Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области
(ОРМО) 2014-2015 гг.
Физика (заключительный этап) 11 класс (решения)
Вариант 1

1. Метеорологический зонд объёмом V_0 заполняют смесью газов из двух баллонов. В первом баллоне находится газ с молярной массой μ_1 под давлением P_1, во втором – газ с молярной массой μ_2 под давлением P_2. За время равное τ из каждого баллона по трубкам в зонд поступает столб соответствующего газа высотой h и диаметром d. Определите плотность смеси газов в зонде через время t от начала заполнения. Давления газов в баллонах и температуру T в ходе процесса считать неизменными

Оценка задания № 1 – 15 баллов

Решение:

Объем газа, поступающего за время τ из каждого баллона, $V = \dfrac{h\pi d^2}{4}$. Из первого баллона эта порция газа поступает под давлением P_1, из второго – под давлением P_2. **(2 балла)**

Из уравнения Менделеева – Клапейрона можно найти массы газов поступающих в зонд за время τ:

$$P_1V = \frac{m_1}{\mu_1}RT, \qquad P_2V = \frac{m_2}{\mu_2}RT.$$ **(3 балла)**

$$m_1 = \frac{P_1 h\pi d^2 \mu_1}{4RT}, \qquad m_2 = \frac{P_2 h\pi d^2 \mu_2}{4RT}$$ **(1 балл)**

Т.к. за одинаковые промежутки времени в зонд поступают одинаковые порции газа, то за время t в зонд поступит N порций газов ($N = t/\tau$), т.е. масса M_1 первого газа и M_2 второго:

$$M_1 = m_1\frac{t}{\tau} = \frac{P_1 h\pi d^2 \mu_1}{4RT}\frac{t}{\tau}, \qquad M_2 = m_2\frac{t}{\tau} = \frac{P_2 h\pi d^2 \mu_2}{4RT}\frac{t}{\tau}.$$ **(3 балла)**

Общая масса смеси в зонде через время t:

$$M = M_1 + M_2 = \frac{h\pi d^2}{4RT}\frac{t}{\tau}\left(P_1\mu_1 + P_2\mu_2\right).$$ **(3 балла)**

Тогда плотность смеси газов будет равна:

$$\rho = \frac{M}{V_0} = \frac{h\pi d^2}{4RTV_0}\frac{t}{\tau}\left(P_1\mu_1 + P_2\mu_2\right).$$ **(3 балла)**

Ответ: $\boxed{\rho = \dfrac{M}{V_0} = \dfrac{h\pi d^2}{4RTV_0}\dfrac{t}{\tau}\left(P_1\mu_1 + P_2\mu_2\right)}$.

2. При подключении к батарейке резистора R через нее течет ток I. При подключении к этой же батарейке резистора R, соединенного последовательно с неизвестным резистором, через нее течет ток ¾ I. Если же резистор R соединить с тем же неизвестным резистором параллельно и подключить к этой батарейке, то через нее будет течь ток 6/5 I. Найдите сопротивление неизвестного резистора

Оценка задания № 2 – 15 баллов

Решение: рисунки **(1 балл)**

Запишем для каждого случая закон Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \tag{1}$$

$$\frac{3}{4} I = \frac{\varepsilon}{R + R_x + r} \tag{2}$$

$$\frac{6}{5} I = \frac{\varepsilon}{\frac{RR_x}{R + R_x} + r} \tag{3}$$

(4 балла)

Из (1) и (2) выразим эдс батарейки и приравняем

$$\varepsilon = I(R + r),$$

$$\varepsilon = \frac{3}{4} I(R + R_x + r),$$

$$(R + r) = \frac{3}{4}(R + R_x + r) \quad \Rightarrow \quad r = 3R_x - R$$ **(4 балла)**

