Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области

Открытая региональная межвузовская олимпиада 2015-2016

Физика (заключительный этап) 11 класс (решения)

2 этап

Вариант 1

1. Перед студентом стоит задача: перемотать ленту с одной катушки на другую так, чтобы линейная скорость движения ленты всегда была одинакова и равна ***v***. Радиус каждой катушки ***R***, толщина ленты ***d*** (***d***<<***R***). В начальный момент времени вся лента намотана на одну из катушек. Помогите студенту определить, как он должен изменять со временем угловую скорость вращения катушки, на которую наматывается лента.

Решение:

Для того, чтобы линейная скорость ленты была постоянна, необходимо, чтобы в любой момент времени выполнялось равенство:

$$\omega r = v. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Явный вид зависимости радиуса катушки с намотанной лентой от времени проще всего найти из следующих соображений: пусть через время t после начала движения радиус катушки с намотанной лентой равен r. Тогда на катушке намотана лента объемом

$$V = \pi\left(r^2 - R^2\right)\cdot l, \qquad \textbf{(4 балла)}$$

где l – ширина ленты.

В то же время этот же объем ленты прошел мимо некоторой неподвижной точки со скоростью v, поэтому

$$V = vtld. \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Приравнивая эти выражения, находим

$$r(t) = \sqrt{R^2 + \frac{vtd}{\pi}}. \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Тогда угловая скорость вращения передней

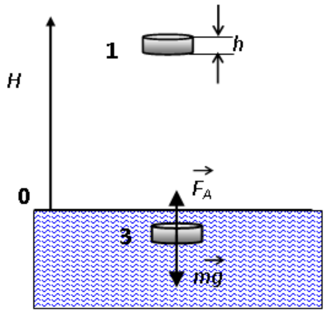
$$\omega(t) = \frac{v}{\sqrt{R^2 + \frac{vtd}{\pi}}}. \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Ответ: $\boxed{\omega(t) = \frac{v}{\sqrt{R^2 + \frac{vtd}{\pi}}}}$

2. Цилиндрическая шайба высотой ***h*** плашмя падает в воду. Плотность шайбы $\rho < \rho_0$ (ρ_0 – плотность воды). С какой высоты должна падать шайба, чтобы она полностью скрылась под водой? Чему будет равен после этого период колебаний шайбы? Трением пренебречь.

Решение:

Работа всех сил (mg и F_A) на пути 1-3 равна приращению энергии на пути 1-3, т.к. скорость в точке 1 и 3 равна нулю, то



$$A_{13} = \Delta E_k = 0. \qquad \textbf{(1 балл)}$$

Работа на пути 1-3

$$A_{13} = A_{mg} + A_{F_A} = 0,$$

$$A_{mg} = -A_{F_A}, \qquad \textbf{(1 балл)}$$

Работа по погружению шайбы против силы Архимеда

$$A = \int_0^h F_A dx = \int_0^h \rho_0 S x\, g\, dx = \rho_0 S \frac{h^2}{2} g = \rho_0 Sh \frac{h}{2} g = \frac{1}{2}\rho_0 Vhg, \qquad \textbf{(1 балл)}$$

На это и пойдет потенциальная энергия:

$$A = U,$$

$$\frac{1}{2}\rho_0 Vhg = mg\left(H + h\right), \text{ считая } h \ll H$$

$$\frac{1}{2}\rho_0 Vhg = mgH,$$

$$\frac{1}{2}\rho_0 Vhg = \rho VgH,$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{\rho} h}. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Колебания шайбы будут происходить под действием силы Архимеда:

$$F_A = \rho_0 Vg = \rho_0 Sxg. \qquad \textbf{(1 балл)}$$

В равновесии $F_A = mg, \quad \rho_0 S x_0 g = mg$. **(1 балл)**

При погружении на x уравнение движения шайбы:

$$ma = mg - F_A, \qquad \textbf{(1 балл)}$$

$$\rho Sh\,\ddot{x} = mg - \rho_0 S\left(x_0 + x\right)g = mg - \rho_0 S x_0 g - \rho_0 Sxg = -\rho_0 Sxg, \qquad \textbf{(3 балла)}$$

$$\rho h\,\ddot{x} + \rho_0 xg = 0,$$

$$\ddot{x} + \frac{\rho_0 g}{\rho h} x = 0 \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho h}}. \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Период колебаний шайбы:

