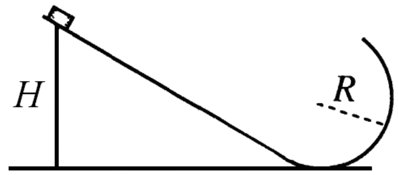
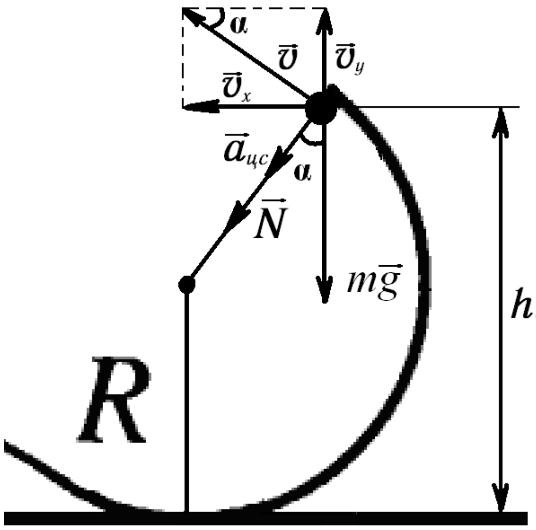
Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада 2018-2019
ФИЗИКА (11 класс)
Заключительный этап
(ОТВЕТЫ)



1. На соревнованиях по фристайлу спортсмен начинает съезжать с горки высотой $\boldsymbol{H}$ под действием только силы тяжести. Проехав по закруглению радиуса $\boldsymbol{R = H/2}$, он в воздухе выполняет акробатические элементы. Определить максимальную высоту от основания горки, на которую спортсмен сможет подняться во время своего полёта. Размерами спортсмена по сравнению с $\boldsymbol{H}$ пренебречь. Считать, что трение отсутствует.

Решение

1. Найдём скорость спортсмена в момент его отрыва от закруглённой части.
   Изобразим рисунок. Расставим силы. **(2 балла)**



По закону сохранения механической энергии:

$$mgH = mgh_0 + \frac{mv^2}{2} = mg(R + R\cos\alpha) + \frac{mv^2}{2} \qquad (1)\ \textbf{(1 балл)}$$

По второму закону Ньютона: $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{öñ}$. В момент отрыва от поверхности $N = 0$. Поэтому,

$$mg\cos\alpha = m\frac{v^2}{R}, \qquad gR\cos\alpha = v^2 \qquad (2)\ \textbf{(1 балл)}$$

Подставляя (2) в (1), найдём скорость спортсмена:

$$gH = gR + gR\cos\alpha + \frac{v^2}{2} = gR + v^2 + \frac{v^2}{2},$$

$$g(H - R) = \frac{3v^2}{2}, \qquad v = \sqrt{\frac{2g(H - R)}{3}} \qquad (3)$$

Зная скорость можно выразить из (2) значение cosα:

$$\cos\alpha = \frac{v^2}{gR} = \frac{2g(H-R)}{3gR} = \frac{2}{3}\left(\frac{H}{R}-1\right),$$

С учётом условия: $\cos\alpha = \frac{2}{3}(2-1) = \frac{2}{3}$. **(1 балл)**

2. Найдём высоту, на которую поднимется спортсмен после отрыва от поверхности. Из уравнений кинематики:

$$h_1 = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \qquad v_y = 0 = v_{0y} - gt, \tag{4}$$

где $v_{0y} = v \cdot \sin\alpha$.

Решая совместно (4), получим $h_1 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g}$. (5)

Найдём sinα: $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. (6) **(2 балла)**

Подставляя (6) и (3) в (5), получим:

$$h_1 = \frac{v^2 \cdot 5}{2g \cdot 9} = \frac{5v^2}{18g} = \frac{5}{18g} \cdot \frac{2g(H-R)}{3} = \frac{5(H-R)}{27}.$$

С учётом условия: $h_1 = \frac{5}{54}H$. **(1 балл)**

3. Окончательно максимальную высоту от основания горки, на которую спортсмен сможет подняться во время своего полёта, можно найти как:

$$h_{max} = h_0 + h_1 = R + R\cos\alpha + \frac{5}{54}H = H\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{5}{54}\right) =$$

$$= H\left(\frac{27+18+5}{54}\right) = \frac{50}{54}H = \frac{25}{27}H$$

(2 балла)

Ответ: $h_{max} = \frac{25}{27}H$.