Решаем совместно (2) и (3), с учетом выражения для внутреннего сопротивления батарейки:

$$\frac{3}{4} I(R + R_x + r) = \frac{6}{5} I\left(\frac{RR_x}{R + R_x} + r\right),$$

$$\frac{1}{4}(R + R_x + 3R_x - R) = \frac{2}{5}\left(\frac{RR_x}{R + R_x} + 3R_x - R\right),$$

$$R_x = \frac{2}{5}\frac{RR_x}{R + R_x} + \frac{2}{5}3R_x - \frac{2}{5}R,$$

$$R_x - \frac{6}{5}R_x = \frac{2}{5} \cdot \frac{RR_x}{R+R_x} - \frac{2}{5}R = \frac{2RR_x - 2R(R+R_x)}{5 \cdot (R+R_x)} = \frac{2RR_x - 2R^2 - 2RR_x}{5 \cdot (R+R_x)},$$

$$R_x = \frac{2R^2}{R + R_x},$$

$$R_x^2 + R_x R - 2R^2 = 0,$$

$$R_x = R.$$ **(6 баллов)**

Ответ: $R_x = R$

Примечание: *данную задачу нельзя решать в предположении, что у батарейки отсутствует внутреннее сопротивление. Действительно, при этом получается система из трех уравнений с двумя неизвестными, которая не имеет решений.*

3. Рентгеновская трубка работает при напряжении 40 кВ, её мощность 5 кВт. Диаметр пятна на мишени, образованного электронным потоком, 0,3 мм. Найти среднее давление электронов на мишень. Заряд электрона равен $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона равна $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Для эффективной работы трубки поверхность мишени наклонена под небольшим углом.

Оценка задания № 3 – 15 баллов

Решение:

Т.К. угол наклона мал, то его можно не учитывать и считать, что мишень перпендикулярна потоку электронов. **(1 балл)**

По определению, давление

$$P = \frac{F}{S}$$

Согласно II закону Ньютона, записанному для импульса, $Ft = p_1 - p_0$, где t- время, $p_1 - p_0$ - изменение импульса электронов, достигших мишени за время t.
Т.к. электроны поглощаются мишенью, то их импульс становится равным 0, поэтому $Ft = NmV$, где N – количество электронов, долетевших до анода за время t, m – масса электрона, V - скорость при подлёте к мишени.
Отсюда

$F = \frac{N}{t}mV$ **(4 балла)**

Первый сомножитель легко преобразовать:

$$\frac{N}{t} = \frac{Ne}{t} \cdot \frac{1}{e} = \frac{Q}{t} \cdot \frac{1}{e} \qquad Q - \text{ полный заряд, прошедший за время } t$$

Согласно определению

$\frac{Q}{t} = I$ – сила тока. Поэтому $\frac{N}{t} = \frac{I}{e}$ **(1 балл)**

Т.к. электроны разгоняются рабочим напряжением с нулевой начальной скорости, то согласно теореме о кинетической энергии

$\frac{mV^2}{2} = eU => V = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$

Выражение для силы

$F = \frac{I}{e}m\sqrt{\frac{2eU}{m}} = I\sqrt{\frac{2mU}{e}}$ **(2 балла)**

Сила тока I определяется на основании формулы для мощности трубки

$Pi = UI => I = \frac{Pi}{U}$ **(1 балл)**

Площадь S:

$$S = \frac{\pi d^2}{4}$$

Окончательная формула для давления принимает вид

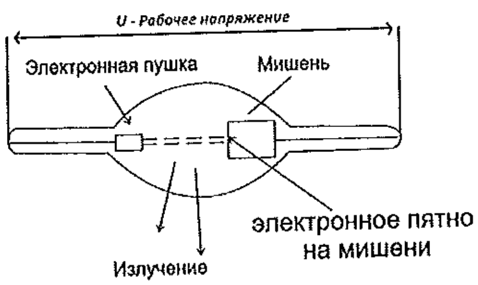
$P = \frac{4}{\pi d^2} \cdot \frac{Pi}{U}\sqrt{\frac{2mU}{e}} = \frac{4Pi}{\pi d^2} \cdot \sqrt{\frac{2m}{Ue}}$ **(3 балла)**

