Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада
2012-2013

ФИЗИКА
11 класс
II этап

ВАРИАНТ 1

1. Для хранения нефтепродуктов на Томском нефтехимическом комбинате используют большие цистерны. В дне такого нефтяного бака имеется отверстие, заделанное цилиндрической пробкой. До какой предельной высоты можно наливать в этот бак нефть, чтобы выдавить пробку наружу, если для этого достаточно приложить силу 16 Н? Площадь пробки 10 см^2, плотность нефти 800 кг/м^3.

Решение:

Атмосферное давление в этом случае учитывать не нужно, так как оно действует на пробку со всех сторон и не участвует в ее выдавливании. Предельную высоту найдем из условия, что сила давления, создаваемая столбом нефти, будет достаточной для выдавливания пробки

$$F=pS=\rho ghS,$$

Откуда

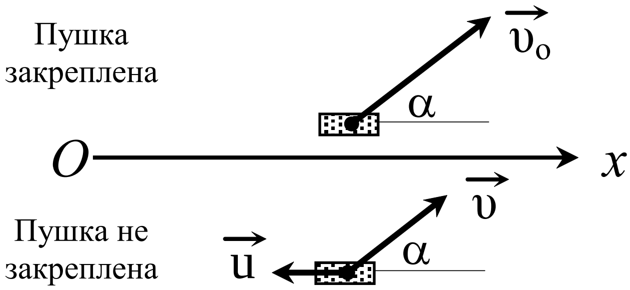
$$H=F/\rho gS=2\ м.$$

Ответ: 2 м.

2. Ствол пушки направлен под углом α = 45° к горизонту. Когда колеса пушки закреплены, скорость снаряда, масса которого в n = 50 раз меньше массы пушки, равна $\upsilon_о$ = 180 м/с. Найдите скорость пушки сразу после выстрела, если ее колеса освободить.

Решение:

Приведен поясняющий рисунок.



По закону сохранения энергии (энергия пороховых газов переходит в кинетическую энергию тел):

$$\frac{m\upsilon_о^2}{2}=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{nmu^2}{2}.$$

$$\upsilon_о^2=\upsilon^2+nu^2. \qquad (1)$$

По закону сохранения импульса в проекции на ось Ox:

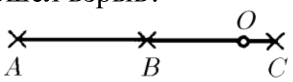
$$0=m\upsilon\cdot\cos\alpha-nmu;\qquad \upsilon\cdot\cos\alpha=nu. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1) – (2), найдем:

$$u=\upsilon_о\Big/\sqrt{\frac{n^2}{\cos^2\alpha}+n}=2,53\ (м/с).$$

Ответ: 2,53 м/с.

3. Три микрофона расположены на одной прямой в точках *A*, *B*, *C*, как показано на рисунке. В точке *O*, расположенной на отрезке *AC*, произошёл взрыв, звук от которого зафиксировали микрофоны в моменты времени $t_A > t_B > t_C$. Найдите отрезок *AO*, если $AB = BC = L$. В какой момент времени произошёл взрыв?



Решение:

1. Нам даны моменты времени, когда звук доходит до точек *A*, *B*, *C*. Пусть t_O – момент взрыва. Тогда мы можем выразить отрезки *AO*, *BO*, *CO*:

$AO = v\,(t_A - t_O)$, $\quad BO = v\,(t_B - t_O)$, $\quad CO = v\,(t_C - t_O)$. (1)

2. Из рисунка видно, что

$AO = AB + BO = BO + CO + BO = 2BO + CO$. (2)

С учётом (1): $v\,(t_A - t_O) = 2\,v\,(t_B - t_O) + v\,(t_C - t_O)$,

$t_A - t_O = 2\,t_B - 2\,t_O + t_C - t_O$,

$2\,t_O = 2\,t_B + t_C - t_A$,

$$\boxed{t_O = t_B + \frac{t_C - t_A}{2} = t_B - \frac{t_A - t_C}{2}} \qquad (3)$$

3. Из рисунка видно, что

$AO = AB + BO = L + v\,(t_B - t_O)$. (4)

Выразим скорость через *AO* из (1): $v = AO / (t_A - t_O)$,

и подставим в (4): $$AO = L + AO\frac{t_B - t_O}{t_A - t_O}, \qquad AO\left(1 - \frac{t_B - t_O}{t_A - t_O}\right) = L,$$

$$AO\left(\frac{t_A - t_O - t_B + t_O}{t_A - t_O}\right) = L, \qquad AO\left(\frac{t_A - t_B}{t_A - t_O}\right) = L, \qquad AO = L\left(\frac{t_A - t_O}{t_A - t_B}\right).$$

