



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
по ЭКОНОМИКЕ
2020-2021 учебный год

10-11 класс

Задача 1. (Правильно и полностью решенная задача оценивается в 25 баллов)

Эксперт из антимонопольного ведомства анализирует рынок, на котором сложилась монопольная ситуация. С помощью эконометрической модели была выведена функция общих затрат фирмы-монополиста, которая имеет вид:

$$TC_q = q^2 + 20q + 100, \text{ где } q - \text{объем выпуска фирмы.}$$

Также экономистами ведомства была смоделирована функция рыночного спроса следующего вида:

$$Q_D = \frac{N}{10000} (80 - P), \text{ где } Q_D - \text{величина спроса, } N - \text{число покупателей, а } P - \text{цена товара.}$$

Эксперту известно, что рынки ресурсов, на которых фирма-монополист закупает необходимые ей ресурсы для производства товара, функционируют в условиях максимально близких к совершенной конкуренции.

Для принятия антимонопольных мер, по регулированию данного рынка, перед экспертом поставлено три задачи:

- 1) Определить, при каком количестве покупателей фирма будет безубыточной на данном рынке.
- 2) Определить, при каком количестве покупателей только одна фирма будет безубыточной, являясь при этом естественным монополистом.
- 3) Выяснить, если государство в целях минимизации общественных потерь от деятельности фирмы-монополиста в рамках антимонопольного регулирования установит предельно допустимую цену на уровне предельных затрат фирмы, то каково должно быть при этом число покупателей на рынке, которое обеспечит фирме безубыточную работу.

Решение.

Решение 1-го задания

1) Условие безубыточности работы фирмы: $TR \geq TC$.

2) Для удобства обозначим:

$$\frac{N}{10000} = A.$$

Тогда функцию спроса можно записать в следующем виде:

$$Q_D = A(80 - P).$$

Сразу же можно записать и обратную функцию спроса:

$$P_D = 80 - \frac{Q}{A}.$$

3) Очевидно, что выпуск фирмы зависит от числа покупателей ее продукции. Тогда можно вывести зависимость между объемом выпуска фирмы и числом покупателей:

3.1) Условие максимизации прибыли: $MC = MR$;

$$3.2) MC = TC'_q = (q^2 + 20q + 100)' = 2q + 20.$$

3.3) График MR у монополиста имеет угол наклона в два раз круче угла наклона графика спроса (надо угловой коэффициент в функции спроса умножить на 2). При этом надо использовать обратную функцию спроса, а не прямую:

$$P_D = 80 - \frac{Q}{A} \rightarrow MR = 80 - \frac{2Q}{A}$$

3.4) $MC = MR \rightarrow 2q + 20 = 80 - \frac{2Q}{A}$. Откуда получаем:

$$q = \frac{30A}{A+1}.$$



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
по ЭКОНОМИКЕ
2020-2021 учебный год

10-11 класс

4) Возвращаемся к условию безубыточности: $TR \geq TC$

$$4.1) TR = P \cdot q \rightarrow TR = \left(80 - \frac{q}{A}\right) \cdot \left(\frac{30A}{A+1}\right) \rightarrow TR = \left(80 - \frac{\frac{30A}{A+1}}{A}\right) \cdot \left(\frac{30A}{A+1}\right)$$

$$TR = \left(80 - \frac{30}{A+1}\right) \cdot \left(\frac{30A}{A+1}\right)$$

$$4.2) TC_q = q^2 + 20q + 100 \rightarrow TC_q = \left(\frac{30A}{A+1}\right)^2 + 20\left(\frac{30A}{A+1}\right) + 100$$

$$TC_q = \frac{900A^2}{(A+1)^2} + \frac{600A}{A+1} + 100$$

$$4.3) TR \geq TC \rightarrow \left(80 - \frac{30}{A+1}\right) \cdot \left(\frac{30A}{A+1}\right) \geq \frac{900A^2}{(A+1)^2} + \frac{600A}{A+1} + 100$$

Далее решаем это неравенство и находим значение A :

$$A \geq 0,125.$$

4.4) Находим необходимое число покупателей на рынке, при котором фирма-монополист при заданной функции спроса будет работать безубыточно:

$$A = \frac{N}{10000} \geq 0,125 \rightarrow N \geq 1250 \text{ покупателей.}$$

Ответ: для безубыточной работы на рынке у фирмы-монополиста должно быть не менее 1250 покупателей

Решение 2-го задания

Логика хода рассуждений при решении задания следующая:

1) Естественная монополия – это рыночная ситуация, при которой одна фирма может обеспечивать данный объем спроса с меньшими затратами, чем если бы на рынке присутствовало две и больше фирм.

Значит, надо определить объем выпуска, который будет обеспечен с меньшими затратами одной фирмой.

Для этого, в свою очередь, сравним средние затраты на производство некоего объема продукции Q одной и, например, двумя фирмами. При этом из условий задачи известно, что на рынках ресурсов существует ситуация совершенной конкуренции, значит ресурсы могут свободно перемещаться между фирмами и тогда для случая двух фирм на рынке продукции у них будут одинаковые затраты.