Подстановка даёт ответ

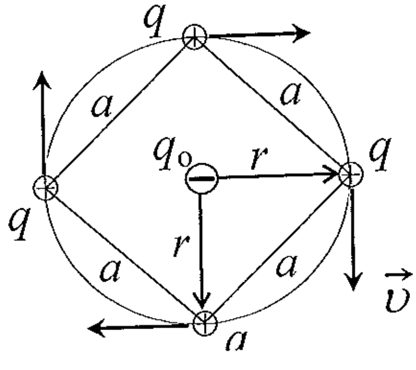
$P = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot (0{,}3 \cdot 10^{-3})^2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{40 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}} = \frac{20 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 0{,}09 \cdot 10^{-6}} \cdot \sqrt{2{,}844 \cdot 10^{-16}} = 1193$ (Па) **(3 балла)**

Ответ: 1193 (Па)

Примечание: Устройство рентгеновской трубки



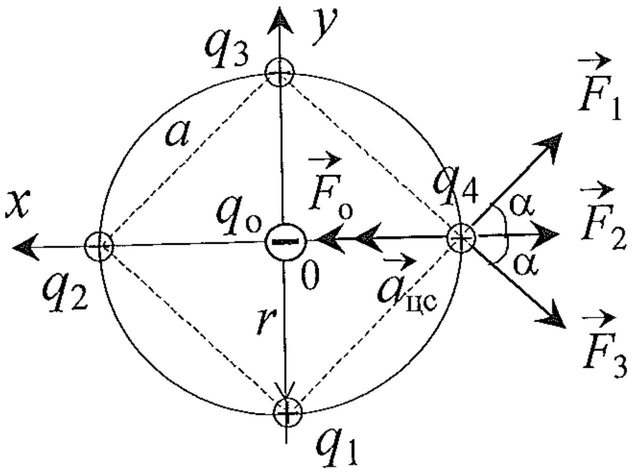
4. Вокруг отрицательного заряда q_0 вращаются по круговой орбите, располагаясь в углах квадрата со стороной a, четыре одинаковых частицы массой m и зарядом $+q$ каждая ($|q_0| = |q|$). Заряд q_0 находится в



центре этого квадрата. Определите угловую скорость ω движения частиц по орбите.

Оценка задания № 4 – 15 баллов

Решение



Для определения угловой скорости ω достаточно рассмотреть движение одной из четырех частиц. Так как заряды равны по величине и расположены симметрично, то достаточно рассмотреть силы, действующие на один из зарядов, например, q_4. **(2 балла)**

Для описания сил, действующих на заряд, каждому заряду q присваивается порядковый номер. Выполним рисунок, на котором показаны все силы, действующие на частицу с зарядом q_4: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ – силы отталкивания со стороны зарядов q_1, q_2, q_3 соответственно; $\vec{F}_o$ – сила притяжения со стороны заряда q_o и $a_{цс}$ – центростремительное ускорение.

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_o = m\vec{a}_{цс}. \qquad (1) \qquad \textbf{(2 балла)}$$

В проекциях:

на ось $0x$: $$F_o - F_1\cos\alpha - F_3\cos\alpha - F_2 = ma_{цс}, \qquad (2)$$

на ось $0y$: $$F_1\sin\alpha - F_3\sin\alpha = 0, \qquad \text{где } \alpha = 45°. \qquad (2^*) \ \textbf{(1 балл)}$$

(Уравнение (2*) записывать не обязательно, достаточно указать, что $F_{1y} = F_{3y}$).

Центростремительное ускорение:

$$a_{цс} = \omega^2 r, \qquad (3)$$

где расстояние r от заряда q_o до заряда q_4 (а также радиус вращения) определяется по теореме Пифагора:

$$a^2 + a^2 = (2r)^2,$$

$$2a^2 = 4r^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad (4) \ \textbf{(2 балла)}$$

Сила взаимодействия зарядов определяется по закону Кулона:

$$F_1 = k\frac{q_1 q_4}{a^2} = k\frac{q^2}{a^2}. \qquad (5)$$

$$F_2 = k\frac{q_2 q_4}{(2r)^2} = k\frac{q^2}{2a^2}. \qquad (6)$$

$$F_3 = F_1. \qquad (7)$$

$$F_o = k\frac{q_o q_4}{r^2} = k\frac{2q^2}{a^2}, \quad \text{т.к.} \quad |q_o| = |q|. \qquad (8)$$ **(2 балла)**

