Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области

Открытая региональная межвузовская олимпиада 2015-2016

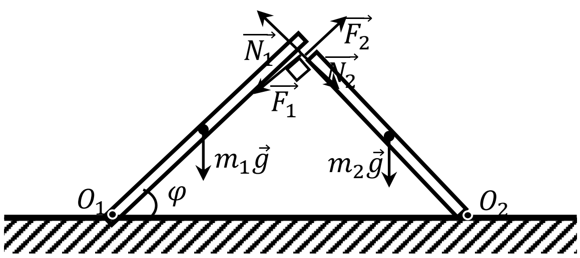
Физика (заключительный этап) 10 класс (решения)

II этап

1. На некотором расстоянии на горизонтальной поверхности стола в точках $\boldsymbol{O_1}$ и $\boldsymbol{O_2}$ закреплены два стержня массами $\boldsymbol{m_1}$ и $\boldsymbol{m_2}$ так, что могут свободно вращаться вокруг этих осей. Верхние концы стержней уложены друг на друга таким образом, чтобы образовался прямой угол. Стержень массы $\boldsymbol{m_1}$ образует угол $\boldsymbol{\varphi}$ с поверхностью стола. Определите коэффициент трения между стержнями, при котором стержень массы $\boldsymbol{m_2}$ не упадет.

Решение:

Расставим силы, действующие на стержни: **(3 балла)**



F_1 и F_2 – силы трения, действующие на соответствующие стержни.
N_1 и N_2 – силы реакции опоры со стороны каждого стрежня

На концы O_1 и O_2 действуют силы реакции опоры со стороны шарниров. Но направления этих сил нам пока неизвестны. Поэтому оси вращения для моментов сил выберем в O_1 и O_2. Тогда

$$m_1 g \frac{l_1}{2}\cos\varphi - N_1 l_1 = 0$$ **(3 балла)**

l_1- длина стержня массой m_1.

Тогда $N_1 = \frac{m_1 g}{2}\cos\varphi$.

И $m_2 g \frac{l_2}{2}\sin\varphi - F_2 l_2 = 0$, где l_2- длина стержня массой m_2. **(4 балла)**

$\left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_1}\right|$ согласно третьему закону Ньютона. Тогда

$$F_1 = \frac{m_1 g}{2}\sin\varphi$$ **(3 балла)**

т.к. стержни покоятся, то $\mathrm{F}_1 \le \mu N_1$. **(3 балла)**

Значит,

$$\mu = \frac{F_1}{N_1} = \frac{m_2 g}{2}\sin\varphi \cdot \frac{2}{m_1 g\cos\varphi} = \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{m_2}{m_1} tg\varphi$$ **(4 балла)**

Ответ: $\mu = \frac{m_2}{m_1} tg\varphi$

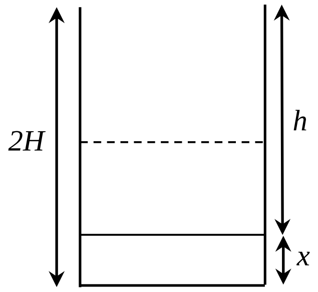
2. В цилиндрический вертикальный сосуд высотой $2\boldsymbol{H}$ и площадью сечения $\boldsymbol{S}$, разделенного пополам невесомым тонким подвижным поршнем медленно наливают

жидкость с плотностью $\boldsymbol{\rho}$. Какой объем будет у воздуха под поршнем при максимально возможном уровне жидкости, налитом в сосуд? Жидкость под поршень не проникает, внешнее атмосферное давление равно $\boldsymbol{p_0}$.