2. Водолаз, находясь под водой на глубине $\boldsymbol{h}$, пускает пузырёк воздуха. Определите, а) какой путь по вертикали пройдёт пузырёк, всплывая на поверхность, к моменту времени, когда его объём увеличится в $\boldsymbol{\eta}$ раз; б) на какой глубине находится пузырёк и в) каково его ускорение в этот момент. Изменением температуры воздуха в пузырьке и сопротивлением воды движению пузырька пренебречь. Плотность воды $\boldsymbol{\rho}$, атмосферное давление $\boldsymbol{P_0}$, молярная масса воздуха $\boldsymbol{\mu}$, температура воздуха в пузырьке $\boldsymbol{T}$.

Решение:

При изотермическом процессе: $P_1V_1 = P_2V_2$. (1) **(1 балл)**

Давление на дне и в той точке, где объём пузырька будет в η больше:

$$P_1 = P_0 + \rho gh,$$
$$P_2 = P_0 + \rho gh', \tag{2}$$

где $h' = h - \Delta h$. **(2 балла)**

Выразив отношения давлений из (1) и (2), и приравняв их, получим

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{V_2}{V_1}=\eta, \qquad \frac{P_1}{P_2}=\frac{P_0+\rho gh}{P_0+\rho gh'}=\eta. \qquad (3)$$

а) Далее выразим путь Δh, пройденный пузырьком по вертикали:

$$\frac{P_0+\rho gh}{P_0+\rho g(h-\Delta h)}=\eta, \qquad P_0+\rho gh=\eta P_0+\eta\rho gh-\eta\rho g\Delta h,$$

$$\eta\rho g\Delta h=(\eta-1)P_0+(\eta-1)\rho gh,$$

$$\Delta h=\frac{(\eta-1)}{\eta}\left(\frac{P_0}{\rho g}+h\right).$$ **(3 балла)**

б) Из (3) выразим глубину h', на которой находится пузырёк в этот момент

$$P_0+\rho gh=\eta P_0+\eta\rho gh', \qquad \rho gh-P_0(\eta-1)=\eta\rho gh',$$

$$h'=\frac{\rho gh-P_0(\eta-1)}{\eta\rho g}=\frac{1}{\eta}\left(h-\frac{P_0(\eta-1)}{\rho g}\right)$$ **(2 балла)**

в) Определим ускорение пузырька. В любой момент на пузырёк действует постоянная сила тяжести и изменяющаяся с глубиной сила Архимеда. В проекции на ось OY второй закон Ньютона можно записать:

$$\rho gV(h)-mg=ma(h), \qquad (4)$$ **(2 балла)**

где массу воздуха в пузырьке можно определить из уравнения состояния идеального газа:

$$PV=\frac{m}{\mu}RT, \qquad m=\frac{\mu PV}{RT}. \qquad (5)$$ **(1 балл)**

Давление на требуемой глубине (2): $P_2=P_0+\rho gh'$.

Выразив из (4) ускорение, подставив массу (5) и необходимое давление, получим:

$$a(h')=\frac{\rho gV(h')}{m}-g=g\left(\frac{\rho V(h')\cdot RT}{\mu P_2V(h')}-1\right)=g\left(\frac{\rho RT}{\mu(P_0+\rho gh')}-1\right)$$ **(4 балла)**

Ответ: а) $\Delta h=\frac{(\eta-1)}{\eta}\left(\frac{P_0}{\rho g}+h\right)$; б) $h'=\frac{1}{\eta}\left(h-\frac{P_0(\eta-1)}{\rho g}\right)$; в) $a(h')=g\left(\frac{\rho RT}{\mu(P_0+\rho gh')}-1\right)$

3. Конденсатор емкостью 50 мкФ заряжен до напряжения 100 В. К нему подключается конденсатор с емкостью 3 мкФ, в результате чего последний заряжается. Затем, отключив этот конденсатор, заряжают таким же образом второй конденсатор с той же емкостью (3 мкФ), третий и т. д. – всего 10 штук. После этого все заряженные конденсаторы по 3 мкФ соединяют последовательно и выводы батареи замыкают на сопротивление 100 Ом. Какой ток пойдет через сопротивление в начальный момент времени? Сколько энергии выделится на сопротивлении за время, пока ток уменьшится в 1,5 раза?