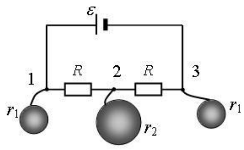
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Тогда период колебаний шайбы:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho h}{\rho_0 g}}}.$$ **(1 балл)**

Ответ: $\boxed{H = \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{\rho}h}$, $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho h}{\rho_0 g}}}$

3. К точкам 1, 2, 3 электрической цепи, изображенной на рисунке, длинными тонкими проводниками подсоединили изначально незаряженные металлические шары с радиусами r_1 и r_2. Найдите заряды, установившиеся на каждом из шаров. Считайте, что расстояние между шарами много больше их размеров, заряд на самой электрической цепи и на соединительных проводниках пренебрежимо мал, а внутреннее сопротивление источника тока равно нулю.



Решение:

После подсоединения к цепи на шарах образуются заряды Q_1, Q_2 и Q_3. Поскольку шары были изначально не заряжены и заряд на соединительных проводах и электрической цепи мал, то

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0. \qquad (1)$$ **(2 балла)**

Найдем разность потенциалов между точками 1 и 2, а также между точками 2 и 3 цепи:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_2} = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varphi_2 - \varphi_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{r_1} = \frac{\varepsilon}{2}.$$ **(3 балла)**

Потенциал в точке 2 равен нулю, тогда

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = 0.$$ **(2 балла)**

Из закона сохранения заряда (1) получаем

$$Q_1 + 0 + Q_3 = 0, \qquad \Rightarrow \qquad Q_1 = -Q_3.$$ **(2 балла)**

Разность потенциалов между точками 1 и 3:

$$\varphi_1 - \varphi_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{r_1} = \varepsilon,$$ **(2 балла)**

$$\varphi_1 - \varphi_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1} = \varepsilon$$ **(2 балла)**

$$\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad Q_1 = 2\pi\varepsilon_0 r\varepsilon.$$ **(2 балла)**

Ответ: $Q_2 = 0$, $\quad Q_1 = -Q_3 = 2\pi\varepsilon_0 r_1\varepsilon$**.**

4. Ныряльщик в солнечный день, находится в море на глубине $\boldsymbol{h}$. При этом он видит в водном «зеркале» над собой отражение участков дна, находящихся от него на расстоянии $\boldsymbol{s}$ и более. Какова глубина $\boldsymbol{H}$ моря в этом месте? Показатель преломления воды $\boldsymbol{n}$. Дно считать ровным, горизонтальным, а глубину моря постоянной.

Решение:

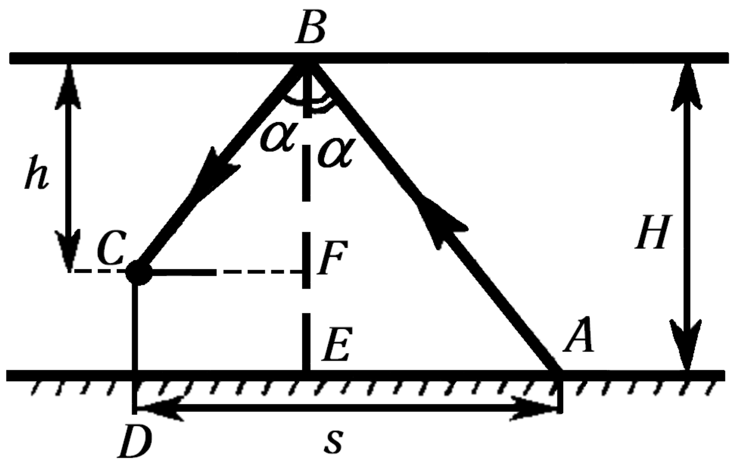


рисунок **(2 балла)**

Луч AB падает на границу «вода-воздух» под углом α, соответствующим предельному углу полного внутреннего отражения. При углах падения меньше чем α, лучи будут выходить в воздух. **(2 балла)**

Тогда $\sin\alpha = \frac{1}{n}$. (1) **(1 балл)**

Расстояние $s = AE + DE$.