Решение:

Процесс происходит без изменения температуры (так как медленно).

$$pV = const, T = const$$ **(2 балла)**



Приравняем произведения начального давления и начального обема воздуха к конечным значениям давления и объема той же массы воздуха под поршнем:

$$p_1V_1 = p_2V_2, p_1 = p_0, V_1 = HS$$ **(2 балла)**

Конечное давление под слоем жидкости высотой h:

$$p_2 = p_0 + \rho gh$$ **(2 балла)**

Соответствующий объем воздуха после наливания жидкости до краев сосуда:

$$V_2 = (2H - h)S, x = 2H - h$$ **(2 балла)**

Подставим все значения в закон Бойля-Мариотта:

$$p_0HS = (p_0 + \rho gh)(2H - h)S$$

$$p_0H = 2p_0H - p_0H + \rho gh2H - \rho gh^2$$

$$\rho gh^2 + h(p_0 - \rho g2H) - p_0H = 0$$ **(4 балла)**

Дискриминант данного квадратного уравнения:

$$D = (p_0 - \rho g2H)^2 + 4\rho gp_0H = p_0^2 - 4p_0\rho gH + \rho^2g^24H^2 + 4p_0\rho gH = p_0^2 + \rho^2g^24H^2$$

(2 балла)

И корни квадратного уравнения:

$$h = \frac{\rho g2H - p_0 \pm \sqrt{p_0^2 + \rho^2g^24H^2}}{2\rho g}$$ **(2 балла)**

Решением будет только корень с «+», так как отрицательное значение высоты нам не подходит. Подставим это значение в объем:

$$V_2 = Sx = S\left(2H - \frac{\rho g2H - p_0 + \sqrt{p_0^2 + \rho^2g^24H^2}}{2\rho g}\right)$$ **(4 балла)**

Ответ: $V_2 = S\left(2H - \frac{\rho g2H - p_0 + \sqrt{p_0^2 + \rho^2g^24H^2}}{2\rho g}\right)$

3. Некоторую часть идеального газа выпустили из баллона. В результате показания температуры уменьшились в $\boldsymbol{n}$ раз, а давление понизилось в $\boldsymbol{k}$ раз. Определите оставшуюся в данном сосуде долю газа ($\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{m_0}}$)?

Решение:

Из уравнения Менделеева-Клайперона: $pV = \frac{m}{\mu}RT$ имеем:

$$pV = \frac{m_0}{\mu} RT - до \qquad (1)$$

$$\frac{p}{k} V = \frac{m}{\mu} R \frac{T}{n} - после \qquad (2)$$ **(10 баллов)**

Разделим (2) на (1)

$$\frac{\frac{p}{k}V}{pV} = \frac{\frac{m}{\mu}R\frac{T}{n}}{\frac{m_0}{\mu}RT}$$ **(5 баллов)**

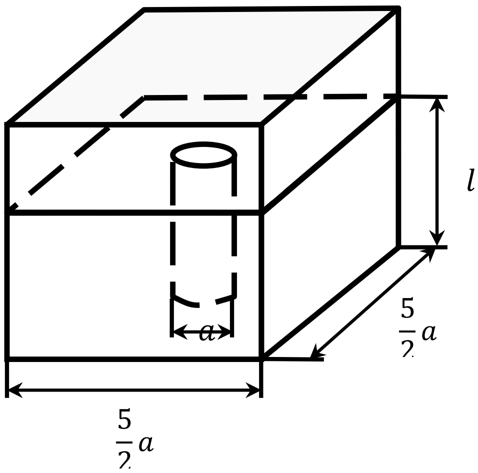
$$\frac{1}{k} = \frac{m}{m_0} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{n}{k}$$ **(5 баллов)**

Ответ: $\frac{m}{m_0} = \frac{n}{k}$

4. В стеклянный сосуд прямоугольной формы и квадратным дном со стороной $\frac{5}{2}\boldsymbol{a}$ вставлен медный стержень круглого сечения диаметром $\boldsymbol{a}$ и длиной $\boldsymbol{l}$. Затем в сосуд наливают ртуть до уровня стержня. Рассчитайте, во сколько раз изменится сопротивление данной конструкции, если медный стержень вынуть из ртути, но до соприкосновения поверхностей. Удельное сопротивление меди $\boldsymbol{\rho_м}$, ртути $\boldsymbol{\rho_p}$.

Решение:



При погруженном стержне систему можно рассмотреть как параллельное соединение медного и ртутного проводников.