Решение:

1. Заряд на C_0

$$q_0=C_0U_0$$

Параллельное подключение первого конденсатора даёт уравнение:

$$C_0U_0=(C_0+C_1)U_1$$

$=> U_1=\frac{C_0U_0}{C_0+C_1}$ - напряжение на подключенном конденсаторе и оставшееся на первом.

Оставшийся заряд на C_0

$$q_1=C_0U_1$$

Параллельное подключение второго конденсатора дает уравнение

$C_0U_1 = (C_0 + C_1)U_2$

$=> U_2 = \frac{C_0}{C_0+C_1}U_1$ – напряжение на 2 конденсаторе и оставшееся на C_0 **(4 балла)**

Для 3-го по аналогии:

$$U_3 = \frac{C_0}{C_0 + C_1}U_2$$

Для 4:

$$U_4 = \frac{C_0}{C_0 + C_1}U_3$$

Для 5:

$$U_5 = \frac{C_0}{C_0 + C_1}U_4$$

И так далее. **(2 балла)**

Хорошо видно, что каждое следующее напряжение отличается в одно и то же число раз от предыдущего, а значит – все напряжения образуют геометрическую прогрессию.

Полное напряжение на батарее из конденсаторов емкостью C_1 при их последовательном соединении будет:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + \ \dots + U_{10}$$

Как сказано выше, напряжения образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой

$$q = \frac{C_0}{C_0 + C_1}$$

По формуле для суммы геометрической прогрессии

$$U = \frac{U_1(1 - q^{10})}{1 - q} = \frac{C_0U_0}{C_0 + C_1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{C_0}{C_0 + C_1}\right)^{10}}{1 - \frac{C_0}{C_0 + C_1}} = \frac{C_0U_0}{C_1} \cdot \left(1 - \left(\frac{C_0}{C_0 + C_1}\right)^{10}\right)$$

Подстановка исходных данных приводит к величине полного напряжения на батарее

$U = \frac{50 \cdot 100}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{50}{50+3}\right)^{10}\right) = \frac{5000}{3} \cdot (1 - 0{,}558) = 737(\text{В})$ **(4 балла)**

2. Начальная сила тока:

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{737}{100} = 7{,}37 \text{ А}$$

3. Согласно закону Ома

$$I = \frac{U}{R}$$

Значит, сила тока уменьшится в 1,5 раза, когда напряжение упадёт в 1,5 раза.

Начальная энергия батареи:

$$W_0 = \frac{CU^2}{2}$$

Конечная энергия:

$$W = \frac{C\left(\frac{U}{1{,}5}\right)^2}{2}$$

Разница энергий – тепло, выделившееся на R:

$Q = \frac{CU^2}{2} - \frac{C\left(\frac{U}{1,5}\right)^2}{2} = \frac{CU^2}{2}\left(1 - \frac{1}{1,5^2}\right)$ **(4 балла)**

Емкость батареи последовательно заряженных конденсаторов емкостью C_1:

$$\frac{1}{C} = \frac{n}{C_1} => C = \frac{C_1}{n} = \frac{3}{10} = 0,3(\text{мкФ})$$

Отсюда величина тепла, выделившегося на сопротивлении

$Q = \frac{0,3 \cdot 10^{-6} \cdot 737^2}{2}\left(1 - \frac{1}{2,25}\right) = 0,045(\text{Дж})$ **(1 балл)**

Ответ: $0,045(\text{Дж})$

4. Две заряженные частицы с зарядами одного знака $\boldsymbol{q_1}$ и $\boldsymbol{q_2}$ и массами $\boldsymbol{m_1}$ и $\boldsymbol{m_2}$ движутся вместе по одной прямолинейной траектории с одинаковыми скоростями $\boldsymbol{v}$. Частицы пролетают через постоянное электрическое поле, представляющее собой полосу шириной $\boldsymbol{d}$. После пролета через это поле направление скорости первой частицы повернулось на $60°$, а модуль скорости уменьшился вдвое. Направление скорости второй частицы изменилось на 90°. Определите расстояние, на котором будут находиться частицы через время $\boldsymbol{t}$, если это время больше времени пролета обоих частиц через поле.