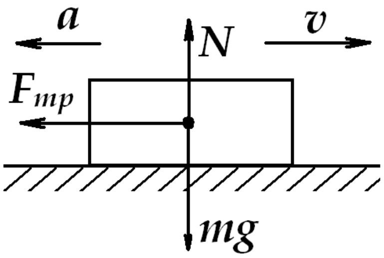
Используя (3), получим:

$$\boxed{AO = L\left(\frac{t_A - t_B + \dfrac{t_A - t_C}{2}}{t_A - t_B}\right) = L\left(\frac{2t_A - 2t_B + t_A - t_C}{2(t_A - t_B)}\right) = L\left(\frac{3t_A - 2t_B - t_C}{2(t_A - t_B)}\right)}$$

Ответ: $AO = L\left(\dfrac{3t_A - 2t_B - t_C}{2(t_A - t_B)}\right)$, $\quad \boxed{t_O = t_B + \dfrac{t_C - t_A}{2} = t_B - \dfrac{t_A - t_C}{2}}$

4. Коэффициент трения между колёсами и дорогой на необледеневшем участке шоссе в ***N*** раз больше, чем на обледеневшем. Во сколько раз нужно уменьшить скорость автомобиля, чтобы тормозной путь на обоих участках шоссе был одинаков.

Решение:



1. Рассмотрим силы, действующие на тормозящий автомобиль (см. рис.).

Основной закон динамики поступательного движения (II закон Ньютона):

$$\overline{F}_{\text{òð}} + \overline{N} + m\overline{g} = m\overline{a}$$

Очевидно, что $N = mg$. Тогда, сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$. Из горизонтальной проекции основного закона динамики поступательного движения получаем: $F_{\text{тр}} = ma$, откуда

$$a = \mu g$$

Тогда, для первого и второго случаев торможения:

$$a_1 = \mu_1 g \qquad\qquad a_2 = \mu_2 g.$$

Откуда находим: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{\mu_1}{\mu_2} = N$. (1)

2. Рассмотрим кинематику движения тормозящего автомобиля.

Законы кинематики, согласно которым изменяются пройденный путь и скорость, выглядят следующим образом:

$l(t) = v_0 t - \dfrac{at}{2}$, $v(t) = v_0 - at$ (В случае остановки $v(t) = 0$)

Выражая ускорение через начальную скорость и время, и подставляя в выражение для пройденного пути, получим

$$l(t) = \frac{v_0 t}{2} \qquad\qquad a = v_0 / t$$

Тогда, для первого и второго случаев торможения:

$$l_1 = \frac{v_{01} t_1}{2}, \qquad l_2 = \frac{v_{02} t_2}{2}, \tag{2}$$

$$a_1 = v_{01}/t_1, \qquad a_2 = v_{02}/t_2. \tag{3}$$

Учитывая $l_1 = l_2$, из (2) получаем: $v_{01} t_1 = v_{02} t_2$ или $\dfrac{v_{01}}{v_{02}} = \dfrac{t_2}{t_1}$. (4)

Учитывая (1) и (3), получим: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{v_{01}}{v_{02}} \cdot \dfrac{t_2}{t_1} = N$. Откуда выразим $\dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{v_{02}}{v_{01}} \cdot N$.

Подставив в (4), выражаем отношение скоростей:

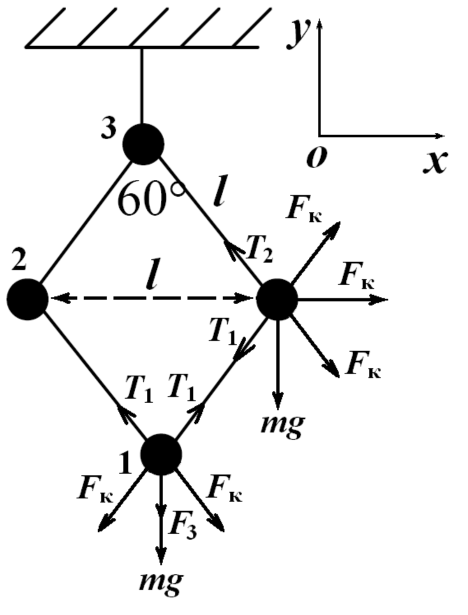
$$\frac{v_{01}}{v_{02}} = \frac{v_{02}}{v_{01}} \cdot N, \qquad \left(\frac{v_{01}}{v_{02}}\right)^2 = N, \qquad \boxed{\frac{v_{01}}{v_{02}} = \sqrt{N}}$$

Ответ: В $\sqrt{N}$ раз

6. Четыре небольших одинаково заряженных бусинки массой m каждая соединили четырьмя одинаковыми непроводящими нитями и подвесили за одну из бусинок, при этом нити, идущие от точки подвеса, образовали угол 60°. Определите силы натяжения нитей.