$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_м} + \frac{1}{R_p}, R_м = \rho_м \frac{l}{\frac{\pi a^2}{4}} = \frac{\rho_м l4}{\pi a^2}$ -сопротивление медного проводника. **(2 балла)**

Сопротивление ртутного проводника

$$R_p = \frac{\rho_p l}{\left(\frac{5}{2}a\right)^2} = \frac{\rho_p l4}{25a^2}$$ **(2 балла)**

Подставим эти значения в закон параллельного соединения

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\pi a^2}{\rho_м 4l} = \frac{\rho_p \pi a^2 + \rho_м 25a^2}{\rho_м \rho_p 4l} = \frac{a^2(\rho_p \pi + \rho_м 25)}{\rho_м \rho_p 4l}$$

Отсюда выразим сопротивление R_1:

$$R_1 = \frac{\rho_м \rho_p 4l}{a^2(\rho_p\pi + \rho_м 25)}$$ **(2 балла)**

Объем ртути при погруженном стержне:

$$V_p = \left(\frac{5}{2}a\right)^2 l - \frac{\pi a^2}{4} l = a^2 l\left(\frac{25}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a^2 l}{4}(25 - \pi)$$ **(1 балл)**

Тот же объем ртути, но в отсутствии стержня:

$$V_p = \left(\frac{5}{2}a\right)^2 h = \frac{25a^2}{4}h$$ **(1 балл)**

где h – высота ртути в сосуде после вынимания медного стержня. Приравняем эти объемы и выразим высоту h.

$$\frac{a^2 l}{4}(25 - \pi) = \frac{25a^2}{4}h$$

$$l(25 - \pi) = 25h$$

$$h = \frac{l(25 - \pi)}{25}$$ **(2 балла)**

При вынимании стержня и приведении его в соприкосновение с ртутью, получаем последовательное соединение разнородных проводников.

$$R_2 = R_м + R_p',$$ **(2 балла)**

Сопротивление медного стержня не изменится, так как его геометрические параметры остались прежними. А сопротивление ртути станет

$$R_p' = \frac{\rho_p h}{\left(\frac{5}{2}a\right)^2} = \frac{\rho_p l(25-\pi)}{25} \cdot \frac{4}{25a^2}$$ **(4 балла)**

$$R_2 = \frac{\rho_м 4l}{\pi a^2} + \frac{\rho_p l(25 - \pi)4}{25 \cdot 25a^2} = \frac{\rho_м l 4 \cdot 625 + \rho_p l(25 - \pi) \cdot 4\pi}{625\pi a^2}$$

$$= \frac{4l(625\rho_м + \rho_p(25 - \pi)\pi)}{625\pi a^2}$$

(2 балла)

Теперь можно найти отношение сопротивлений согласно условию задачи.

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{4l(625\rho_м + \rho_p(25 - \pi)\pi)}{625\pi a^2} \cdot \frac{a^2(\rho_p\pi + 25\rho_м)}{4l\rho_м\rho_p} = \frac{(625\rho_м + \rho_p(25 - \pi)\pi)}{625\pi} \cdot \frac{\rho_p\pi + 25\rho_м}{\rho_м\rho_p}$$

(2 балла)

Ответ: $\frac{R_2}{R_1} = \frac{(625\rho_м + \rho_p(25-\pi)\pi)}{625\pi} \cdot \frac{\rho_p\pi + 25\rho_м}{\rho_м\rho_p}$

5. Из детского пневматического пистолета выпущена сферическая пулька со скоростью $\boldsymbol{\upsilon} = 12\ м/с$ строго горизонтально у края двух вертикальных стен, отстоящих друг от друга на расстоянии $\boldsymbol{S} = 2\,м$. Высота стен $\boldsymbol{h} = 5\,м$. Определите возможное количество ударов пульки о стены.

Решение:

Так как горизонтальная составляющая скорости постоянна, время, за которое пулька долетит от стенки до стенки, будет равно

$$t_1 = \frac{S}{\upsilon}.$$ **(4 балла)**

Между стенами тело свободно падает вниз с ускорением свободного падения и высоты h за время t:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$ **(4 балла)**

Число ударов о стенки равно отношению времен

$$n = \frac{t}{t_1} = \frac{\sqrt{\frac{2h}{g}}}{\frac{S}{\upsilon}} = \frac{\upsilon}{S}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$ **(8 баллов)**

Подставляя численные значения, получим

$$n = \frac{12}{2}\sqrt{\frac{2 \cdot 5}{10}} = 6$$ **(4 балла)**

Ответ:$n = 6$