Решим систему уравнений (2) – (8) и получим ответ в общем виде:

$$2k\frac{q^2}{a^2} - 2k\frac{q^2}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}k\frac{q^2}{a^2} = m\omega^2\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$4k\frac{q^2}{2a^2} - 2k\frac{\sqrt{2}q^2}{2a^2} - k\frac{q^2}{2a^2} = \frac{\sqrt{2}\cdot m\omega^2 a^3}{2a^2}.$$

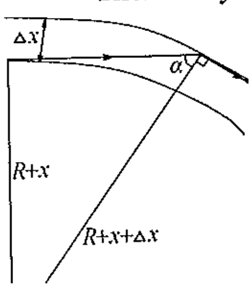
$$kq^2\left(4-2\sqrt{2}-1\right) = \sqrt{2}\cdot m\omega^2 a^3.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{kq^2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}\cdot ma^3}} = \sqrt{\frac{kq^2\left(3-2\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot ma^3\cdot\sqrt{2}}}.$$

$$\omega = q\cdot\sqrt{\frac{k\cdot\left(3\sqrt{2}-4\right)}{2ma^3}}.$$ **(6 баллов)**

Ответ: $\omega = q\cdot\sqrt{\dfrac{k\cdot\left(3\sqrt{2}-4\right)}{2ma^3}}.$

5. На цилиндрическое основание радиусом R надет широкий цилиндрический световод, показатель преломления которого уменьшается от внутреннего радиуса к внешнему по закону $n = n_0 - kx$ при $x << n/k$, где n_0 – известная постоянная величина. Определите коэффициент k, при котором световой луч, запущенный в световод на расстоянии x от внутреннего радиуса, будет обходить его по окружности.



Оценка задания № 5 – 20 баллов

Решение: рисунок **(2 балла)**

Выделим в световоде тонкий слой радиуса x и толщиной $\Delta x << x$.

Получим световой канал с внутренним радиусом $R + x$ и внешним $R + x + \Delta x$ (см. рисунок) с постоянным показателем преломления $n = n_0 - kx$. **(4 балла)**

Для того, чтобы световой луч не покидал данный тонкий слой, необходимо, чтобы на внешней границе этого слоя выполнялось условие полного внутреннего отражения:

$n(x)\cdot\sin\alpha = n(x+\Delta x)\cdot\sin(90^o)$. **(3 балла)**

где $n(x) = n_0 - kx$,

$n(x+\Delta x) = n_0 - kx - k\Delta x$. **(2 балла)**

Из прямоугольного треугольника на рисунке

$\sin\alpha = (R + x)/(R + x + \Delta x)$. **(2 балла)**

Подставляя эти выражения в условие полного внутреннего отражения, получим:

$$(n_0 - kx)\cdot(R + x)/(R + x + \Delta x) = n_0 - kx - k\Delta x.$$

Приведём к общему знаменателю правую и левую часть равенства, раскроем скобки и сократим подобные слагаемые:

$$(n_0 - kx)\cdot(R + x) = (n_0 - kx - k\Delta x)\cdot(R + x + \Delta x).$$

$$n_0R + n_0x - kxR - kx^2 = n_0R + n_0x - kxR - kx^2 + n_0\Delta x - kx\Delta x - k\Delta xR - k\Delta xx - k\Delta x^2.$$

$$0 = n_0\Delta x - 2kx\Delta x - k\Delta xR - k\Delta x^2.$$

$$0 = n_0 - 2kx - kR - k\Delta x.$$ **(4 балла)**

Учтём, что $\Delta x << x$ (пренебрежём последним слагаемым) **(2 балла)**

и выразим искомый коэффициент k:

$$k = n_0/(2x + R).$$ **(1 балл)**

Ответ: $k = n_0/(2x + R)$.

6. В два одинаковых неподвижных кубика попадают пули. В первый кубик попадает пуля массой m_1 и застревает в нём, во второй – пуля массой m_2 и пробивает его насквозь. После этого кубики начинают двигаться с одинаковыми скоростями. Определите, при каком отношении масс пуль m_2/m_1 в первом кубике выделится в n раз меньше тепла, чем во втором. Пули до попадания в кубики имели одинаковые импульсы, а масса первой пули в k раз меньше массы кубика. Уменьшением массы второго кубика пренебречь.

Оценка задания № 6 – 20 баллов

Решение: рисунок **(1 балл)**

Запишем законы сохранения импульса и полной энергии системы «пуля-кубик» для обоих случаев:

$$m_1v_1 = (m_1 + M)V, \qquad (1)$$

(1 балл)

$$m_2v_2 = MV + m_2v_2', \qquad (2)$$

(1 балл)

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{(m_1 + M)V^2}{2} + Q_1, \qquad (3)$$

(1 балл)

$$\frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2} + Q_2, \qquad (4)$$ **(5 баллов)**

Учтём, что импульсы пуль изначально равны:

$$m_1v_1 = m_2v_2, \qquad (5)$$ **(1 балл)**

Из (1) и (2) выразим скорость второй пули после пробивания кубика v_2':

$$V = \frac{m_1v_1}{m_1 + M} = \frac{m_2v_2}{m_1 + M}, \qquad (6)$$

$$m_2v_2 = \frac{Mm_2v_2}{m_1+M} + m_2v_2', \qquad v_2 = \frac{Mv_2}{m_1+M} + v_2',$$

$$v_2' = v_2\left(1 - \frac{M}{m_1+M}\right) = v_2\left(\frac{m_1+M-M}{m_1+M}\right) = v_2\left(\frac{m_1}{m_1+M}\right) \qquad (7) \quad \textbf{(3 балла)}$$

Из (3) и (4) выразим количество тепла, выделившегося в каждом кубике:

$$Q_1 = \frac{m_1v_1^2}{2} - \frac{(m_1+M)V^2}{2} = (1) = \frac{m_1v_1^2}{2} - \frac{m_1v_1^2}{2}\frac{m_1}{(m_1+M)} =$$

$$= \frac{m_1v_1^2}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_1+M}\right) = \frac{m_1v_1^2}{2}\left(\frac{M}{m_1+M}\right)$$

$$Q_2 = \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{MV^2}{2} - \frac{m_2v_2'^2}{2} = (6)(7) =$$

$$= \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{m_2v_2^2}{2}\frac{m_2M}{(m_1+M)^2} - \frac{m_2v_2^2}{2}\left(\frac{m_1}{m_1+M}\right)^2 =$$

$$= \frac{m_2v_2^2}{2}\left(1 - \frac{m_2M - m_1^2}{(m_1+M)^2}\right) = \frac{m_2v_2^2}{2}\left(\frac{2m_1M + M^2 - m_2M}{(m_1+M)^2}\right) = \qquad \textbf{(3 балла)}$$

$$= \frac{m_2^2v_2^2}{2m_2}\left(\frac{2m_1M + M^2 - m_2M}{(m_1+M)^2}\right) = (5) = \frac{m_1^2v_1^2}{2m_2}\left(\frac{2m_1M + M^2 - m_2M}{(m_1+M)^2}\right) =$$

$$= \frac{m_1v_1^2}{2}\left(\frac{m_1(2m_1M + M^2 - m_2M)}{m_2(m_1+M)^2}\right)$$

По условию $Q_2/Q_1 = n$.

$$\frac{m_1v_1^2}{2}\left(\frac{M}{m_1+M}\right)\cdot n = \frac{m_1v_1^2}{2}\left(\frac{m_1(2m_1M + M^2 - m_2M)}{m_2(m_1+M)^2}\right),$$

$$nM = \frac{2m_1^2M + m_1M^2 - m_1m_2M}{m_2m_1 + m_2M},$$

$$nm_1m_2M + nm_2M^2 = 2m_1^2M + m_1M^2 - m_1m_2M,$$

$$nm_1m_2 + nm_2M = 2m_1^2 + m_1M - m_1m_2, \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Учтём, что $M = km_1$.

$$(n+1)m_1m_2 + nkm_1m_2 = 2m_1^2 + km_1^2,$$

$$(1+n+nk)m_2 = (2+k)m_1. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Окончательно:

$$\boxed{\frac{m_2}{m_1} = \frac{(2+k)}{(1+n+nk)}}. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Ответ: $\boxed{\frac{m_2}{m_1} = \frac{(2+k)}{(1+n+nk)}}$.