Из прямоугольных треугольников ΔAEB и ΔBFC ($CF = DE$):

$$tg\alpha = \frac{DE}{BF} = \frac{AE}{BE}.$$ **(2 балла)**

Учтём, что $BF = h$, $BE = H$. Тогда:

$$s = Htg\alpha + htg\alpha = (H + h)\cdot tg\alpha \qquad (2)$$ **(4 балла)**

Распишем $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$. **(1 балл)**

С учётом (1): $tg\alpha = \frac{1/n}{\sqrt{1-1/n^2}} = \frac{1/n}{1/n\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ **(1 балл)**

Из (2): $H = \frac{s}{tg\alpha} - h = s\sqrt{n^2-1} - h$ **(2 балла)**

Ответ: $\boxed{H = s\sqrt{n^2-1} - h}$

5. Проводящий контур, состоящий из неподвижных полукольца радиуса $\boldsymbol{L}$, отрезка $\boldsymbol{OA}$ и подвижного стержня $\boldsymbol{OC}$, помещён в однородное магнитное поле с индукцией $\boldsymbol{B}$, перпендикулярное плоскости контура (рисунок). Стержень $\boldsymbol{OC}$ имеет сопротивление $\boldsymbol{R}$ и может без трения скользить по полуокружности, вращаясь относительно точки $\boldsymbol{O}$. Сопротивления остальных участков контура пренебрежимо малы. Определите минимальное значение силы $\boldsymbol{F}$, которую нужно приложить к стержню в точке $\boldsymbol{C}$, чтобы он вращался с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$.

Решение:

1. Определим площадь контура *AOCA* для любого момента времени как функцию угла $\angle AOC = \varphi$: $S = \dfrac{\varphi L^2}{2}$ **(4 балла)**

2. Изменение площади контура за промежуток времени Δt

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\cdot\frac{L^2}{2} = \omega\cdot\frac{L^2}{2},$$ **(2 балла)**

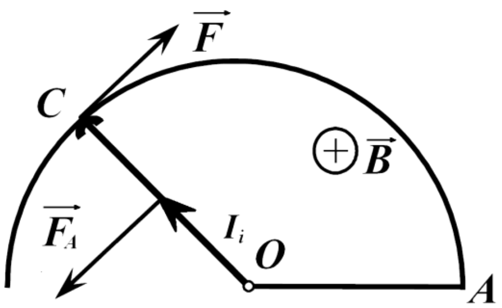
вызывает изменение магнитного потока и возникновение ЭДС индукции:

$$|\varepsilon| = B\cdot\frac{\Delta S}{\Delta t} = B\omega\cdot\frac{L^2}{2}.$$ **(2 балла)**

3. По закону Ома для участка цепи, сила тока в стержне *OC* равна:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BL^2}{2R}\omega.$$ **(2 балла)**

4. На стержень с током со стороны магнитного поля действует сила ампера, приложенная к центру стержня ($\sin\alpha = 1$) и направленная против движения стержня (правило Ленца + «правило левой руки») (см. рисунок): **(2 балла)**



$$F_A = IBL = \frac{B^2L^3}{2R}\omega.$$ **(2 балла)**

5. Условие равномерного вращения стержня – равенство моментов сил F и F_A:

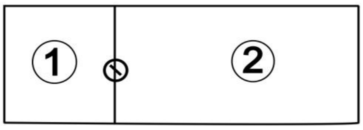
$$F\cdot L = F_A\cdot\frac{L}{2} = \frac{B^2L^3}{2R}\omega\cdot\frac{L}{2}.$$ **(4 балла)**

Откуда, найдём минимальное значение силы F:

$$F = \frac{B^2L^3}{4R}\omega.$$ **(2 балла)**

Ответ: $\boxed{F = \dfrac{B^2L^3\omega}{4R}}$

6. Имеется сосуд, содержащий два отсека с клапаном на перегородке, причем объем одного отсека в 3 раза меньше другого. Конструкция клапана такова, что он открывается, если разность давлений превышает определенную величину $\boldsymbol{p}$, остается открытым в течение времени, достаточного для установления теплового равновесия во всем сосуде, а потом закрывается. Первоначально в обоих отсеках находится идеальный одноатомный газ при давлении $\boldsymbol{p}$ и температуре $\boldsymbol{T}$. Газ в меньшем отсеке начинают нагревать до тех пор, пока не откроется клапан. Затем нагрев прекращают и возобновляют его, после того, как клапан закроется. Какова будет температура газа, когда клапан закроется в четвертый раз?