Решение:
а) Для первой частицы справедлива схема изменения скорости:

$$V_1 = \frac{1}{2}V$$

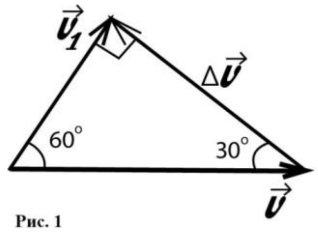


Рис. 1

Из рисунка 1 видно, что эти вектора образуют прямоугольный треугольник, у которого второй острый угол = 30°. Т.к. в эл. поле частицы находятся под действием силы Кулона => её направление совпадает с $\Delta\vec{V}$, другими словами влёт частиц в эл. поле выглядит так:

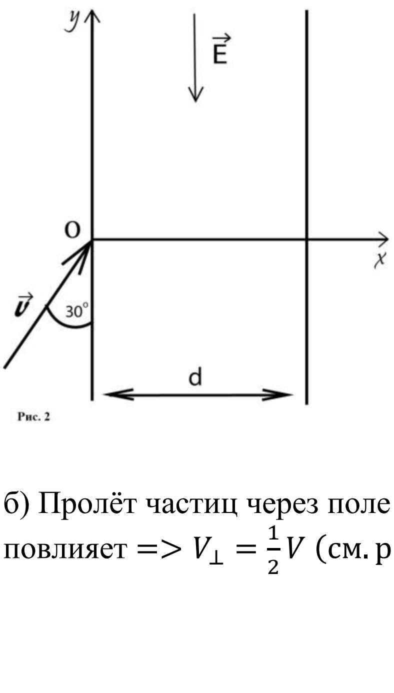


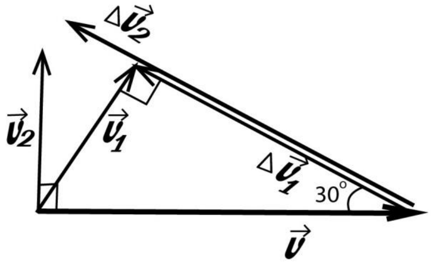
Рис. 2

(6 баллов)

б) Пролёт частиц через поле происходит за счёт компоненты скорости $\perp \vec{E}$. На неё сила Кулона не повлияет $=> V_{\perp} = \frac{1}{2}V$ (см. рис. 1) $=>$ время пролёта через поле для обеих частиц

$$\tau = \frac{d}{V_\perp} = \frac{2d}{V}$$ **(2 балла)**

в) Т.к. направление ускорения для обеих частиц одно и то же, то схематично изменение скорости обеих частиц выглядит так:



Из чего видно, что

$$\Delta V_1 = V\cos 30° = V\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta V_2 = \frac{V}{\cos 30°} = \frac{2V}{\sqrt{3}}$$ **(2 балла)**

Ускорения точек

$$a_1 = \frac{\Delta V_1}{\tau} = V\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{2d}{V} = \frac{V^2\sqrt{3}}{4d}$$

$$a_2 = \frac{\Delta V_2}{\tau} = \frac{2V}{\sqrt{3}} : \frac{2d}{V} = \frac{V^2}{d\sqrt{3}}$$ **(2 балл)**

Из рис. 2 видно, что продольная при входе в поле компонента скорости частиц

$$V_\parallel = V\cos 30° = V\frac{\sqrt{3}}{2}$$ **(1 балл)**

г) Движение обеих частиц внутри поля в системе координат Oxy (см. рис. 2) подчиняется уравнениям:

$$V_{1x} = \frac{V}{2};\ x_1 = \frac{V}{2}\cdot t_1;\ V_{1y} = V_\parallel - a_1 t_1 = V\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{V^2\sqrt{3}}{4d}t_1$$

$$y_1 = V_\parallel t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2} = V\frac{\sqrt{3}}{2}t_1 - \frac{V^2\sqrt{3}}{8d}t_1^2$$

$$V_{2x} = \frac{V}{2}; x_2 = \frac{V}{2}t_1; V_{2y} = V_\parallel - a_2 t_2 = V\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{V^2}{d\sqrt{3}}\cdot t_1$$

$$y_2 = V_\parallel t_1 - \frac{a_2 t_1^2}{2} = V\frac{\sqrt{3}}{2}t_1 - \frac{V^2}{2d\sqrt{3}}t_1^2$$ **(5 баллов)**

