Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области

Открытая региональная межвузовская олимпиада 2015-2016

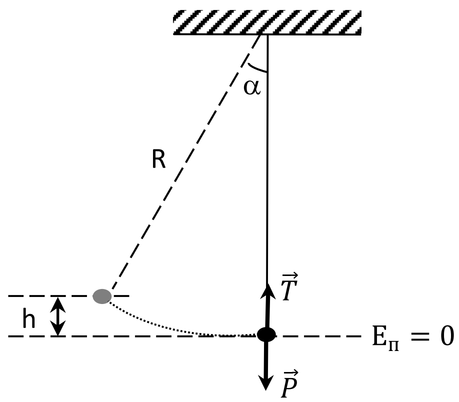
Физика (заключительный этап) 9 класс (решения)

II этап

1. «Давай, пошалим», – сказал Карлсон Малышу, и прыгнул на люстру массой $\boldsymbol{m} = 10\ кг$, которая висит на цепи и выдерживает максимальную нагрузку в $\boldsymbol{T} = 500\ Н$. Какой максимально возможный угол отклонения может выдержать цепь люстры при дальнейшем раскачивании, если масса Карлсона $\boldsymbol{M} = 25\ кг$?

Решение:

Рисунок **(1 балл)**



Так как трение в системе отсутствует, то можно применить закон сохранения механической энергии. В положении 1 на высоте h суммарная механическая энергия ($\upsilon = 0$)

$E_1 = (M+m)gh.$ **(2 балла)**

В положении 2 ($E_п = 0$):

$E_2 = \frac{(M+m)\upsilon^2}{2}.$ **(2 балла)**

$$E_1 = E_2$$

$(M+m)gh = \frac{(M+m)\upsilon^2}{2}.$ **(2 балла)**

Отсюда следует, что $\upsilon^2 = 2gh$.

В положении 2 запишем II закон Ньютона в проекции на направление центростремительного ускорения (к точке подвеса).

$T - P = (M+m)a,$ **(2 балла)**

где $a = \frac{\upsilon^2}{R}$. С учетом этого II закон Ньютона примет вид.

$T - P = (M+m)\frac{\upsilon^2}{R}.$ **(2 балла)**

Заменим здесь $\upsilon^2 = 2gh$:

$T - P = (M+m)\frac{2gh}{R}.$ **(2 балла)**

Отсюда выразим h: $\frac{(T-P)R}{(M+m)2g} = h.$ **(2 балла)**

Из рисунка следует: $\cos\alpha = \frac{R-h}{R}$, или $\cos\alpha = 1 - \frac{h}{R}.$ **(1 балл)**

Если сюда подставим h, то получим значение косинуса угла α:

$\cos\alpha = 1 - \frac{T-P}{(M+m)2g} = 1 - \frac{T-(M+m)g}{(M+m)2g}.$ **(2 балла)**

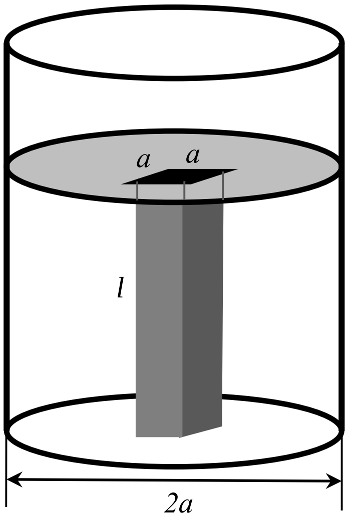
Подставляя численные значения, получаем результат:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{500-(25+10)\cdot 10}{(25+10)\cdot 2\cdot 10} = 0{,}79.$$

$\alpha = \arccos 0{,}79 = 38{,}2°.$ **(2 балла)**

Ответ: $38{,}2°$.

2. В стеклянный сосуд цилиндрической формы и дном диаметра $2\boldsymbol{a}$ вставлен медный стержень квадратного сечения со стороной $\boldsymbol{a}$ и длиной $\boldsymbol{l}$. Затем в сосуд наливают ртуть до уровня стержня. Рассчитайте, во сколько раз изменится сопротивление данной конструкции, если медный стержень вынуть из ртути, но до соприкосновения поверхностей. Удельное сопротивление меди равно $\boldsymbol{\rho_м}$, ртути – $\boldsymbol{\rho_р}$.



Решение:

При погруженном стержне систему можно рассмотреть как параллельное соединение медного и ртутного проводников.