Решение:

1. Первое открывание: в соответствии с законом Шарля

$$P1_1 = 2P \quad T1_1 = 2T\ ,$$ **(2 балла)**

где $P1_1, T1_1$ - давление и температура в первом отсеке в момент открывания клапана.

В соответствии с законом сохранения энергии:

$$\frac{3}{2}\nu RT1_1 + \frac{3}{2}\cdot 3\nu RT = \frac{3}{2}\cdot 4\nu RT(1) => 2T + 3T = 4T(1) => T(1) = \frac{5}{4}T =>$$

$=> P(1) = \frac{5}{4}P$, где $P(1), T(1)$ - давление и температура после закрывания клапана.

(6 баллов)

2. Второе открывание. Аналогично п. 1:

$$P1_2 = \frac{9}{4}P; \quad T1_2 = \frac{9}{4}T,$$ **(1 балл)**

где $P1_2, T1_2$ - давление и температура в первом отсеке в момент второго открывания клапана.

$$T1_2 + 3T(1) = 4T(2) => \frac{9}{4}T + \frac{15}{4}T = 4T(2) => T(2) = \frac{3}{2}T =>$$

$=> P(2) = \frac{3}{2}P$, где $P(2), T(2)$ - давление и температура после второго закрывания клапана

(3 балла)

3. Третье открывание. Аналогично пп.1,2:

$$P1_3 = \frac{5}{2}P \qquad T1_3 = \frac{5}{2}T,$$ **(1 балл)**

где $P1_3, T1_3$ - давление и температура в первом отсеке в момент третьего открывания клапана.

$$T1_3 + 3T(2) = 4T(3) => \frac{5}{2}T + \frac{9}{2}T = 4T(3) => T(3) = \frac{7}{4}T =>$$

$=> P(3) = \frac{7}{4}P$, где $P(3), T(3)$ - давление и температура после второго закрывания клапана

(3 балла)

4. Четвёртое открывание. Аналогично пп. 1-3:

$$P1_4 = \frac{11}{4}P \quad T1_4 = \frac{11}{4}T,$$ **(1 балл)**

где $P1_4, T1_4$, давление и температура в первом отсеке в момент четвертого открывания клапана.

$$T1_4 + 3T(3) = 4T(4) => \frac{11}{4}T + \frac{21}{4}T = 4T(4) => T(4) = 2T$$ **(3 балла)**

Ответ: $2T$

Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области

Открытая региональная межвузовская олимпиада 2015-2016

Физика (заключительный этап) 11 класс (решения)

2 этап

Вариант 2

1. Перед студентом стоит задача: перемотать ленту с одной катушки на другую так, чтобы угловая скорость вращения катушки, на которую наматывается лента, всегда была одинакова и равна $\boldsymbol{\omega}$. Радиус каждой катушки $\boldsymbol{R}$, толщина ленты $\boldsymbol{d}$ ($\boldsymbol{d} \ll \boldsymbol{R}$). В начальный момент времени вся лента намотана на одну из катушек. Помогите студенту определить, как будет изменяться со временем линейная скорость движения ленты.

Решение:

В любой момент времени будет выполняться равенство:

$$\omega r = v. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Явный вид зависимости радиуса катушки с намотанной лентой от времени проще всего найти из следующих соображений: за один полный оборот катушки радиус увеличивается на толщину ленты $\boldsymbol{d}$. Тогда в любой момент времени

$$r(t) = R + Nd, \qquad \textbf{(4 балла)}$$

где N – число оборотов катушки, которое может быть найдено как

$$N(t) = \frac{\omega}{2\pi} \cdot t \qquad \textbf{(3 балла)}$$

В итоге, временная зависимость радиуса катушки с намотанной лентой:

$$r(t) = R + \frac{\omega}{2\pi} \cdot d \cdot t \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Тогда линейная скорость движения ленты

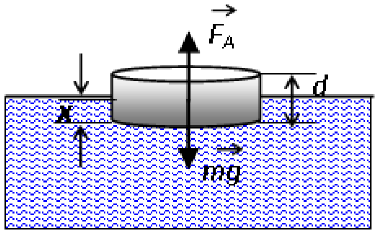
$$v(t) = \omega\left(R + \frac{\omega}{2\pi} \cdot d \cdot t\right) \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Ответ: $\boxed{v(t) = \omega\left(R + \frac{\omega}{2\pi} \cdot d \cdot t\right)}$

2. Цилиндрическая шайба толщиной $\boldsymbol{d}$ плашмя падает в воду с некоторой высоты и полностью скрывается под водой. После этого она начинает совершать малые колебания с периодом $\boldsymbol{T}$ в вертикальной плоскости. Чему равна плотность шайбы ρ? Известно, что $\rho < \rho_0$ (ρ_0 – плотность воды). Трением пренебречь.