Подстановка $\tau = \frac{2d}{V}$ даёт характеристики частиц на выходе из поля:

$$V_{1x} = \frac{V}{2};\ x_1 = d;\ V_{1y} = V\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{V^2\sqrt{3}}{4d}\cdot\frac{2d}{V} = 0$$

$$y_1 = V\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2d}{V} - \frac{V^2\sqrt{3}}{8d}\cdot\frac{4d^2}{V^2} = d\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V_{2x} = \frac{V}{2};\ x_2 = d;\ V_{2y} = V\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{V^2}{d\sqrt{3}}\cdot\frac{2d}{V} = V\frac{\sqrt{3}}{2} - V\frac{2\sqrt{3}}{3} = -V\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$y_2 = V\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2d}{V} - \frac{V^2}{2d\sqrt{3}}\cdot\frac{4d^2}{V^2} = d\sqrt{3} - \frac{2d\sqrt{3}}{3} = \frac{d\sqrt{3}}{3}$$ **(4 балла)**

Схема приведена на рис. 3

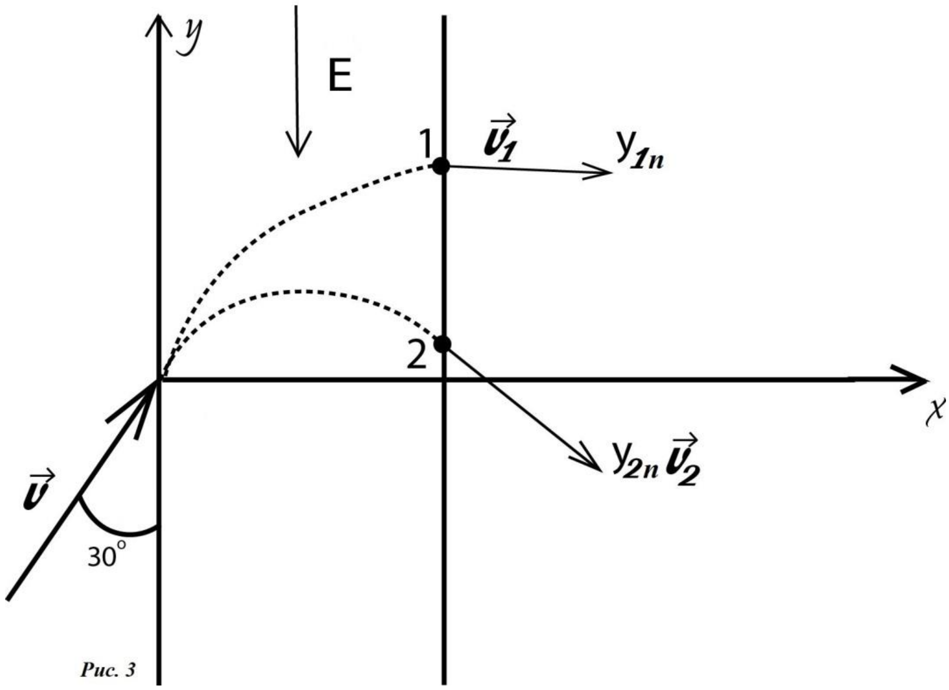


Рис. 3

(4 балла)

д) Из рис. 3 видно, что по горизонтали частицы движутся одинаково; расстояние между ними

$$S = y_{1n} - y_{2n}$$

$$y_{1n} = y_1 = d\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y_{2n} = y_2 + V_{2y}\cdot(t-\tau) = \frac{d\sqrt{3}}{3} - V\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\left(t - \frac{2d}{V}\right) = \frac{d\sqrt{3}}{3} + \frac{d\sqrt{3}}{3} - V\frac{\sqrt{3}}{6}t = \frac{2d\sqrt{3}}{3} - V\frac{\sqrt{3}}{6}t$$

$$S = \frac{d\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{2d\sqrt{3}}{3} - V\frac{\sqrt{3}}{6}t\right) = V\frac{\sqrt{3}}{6}t - \frac{d\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}(vt - d)$$ **(4 балла)**