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_р} + \frac{1}{R_м}$$ **(2 балла)**

Сопротивление медного проводника $R_м = \rho_м \frac{l}{a^2}$. **(2 балла)**

Сопротивление ртутного проводника $R_р = \rho_р \frac{l}{\frac{\pi 4a^2}{4} - a^2} = \rho_р \frac{l}{a^2(\pi - 1)}$. **(2 балла)**

Подставим эти значения в закон параллельного соединения

$$\frac{1}{R_1} = \frac{a^2}{\rho_м l} + \frac{a^2(\pi-1)}{\rho_р l} = \frac{a^2\rho_р + a^2\rho_м(\pi-1)}{\rho_р\rho_м l}.$$ **(2 балла)**

Отсюда выразим сопротивление R_1:

$$R_1 = \frac{\rho_р\rho_м l}{a^2\left(\rho_р + \rho_м(\pi-1)\right)}.$$ **(2 балла)**

Прежде чем найти сопротивление системы после вынимания стержня из ртути, учтем, что уровень ртути упадет, но ее объем останется неизменным. Объем ртути при погруженном стержне:

$$V_р = \frac{\pi 4a^2}{4} \cdot l - a^2 \cdot l = a^2 \cdot l(\pi - 1).$$ **(1 балл)**

Тот же объем ртути, но в отсутствии стержня:

$$V_р = \frac{\pi 4a^2}{4} \cdot h,$$ **(1 балл)**

где h – высота ртути в сосуде после вынимания медного стержня. Приравняем эти объемы и выразим высоту h.

$$a^2 \cdot l(\pi - 1) = \frac{\pi 4a^2}{4} \cdot h$$

$$h = \frac{l(\pi-1)}{\pi}.$$ **(2 балла)**

Сопротивление медного стержня не изменится, так как его геометрические параметры остались прежними. А сопротивление ртути станет

$$R_р' = \rho_р \frac{h}{\frac{\pi 4a^2}{4}} = \rho_р \frac{\frac{l(\pi-1)}{\pi}}{\pi a^2} = \rho_р \frac{l(\pi-1)}{\pi^2 a^2}.$$ **(2 балла)**

При вынимании стержня и приведении его в соприкосновение с ртутью, получаем последовательное соединение разнородных проводников.

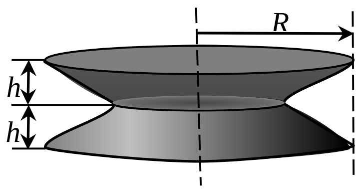
$$R_2 = \rho_м \frac{l}{a^2} + \rho_р \frac{l(\pi-1)}{\pi^2 a^2} = \frac{l\left(\rho_м\pi^2 + \rho_р(\pi-1)\right)}{\pi^2 a^2}.$$ **(2 балла)**

Теперь можно найти отношение сопротивлений согласно условию задачи.

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{l\left(\rho_м\pi^2 + \rho_р(\pi-1)\right)}{\pi^2 a^2} \cdot \frac{a^2\left(\rho_р + \rho_м(\pi-1)\right)}{\rho_р\rho_м l} = \frac{\left(\rho_м\pi^2 + \rho_р(\pi-1)\right)\left(\rho_р + \rho_м(\pi-1)\right)}{\rho_р\rho_м\pi^2}.$$ **(2 балла)**

Ответ: $\frac{R_2}{R_1} = \frac{\left(\rho_м\pi^2 + \rho_р(\pi-1)\right)\left(\rho_р + \rho_м(\pi-1)\right)}{\rho_р\rho_м\pi^2}$.

3. На дне сосуда поместили симметричное тело, выточенное из целого куска пористого вещества с плотностью ρ_0. Высота верхней и нижней частей равна h. Затем в сосуд заливают жидкость с некоторой плотностью ρ_1 до уровня h. После доливают менее плотную жидкость с ρ_2 ($\rho_1 > \rho_2$). Жидкости несмешиваемые и граница раздела жидкостей не смещается. Выяснилось, что когда верхняя грань тела скрылась под поверхностью второй жидкости, его давление на дно сосуда стало равным нулю. Определите плотность ρ_2 верхней жидкости.



Решение:

Так как давление тела на дно сосуда равно нулю, то оно плавает в двух жидкостях. Это возможно, если вес тела уравновешивается силами Архимеда, то есть:

$$P = F_{A1} + F_{A2}.$$ **(4 балла)**

Распишем все силы.

$$\rho_0 V g = \rho_1 \frac{V}{2} g + \rho_2 \frac{V}{2} g.$$ **(6 баллов)**

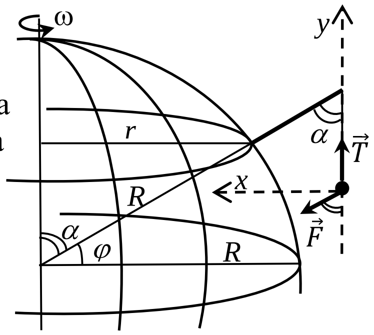
Поделив на объем левую и правую части уравнения, получаем

$$\rho_0 g = \rho_1 \frac{g}{2} + \rho_2 \frac{g}{2}.$$ **(6 баллов)**

$$\rho_2 = 2\rho_0 - \rho_1.$$ **(4 балла)**

Ответ: $\rho_2 = 2\rho_0 - \rho_1$.