Решение:

Колебания шайбы будут происходить под действием силы Архимеда:



$$F_A = \rho_0 V g = \rho_0 S x_0 g.$$ **(1 балл)**

В равновесии $F_A = mg$, $\rho_0 S x_0 g = mg$. **(1 балл)**

При погружении на x уравнение движения шайбы:

$$ma = mg - F_A,$$ **(1 балл)**

$$\rho S d\,\ddot{x} = mg - \rho_0 S\left(x_0 + x\right)g = mg - \rho_0 S x_0 g - \rho_0 S x g = -\rho_0 S x g,$$ **(3 балла)**

$$\rho d\,\ddot{x} + \rho_0 x g = 0,$$

$$\ddot{x} + \frac{\rho_0 g}{\rho d}x = 0 \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho d}}.$$ **(3 балла)**

Период колебаний шайбы:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

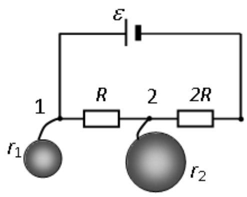
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho d}},$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\rho_0 g}{\rho d},$$

$$\boxed{\rho = \frac{\rho_0 T^2 g}{4\pi^2 d}}.$$ **(6 баллов)**

Ответ: $\boxed{\rho = \frac{\rho_0 T^2 g}{4\pi^2 d}}$

3. К точкам 1 и 2 электрической цепи, изображенной на рисунке, длинными тонкими проводниками подсоединили изначально незаряженные металлические шары с радиусами r_1 и r_2 соответственно. Найдите заряды, установившиеся на каждом из шаров. Считайте, что расстояние между шарами много больше их размеров, заряд на самой электрической цепи и на соединительных проводниках пренебрежимо мал, а внутреннее сопротивление источника тока равно нулю.



Решение.

После подсоединения к цепи на шарах образуются заряды Q_1 и Q_2. Поскольку шары были изначально не заряжены и заряд на соединительных проводах и электрической цепи мал, то

$$Q_1 + Q_2 = 0. \qquad (1)$$

Отсюда следует $Q_1 = -Q_2$ **(2 балла)**

Найдем разность потенциалов между точками 1 и 2 цепи:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U_1, \quad U_1 = IR.$$ **(2 балла)**

По закону Ома ток в цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + 2R} = \frac{\varepsilon}{3R},$$ **(2 балла)**

тогда $U_1 = \frac{\varepsilon}{3R} R = \frac{\varepsilon}{3}$, **(2 балла)**

следовательно, разность потенциалов между точками 1 и 2:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\varepsilon}{3}.$$ **(1 балл)**

Потенциалы шаров:

$$\varphi_1 = k\frac{Q_1}{r_1} \text{ и } \varphi_2 = k\frac{Q_2}{r_2}.$$ **(2 балла)**

$$k\frac{Q_1}{r_1} - k\frac{Q_2}{r_2} = k\frac{Q_1}{r_1} + k\frac{Q_1}{r_2} = kQ_1\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = kQ_1\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} = \frac{\varepsilon}{3},$$ **(2 балла)**

отсюда заряд первого шара:

$$Q_1 = \frac{\varepsilon r_1 r_2}{3k\left(r_1 + r_2\right)} = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2 \varepsilon}{3\left(r_1 + r_2\right)}.$$ **(2 балла)**

Ответ: $\boxed{Q_1 = -Q_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2 \varepsilon}{3\left(r_1 + r_2\right)}}$.

4. Пловец в солнечный день, плавает в пруду, глубина которого ***H***. При этом он видит в водном «зеркале» над собой отражение участков дна, находящихся от него на расстоянии ***s*** и более. На какой глубине ***h*** он находится, если считать глубину пруда постоянной, а дно ровным и горизонтальным. Показатель преломления воды ***n***.

Решение:

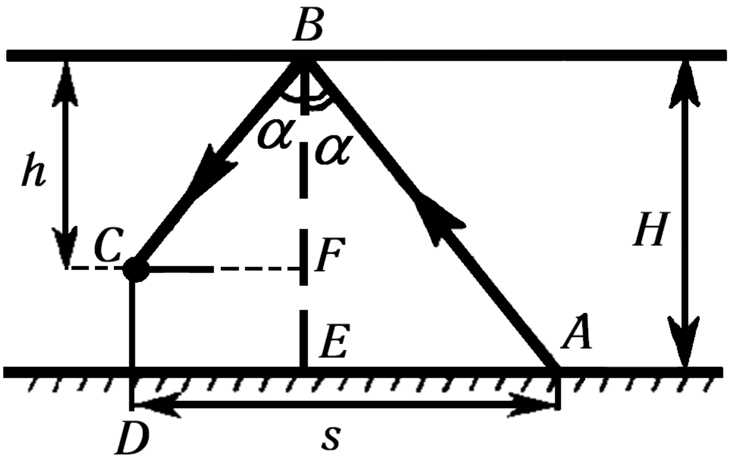


рисунок **(2 балла)**

Луч *AB* падает на границу «вода-воздух» под углом *α*, соответствующим предельному углу полного внутреннего отражения. При углах падения меньше чем *α*, лучи будут выходить в воздух. **(2 балла)**

Тогда $\sin\alpha = \frac{1}{n}$. (1) **(1 балл)**

Расстояние $s = AE + DE$.

Из прямоугольных треугольников ΔAEB и ΔBFC ($CF = DE$):

$$tg\alpha = \frac{DE}{BF} = \frac{AE}{BE}.$$ **(2 балла)**

Учтём, что $BF = h$, $BE = H$. Тогда:

$$s = Htg\alpha + htg\alpha = \left(H + h\right)tg\alpha$$ (2) **(4 балла)**

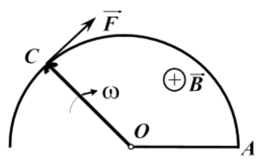
Распишем $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$. **(1 балл)**

С учётом (1): $tg\alpha = \dfrac{1/n}{\sqrt{1-1/n^2}} = \dfrac{1/n}{1/n\sqrt{n^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ **(1 балл)**

Из (2): $h = \dfrac{s}{tg\alpha} - H = s\sqrt{n^2-1} - H$ **(2 балла)**

Ответ: $\boxed{h = s\sqrt{n^2-1} - H}$

5. Проводящий контур, состоящий из неподвижных полукольца радиуса ***L***, отрезка ***OA*** и подвижного стержня ***OC***, помещён в однородное магнитное поле с индукцией ***B***, перпендикулярное плоскости контура (см. рисунок). Стержень ***OC*** может без трения скользить по полуокружности, вращаясь относительно точки ***O***. В точке ***C*** к стержню приложена постоянная сила ***F***. Определите минимальное значение сопротивления стержня ***OC*** ***R***, при котором стержень будет вращаться с постоянной угловой скоростью ***ω***. Сопротивления остальных участков контура считать пренебрежимо малыми.



Решение:

1. Определим площадь контура *AOCA* для любого момента времени как функцию угла $\angle AOC = \varphi$:

$$S = \frac{\varphi L^2}{2}$$ **(4 балла)**

2. Изменение площади контура за промежуток времени Δt

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\cdot\frac{L^2}{2} = \omega\cdot\frac{L^2}{2},$$ **(2 балла)**

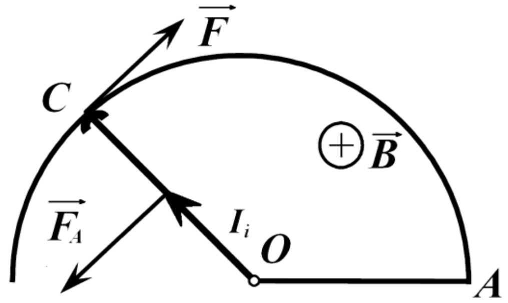
вызывает изменение магнитного потока и возникновение ЭДС индукции:

$$|\varepsilon| = B\cdot\frac{\Delta S}{\Delta t} = B\omega\cdot\frac{L^2}{2}.$$ **(2 балл)**

3. По закону Ома для участка цепи, сила тока в стержне *OC* равна:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BL^2}{2R}\omega.$$ **(2 балл)**

4. На стержень с током со стороны магнитного поля действует сила ампера, приложенная к центру стержня ($sin\ \alpha = 1$) и направленная против движения стержня (правило Ленца + «правило левой руки») (см. рисунок): **(2 балла)**



$$F_A = IBL = \frac{B^2L^3}{2R}\omega.$$ **(2 балл)**

5. Условие равномерного вращения стержня – равенство моментов сил F и F_A:

$$F \cdot L = F_A \cdot \frac{L}{2} = \frac{B^2L^3}{2R}\omega \cdot \frac{L}{2}.$$ **(4 балла)**

Отсюда получим $R = \dfrac{B^2L^3}{4F}\omega$ **(2 балл)**

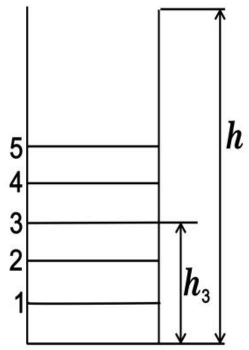
Ответ: $\boxed{R = \dfrac{B^2L^3}{4F}\omega}$

6. На столе стоит цилиндрический сосуд высоты $\boldsymbol{h}$, изготовленный из металла. Сначала в него опускают один поршень, через большой промежуток времени - второй и так далее - всего 5 поршней. Найдите высоту, на которой будет находиться третий поршень. Масса каждого поршня и атмосферное давление $\mathbf{p_0}$ связаны соотношением $\boldsymbol{mg = p_0 S}$, где $\boldsymbol{S}$ - площадь сечения цилиндра. Толщина поршней мала по сравнению с высотой сосуда. Трение мало.

Решение:

1. Т.к. процесс происходит в металлическом цилиндре и медленно => T = const и для каждой порции газа выполняется закон Бойля-Мариотта: PV=const. Т.к. V = lS и

S = const => Pl = const. **(2 балла)**



2. На каждом поршне, чтобы он не падал, должен существовать перепад давление p_0(исходя из условия). Тогда под 5 поршнем будет $2p_0$, под 4 - $3p_0$, под 3 - $4p_0$, под 2 - $5p_0$, под 1- $6p_0$
(2 балла)

3.Когда опускали 1 поршень, воздух занимал высоту h. Когда поршень опустился – давление увеличилось до $2p_0$(должен быть перепад p_0)

По закону Бойля-Мариотта

$$p_0 h = 2p_0 l => l = \frac{h}{2}$$ **(2 балла)**

4. Когда опускали второй поршень, давление прямо под ним было p_0, а воздух с этим давлением занимал высоту $h - l = \frac{h}{2}$. Когда поршень опустился – давление под ним стало$2p_0$(по аналогии с п.3), поэтому по закону Бойля-Мариотта

$p_0 \frac{h}{2} = 2p_0 x => x = \frac{h}{4}$ - расстояние от 1 до 2 поршня **(2 балла)**

В свою очередь, под 1 поршнем давление должно стать $3p_0$, поэтому по закону Бойля-Мариотта

$p_0 h = 3p_0 y => y = \frac{h}{3} -$ (высота, на которой находится первый поршень) **(2 балла)**

5. Высота 2 поршня после установления равновесия

$x + y = \frac{h}{3} + \frac{h}{4} = \frac{7h}{12}$ **(2 балла)**

В цилиндре перед опусканием осталось воздуха при давлении p_0

$h - \frac{7h}{12} = \frac{5h}{12}$ **(2 балла)**

Именно на него ляжет третий поршень.

6. После того, как опустили все поршни и установились давления из п.2, закон Бойля-Мариотта даёт:

$$p_0 h = 6p_0 l_1 => l_1 = \frac{h}{6}$$

$$p_0 \frac{h}{2} = 5p_0 l_2 => l_2 = \frac{h}{10}$$

$p_0 \cdot \frac{5h}{12} = 4p_0 l_3 => l_3 = \frac{5h}{48}$ **(4 балла)**

Окончательно:

$h_3 = l_1 + l_2 + l_3 = \frac{h}{6} + \frac{h}{10} + \frac{5h}{48} = \frac{89h}{240}$ **(2 балла)**

Ответ: $h_3 = \frac{89h}{240}$