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{6}(vt-d)$

5. Плосковыпуклая линза сделана из стекла с коэффициентом преломления 1,6. Радиус сферической поверхности 13 см, толщина линзы 1 см. Со стороны плоской поверхности линзы на ее главной оптической оси находится точечный источник света. Расстояние от источника до плоской поверхности линзы – 30 см. Четкое изображение источника получают на экране, открыв только небольшой участок линзы вблизи главной оптической оси (используя диафрагму с малым отверстием). После этого диафрагму убирают, открывая всю поверхность линзы. Найти диаметр получившегося на экране светлого пятна.

1. Радиус линзы r определяется из следующего рисунка:

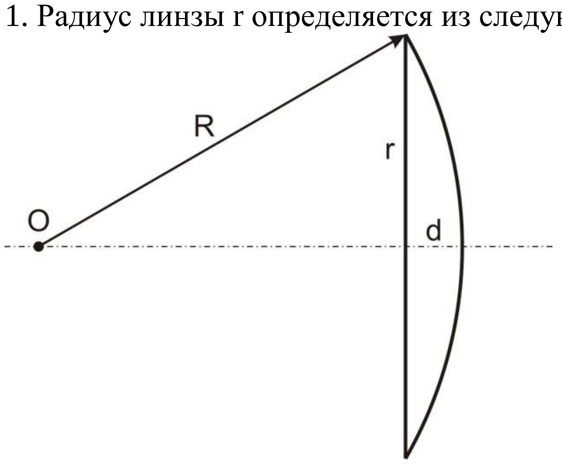


Рис. 1

Из рисунка видно, что

$$r = \sqrt{R^2 - (R-d)^2} = \sqrt{13^2 - (13-1)^2} = 5(\text{см})$$ **(1 балл)**

2. Когда на линзе-диафрагме углы, образованные лучами света между собой и с главной оптической осью – малы. Для таких углов справедливо равенство:

$sin\alpha = tg\alpha = \alpha$ (угол α измеряется в радианах) **(2 балла)**

3. Построение изображения светящейся точки S при наличии диафрагмы происходит согласно рисунку (показана только та часть линзы, которая открыта диафрагмой)

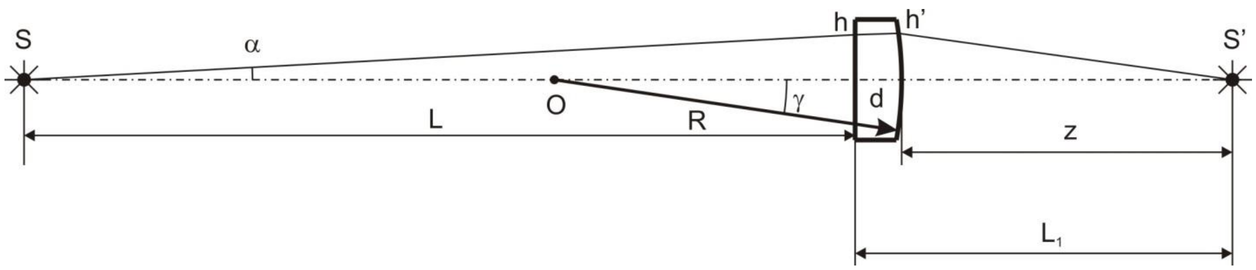


Рис. 2 **(4 балла)**

4. Ход произвольного луча света при поставленной диафрагме:

а) Пусть луч входит в линзу в точке на расстоянии h от главной оптической оси (h – мало по сравнению с R и L). Тогда угол наклона луча к главной оптической оси

$$\alpha = \frac{h}{L}$$

Этот же угол является углом падения на плоскую поверхность линзы. **(1 балл)**

б) Ход луча внутри линзы показан на рис. 3.