Решение:

Очевидно, что в силу симметрии необходимо рассмотреть только силы, действующие на нижнюю и одну боковую бусинку. Пусть заряды бусинок q, сила натяжения верхних нитей T_2, нижних – T_1, длина каждой из нитей l.



Так как угол между нитями в точке подвеса равен 60°, то расстояние между «боковыми» бусинками равно длине нити (см. рис).

Условие равновесия для бокового заряда в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси имеет вид:

OX: $(T_1 + T_2)\cos 60^\circ = (2\cos 60^\circ + 1) k \dfrac{q^2}{l^2}$

OY: $(T_2 - T_1)\cos 30^\circ = mg$

Подставляя числовые значения, имеем

$$T_1 + T_2 = 4k\frac{q^2}{l^2} \tag{1}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} mg \qquad (2)$$

Для нижнего заряда в силу симметрии системы полезный результат даст только проекция условия равновесия на вертикальную ось:

$$2T_1 \cos 30^\circ = mg + 2k\frac{q^2}{l^2}\cos 30^\circ + k\frac{q^2}{(2l\cos 30^\circ)^2}$$

После подстановки числовых данных, имеем

$$T_1 = \frac{mg}{\sqrt{3}} + k\frac{q^2}{l^2}\left(1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \qquad (3)$$

Т.о., имеем систему из трех уравнений с тремя неизвестными: T_1, T_2 и kq^2/l^2.

Выражаем из (1): $k\dfrac{q^2}{l^2} = \dfrac{T_1 + T_2}{4}$.

Подставим в (3): $T_1 = \dfrac{mg}{\sqrt{3}} + \dfrac{T_1 + T_2}{4}\left(1 + \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)$. Решаем это равенство совместно с (2) $T_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}} mg + T_1$, выражаем T_1:

$$4T_1 = \frac{4mg}{\sqrt{3}} + (T_1 + T_2)\left(1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$4T_1 = \frac{4mg}{\sqrt{3}} + (T_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} mg + T_1)\left(1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$4T_1 - 2T_1 - \frac{2}{3\sqrt{3}} T_1 = mg\left(\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\right)$$

$$2T_1\left(\frac{3\sqrt{3} - 1}{3\sqrt{3}}\right) = 2mg\left(\frac{3\cdot 3\sqrt{3} + 1}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\right)$$

$$\boxed{T_1 = mg\left(\frac{3\cdot 3\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}\cdot(3\sqrt{3} - 1)}\right) = mg\left(\frac{9\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}\cdot(3\sqrt{3} - 1)}\right)}$$

Учтём, что $T_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}} mg + T_1$. Тогда:

$$\boxed{\begin{aligned} T_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} mg + mg\left(\frac{9\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}\cdot(3\sqrt{3} - 1)}\right) = mg\left(\frac{9\sqrt{3} + 1 + 6\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}\cdot(3\sqrt{3} - 1)}\right) \\ &= mg\left(\frac{15\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}\cdot(3\sqrt{3} - 1)}\right) \end{aligned}}$$

Тогда находим искомые величины сил натяжения нижних и верхних нитей:

Ответ: $\boxed{T_1 = mg\left(\dfrac{9\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}\cdot(3\sqrt{3} - 1)}\right)}$, $\boxed{T_2 = mg\left(\dfrac{15\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}\cdot(3\sqrt{3} - 1)}\right)}$

7. Баллон вместимостью 50 литров наполнили воздухом при 27° С до давления 10 МПа. Какой объём воды можно вытеснить из цистерны подводной лодки воздухом этого баллона, если вытеснение производится на глубине 40 метров? Температура воздуха после расширения 3 С. (Атмосферное давление 10^5 Па, плотность воды 10^3 кг/м^3, ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2)

Решение:

Введём следующие обозначения: ν_1 – количество воздуха в баллоне изначально, ν_2 – количество воздуха в баллоне, после того, как часть воздуха вышла, ν_3 – количество вышедшего из баллона воздуха. Тогда, $\nu_1 = \nu_2 + \nu_3$. (1)

Начальное давление воздуха в баллоне – P_1. Давление оставшегося в баллоне воздуха P_2, давление воздуха в цистерне с водой – P_3, давление воды на глубине h – P_4. Учтём, что при установлении равновесия давления $P_2 = P_3 = P_4$. (2)

Давление $P_4 = P_{\text{а}} + \rho g h$, где $P_{\text{а}}$ – атмосферное давление.

V – объём баллона, $V_{\text{в}}$ – объём воздуха в цистерне с водой или объём вытесненной воды.

T – температура воздуха в баллоне, $T_{\text{в}}$ – температура воздуха в цистерне с водой.

1. Рассмотрим уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона) для воздуха в баллоне до и после выпускания части воздуха (температуру воздуха в баллоне считаем постоянной):

$P_1 V = \nu_1 R T$, $P_2 V = \nu_2 R T$.