4. В научной фантастике описана высадка астронавтов на планету Зига, имеющую массу M и радиус R. Когда они оказались на широте φ, то решили определить направление на центр планеты с помощью отвеса. Однако линия отвеса оказалась параллельна оси вращения планеты. Определите угловую скорость вращения Зиги.



Решение:

рисунок **(4 балла)**

На груз отвеса действуют две силы: $\vec{F}$ – притяжение планеты и $\vec{T}$– натяжения нити. Согласно второму закону Ньютона

$$\vec{F} + \vec{T} = m\vec{a}.$$ **(2 балла)**

В проекциях на оси:

$$ox: F \sin\alpha = ma$$

$$oy: T - F\cos\alpha = 0$$ **(4 балла)**

Учтем, что $a = \omega^2 r = \omega^2 R \sin\alpha$, так как $r = \sin\alpha$. **(2 балла)**

Сила Всемирного тяготения $F = G\frac{mM}{R^2}$. Подставим это в уравнение проекции на ось x.

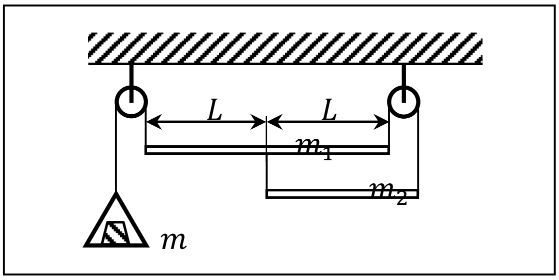
$$G\frac{mM}{R^2}\sin\alpha = m\omega^2 R\sin\alpha.$$ **(4 балла)**

И выразим из этого уравнения угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{G\frac{M}{R^3}}.$$ **(4 балла)**

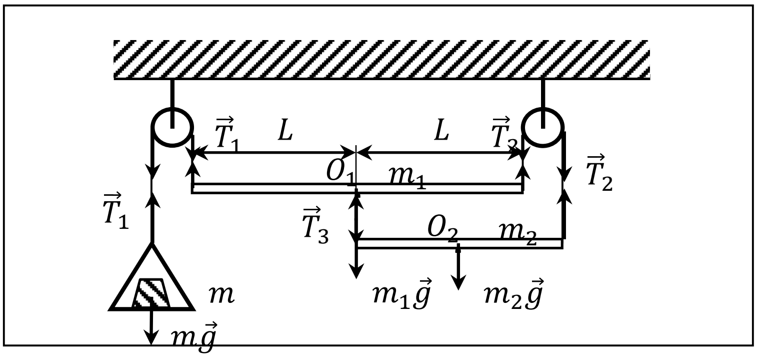
Ответ: $\omega = \sqrt{G\frac{M}{R^3}}$.

5. Рабочим на стройке необходимо уравновесить систему из двух балок и двух блоков, изображенную на рисунке. Однако выяснилось, что масса m_1 верхней балки неизвестна. Масса нижней балки $m_2 = 100\,кг$. Пренебрегая трением в осях блоков, найдите массу груза m, необходимого для уравновешения системы. Все тросы вертикальны и нерастяжимы.



Решение:

Рисунок **(2 балла)**



Рассмотрим моменты сил относительно точек O_1и O_2:

$$O_1: T_1L = T_2L$$

O_2: $T_3l = T_2l,$ **(4 балла)**

где $2l$ – длина нижней балки.

Тогда: $T_1 = T_2 = T_3 = T$ (1) **(2 балла)**

Рассмотрим теперь действующие на систему силы:

$T_1 + T_2 = m_1g + T_3;\ T_3 + T_2 = m_2g$ (2) **(4 балла)**

Из рисунка видно, что сила натяжения $T_1 = mg$ (3) **(2 балла)**

Подставим выражение (1) в (2) и (3):

$T = m_1g; 2T = m_2g; T = mg$ **(2 балла)**

Откуда $2mg = m_2g,\ m = \frac{1}{2}m_2$ **(4 балла)**

Ответ: 50кг