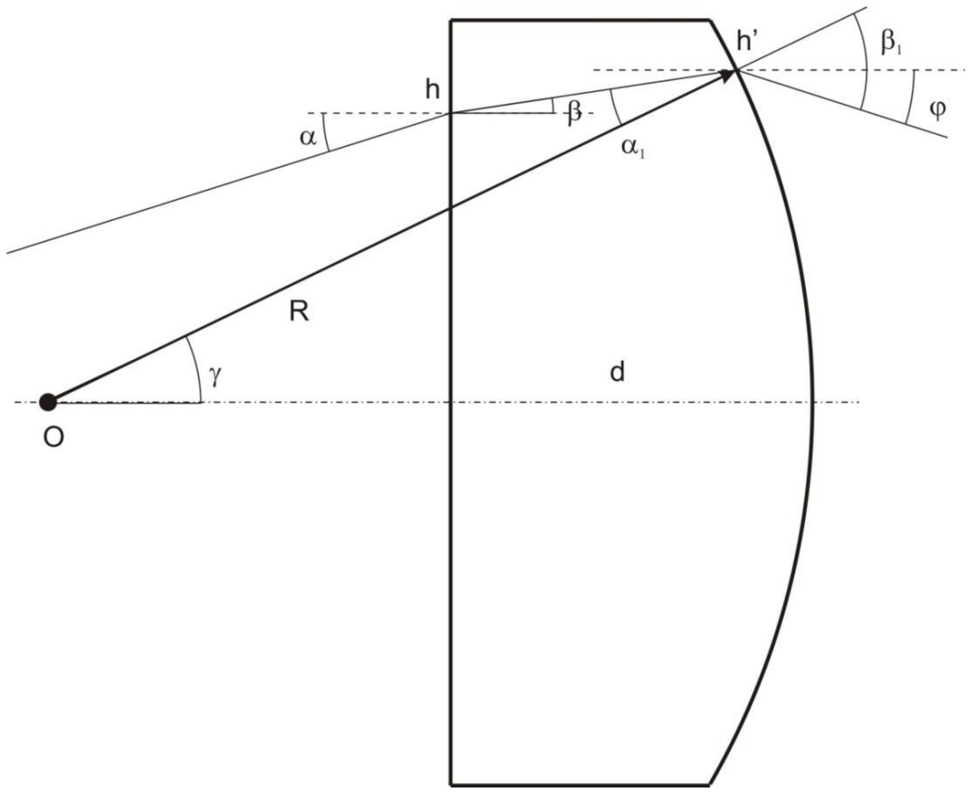


Рис. 3

$\beta = \frac{\alpha}{n} = \frac{h}{nL} -$ угол преломления внутри лизны **(4 балла)**

в)

При малом отверстии толщина всего участка линзы примерно равна d, а значит, расстояние от выхода луча до главной оптической оси

$$h' = h + d \cdot \beta = h + \frac{dh}{nL} = h\left(1 + \frac{d}{nL}\right) = h\frac{nL+d}{nL} = \frac{h}{nL}(nL + d)$$ **(2 балла)**

г) Угол падения внутри линзы, как видно из рисунка

$$\alpha_1 = \gamma - \beta$$

В свою очередь

$$\gamma = \frac{h'}{R} = h\frac{nL+d}{nLR} => \alpha_1 = h\frac{nL+d}{nLR} - \frac{h}{nL} = \frac{h}{nL}\left(\frac{nL+d}{R} - 1\right) = h\frac{nL+d-R}{nLR}$$ **(1 балл)**

д) Угол преломления луча на выходе из линзы

$$\beta_1 = n\alpha_1 = h\frac{nL+d-R}{LR}$$ **(1 балл)**

е) Угол наклона выходящего луча к главной оптической оси, как видно из рисунка

$$\varphi = \beta_1 - \gamma = h\frac{nL + d - R}{LR} - h\frac{nL + d}{nLR} = \frac{h}{LR}\left(nL + d - R - L - \frac{d}{n}\right) =$$
$$= \frac{h}{LR}\left((n-1)L - R + d\frac{n-1}{n}\right)$$ **(1 балл)**