Отсюда находим: $\dfrac{\nu_1}{\nu_2} = \dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{P_1}{P_{\text{а}} + \rho g h}$, $\nu_1 = \nu_2 \cdot \dfrac{P_1}{P_{\text{а}} + \rho g h}$ (3)

2. Рассмотрим уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона) для воздуха в баллоне и в цистерне с водой:

$P_2 V = \nu_2 R T$, $P_3 V_{\text{в}} = \nu_3 R T_{\text{в}}$.

Учитывая (2), получим $\dfrac{\nu_2 R T}{V} = \dfrac{\nu_3 R T_{\text{в}}}{V_{\text{в}}}$. Отсюда:

$$V_{\text{в}} = V \frac{\nu_3 T_{\text{в}}}{\nu_2 T}$$

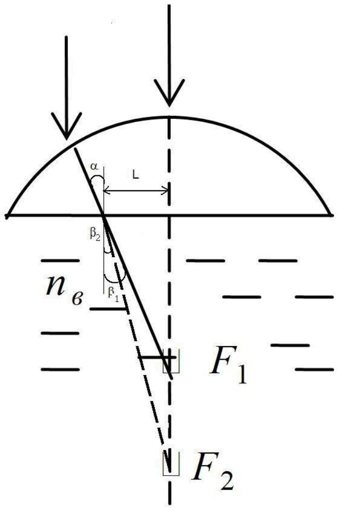
Учитывая (1) и (3):

$$V_{\text{в}} = V \cdot \frac{(\nu_1 - \nu_2)}{\nu_2} \cdot \frac{T_{\text{в}}}{T} = V \cdot \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} - 1 \right) \cdot \frac{T_{\text{в}}}{T} = V \cdot \left(\frac{P_1}{P_{\text{а}} + \rho g h} - 1 \right) \cdot \frac{T_{\text{в}}}{T}.$$

Т.о. $\boxed{V_{\text{в}} = V \cdot \left(\dfrac{P_1}{P_{\text{а}} + \rho g h} - 1 \right) \cdot \dfrac{T_{\text{в}}}{T}}$. Подставив численные данные, получим

Ответ: $V_{\text{в}}$ = 889 литров (g =9,8 м/с)
$V_{\text{в}}$ = 874 литра (g =10 м/с)

8. Плоско-выпуклая линза с фокусным расстоянием $F_1 = 10\,см$ погружена плоской поверхностью в воду так, что сферическая поверхность линзы находится в воздухе. Перпендикулярно к поверхности воды падают параллельные лучи света. На каком расстоянии F_2 от плоской поверхности линзы фокусируются световые лучи? Показатель преломления воды $n_в = 1{,}33$. Диаметр линзы много меньше её фокусного расстояния.



Решение:

Пусть луч выходит из линзы на расстоянии L от оптической оси. Для такого луча закон преломления в воздухе запишется

$$\sin\alpha/\sin\beta_1 = 1/n_{стекла},\ где\ tg\ \beta_1 = L/F_1.$$

Для луча, выходящего в воду получим

$$\sin\alpha/\sin\beta_2 = n_{воды}/n_{стекла},\ где\ tg\ \beta_2 = L/F_2.$$

из приведенных выше формул получим

$$\sin\beta_1/\sin\beta_2 = n_{воды},$$

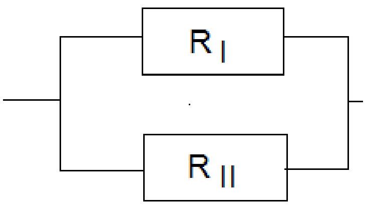
$$F_2 = F_1\, n_{воды} = 13{,}3\ см = 0{,}133\ м$$

Ответ: 0,133 м

5. Как надо соединить четыре проводника с сопротивлениями R_1 = 1 Ом, R_2 = 2 Ом, R_3 = 3 Ом и R_4 = 4 Ом, чтобы получить сопротивление R = 2,5 Ом.

Решение:

Очевидно, что последовательное и параллельное соединения в чистом виде не дают искомого результата. Рассмотрим вариант последовательно-параллельного соединения.



Где R_I , R_{II} – различные комбинации сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 , R_4

$$R_{общее} = R_I\, R_{II}/(R_I + R_{II})$$

При любой комбинации R_1 , R_2 , R_3 , R_4

$$R_I + R_{II} = 10 \text{ Ом.}$$

Следовательно, $R_I\ R_{II}$ должно быть равно 25. Это возможно только в случае

$$R_I = R_{II} = 5, \text{ т.е.}$$

$$R_I = R_1 + R_4, \text{ а } R_{II} = R_2 + R_3$$

Тогда итоговая схема выглядит следующим образом: