев*

10 **7.** Город имеет вид квадрата $n \times n$, разбитого на кварталы $1 \times 1$. Улицы идут с севера на юг и с запада на восток. Человек каждый день утром идёт из юго-западного угла в северо-восточный, двигаясь только на север или восток, а вечером возвращается обратно, двигаясь только на юг или запад. Каждое утро он выбирает свой путь так, чтобы суммарная длина знакомых участков пути (тех, которые он уже проходил в том или ином направлении) была минимальна, и каждый вечер тоже. Докажите, что за $n$ дней он пройдёт все улицы целиком.

*Максим Дидин*