ж) Расстояние от выпуклой поверхности линзы до изображения, как видно из рис. 2

$$z = \frac{h'}{\varphi} = \frac{\frac{h}{nL}(nL + d)}{\frac{h}{LR}\left((n-1)L - R + d\frac{n-1}{n}\right)} = \frac{R(nL + d)}{n\left((n-1)L - R + d\frac{n-1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{13\cdot(1{,}6\cdot 30+1)}{1{,}6\cdot\left(0{,}6\cdot 30-13+1\cdot\frac{0{,}6}{1{,}6}\right)} = \frac{13\cdot 49}{1{,}6\cdot(5+0{,}375)} = 74{,}07(\text{см})$$ **(1 балл)**

Расстояние от плоской поверхности до изображения

$$L_1 = Z + d = 75(\text{см})$$

5. Когда диафрагма с линзы снята лучи света проходят через всю линзу, включая края. Для луча, проходящего через край линзы, углы падения и преломления малыми не будут. Ход луча через край линзы показан на рис.4. Ход луча внутри края линзы аналогичен показанному на рис. 3.

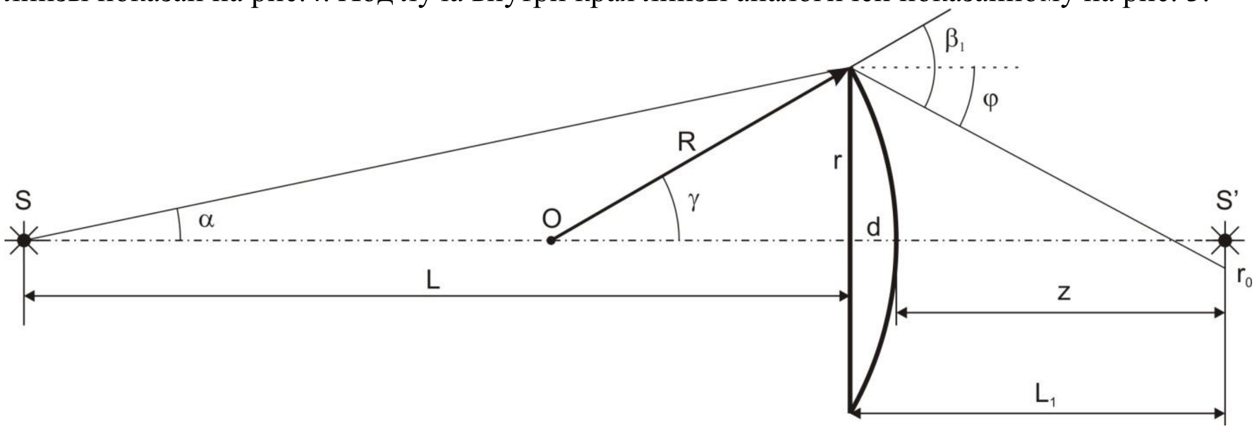


Рис. 4 **(4 балла)**

а) Угол падения луча на плоскую поверхность

$$sin\alpha = \frac{r}{L} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$ **(1 балл)**

б) Угол преломления луча на плоской поверхности

$$sin\beta = \frac{sin\alpha}{n} = \frac{5}{30\cdot 1{,}6} = \frac{5}{48};\ \beta = 5{,}98°$$ **(1 балл)**

Из-за малой толщины линзы на краях поправку в высоту вносить не надо.

в) Угол падения на выпуклую поверхность

$$\alpha_1 = \gamma - \beta$$ **(1 балл)**

На рис. 4 видно, что

$$sin\gamma = \frac{r}{R} = \frac{5}{13};\ \gamma = 22{,}62°$$

Поэтому $\alpha_1 = 22{,}62° - 5{,}98° = 16{,}64°$ **(1 балл)**

г) Угол преломления на выходе

$$sin\beta_1 = n \cdot sin\alpha_1 = 1{,}6 \cdot \sin(16{,}64°) = 0{,}458 => \beta_1 = 27{,}27°$$ **(1 балл)**

д) Угол наклона луча к главной оптической оси

$$\varphi = \beta - \gamma = 27{,}27° - 22{,}62° = 4{,}65°$$ **(1 балл)**

6. Радиус пятна

$$r_0 = |r - L_1 \cdot tg\varphi| = 5 - 74{,}73 \cdot tg4{,}65° = 1{,}099(\text{см})$$

Диаметр пятна

$$d_0 = 2r_0 = 2{,}2(\text{см})$$ **(2 балла)**

Ответ*:* 2,2(см)