2) Если на рынке одна фирма, то ее объем выпуска соответствует рыночному объему:

$$q_{\text{фирмы}} = Q_{\text{рыночный}}$$

Если на рынке две фирмы, то объемы выпуска каждой из них, при условии деления рынка между ними пополам при равных затратах, будут равны:

$$q_{\text{фирмы}} = \frac{Q_{\text{рыночный}}}{2}$$



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

по ЭКОНОМИКЕ
2020-2021 учебный год

10-11 класс

3) Определим объем производства, при котором затраты будут одинаковыми и в случае, если на рынке присутствует только одна фирма, и в случае, если на рынке присутствует две фирмы. Это значит, что надо приравнять функцию общих затрат одной фирмы к функции общих затрат двух фирм:

$$TC(Q) = 2TC(Q/2)$$

3.1) Запишем функцию общих затрат для случая одной фирмы и для случая двух фирм на рынке:

- Одна фирма: $TC_Q = Q^2 + 20Q + 100$

- Две фирмы: $2TC_{Q/2} = 2\left[\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + 20\frac{Q}{2} + 100\right] \rightarrow 2TC_{Q/2} = \frac{Q^2}{2} + 20Q + 200$

3.2) Для корректного сравнения затрат одной и двух фирм на рынке надо перейти от функций общих затрат к функции средних затрат:

- Одна фирма: $ATC_Q = \frac{Q^2}{Q} + \frac{20Q}{Q} + \frac{100}{Q} \rightarrow ATC_Q = Q + 20 + \frac{100}{Q}$

- Две фирмы: $ATC_{Q/2} = \frac{\frac{Q^2}{2}}{\frac{Q}{2}} + \frac{20Q}{\frac{Q}{2}} + \frac{200}{\frac{Q}{2}} \rightarrow ATC_{Q/2} = \frac{Q}{2} + 20 + \frac{200}{Q}$

3.3) Приравняв ATC для одной фирмы и для двух фирм, мы тем самым определим тот объем выпуска у одной и двух фирм, при котором их ATC будут одинаковыми:

$$ATC_Q = ATC_{Q/2}$$

Подставив выражения для ATC_Q и $ATC_{Q/2}$ и преобразовав, получим:

$$Q \approx 14,14.$$

Таким образом при объеме выпуска $Q \approx 14,14$ ед. продукции, средние затраты у одной фирмы на рынке будут равны средним затратам у двух фирм на рынке.

3.4) Теперь надо определить величину затрат у фирм (они у них будут одинаковым и для случая одной фирмы на рынке и для случая двух фирм на рынке).

Подставляем найденный $Q \approx 14,14$ в функции средних затрат:

- Одна фирма: $ATC_Q = Q + 20 + \frac{100}{Q} = 14,14 + 20 + \frac{100}{14,14} \approx 41,21$

- Две фирмы: $ATC_{Q/2} = \frac{Q}{2} + 20 + \frac{200}{Q} = \frac{14,14}{2} + 20 + \frac{200}{14,14} \approx 41,21$

3.5) Теперь надо сравнить эти средние затраты 41,21 с ценой спроса при объеме выпуска 14,14. При этом:

- если $P_D \geq ATC$, то наблюдается безубыточное производство \rightarrow значит на рынке могут работать две фирмы (естественной монополии не будет).

- если $P_D < ATC$, то только одна фирма сможет работать на рынке, а фирма может быть естественной монополией при условии:

$$P_D^{14,14} = 80 - \frac{14,14}{A} < 41,21$$

3.6) Из неравенства в (3.5) находим:

$$A < 0,3646 \rightarrow \frac{N}{10000} < A \rightarrow \frac{N}{10000} < 0,3646 \rightarrow N < 3646$$



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

по ЭКОНОМИКЕ
2020-2021 учебный год

10-11 класс

Вывод:

Если фирма-монополист может работать безубыточно при численности покупателей не менее 1250, а естественным монополистом она может быть при численности покупателей не более 3646, значит, фирма может естественным монополистом и работать безубыточно на рынке при численности покупателей от 1250 до 3646.

Ответ: Фирма может стать естественным монополистом и работать безубыточно при численности покупателей на рынке от 1250 до 3646.

Решение 3-го задания

1) Чтобы обеспечить фирме-монополисту безубыточную работу при установлении цены на уровне ее предельных затрат очевидно, что должно выполняться условие:

$$MC \geq ATC.$$

2) Подставив известные функции MC и ATC в неравенство, найдем пограничное значение q , при котором $MC \geq ATC$:

$$MC = 2q + 20 \geq ATC_q = q + 20 + \frac{100}{q}$$

$$2q - q \geq \frac{100}{q} \rightarrow q \geq \frac{100}{q} \rightarrow q^2 \geq 100 \rightarrow q \geq 10$$

3) При $q = 10$ цена спроса P_D должна быть не менее ATC (см. рисунок выше):

$$P_D^{10} \geq ATC(10) \rightarrow 80 - \frac{10}{A} \geq 10 + 20 + \frac{100}{10}$$
$$80 - \frac{10}{A} \geq 40; \quad A \geq 0,25.$$
$$A = \frac{N}{10000} \geq 0,25; \quad N \geq 2500.$$

Ответ: Фирма будет способна работать безубыточно при установлении государством цены на уровне ее предельных издержек при условии, что количество покупателей ее продукции будет не меньше 2500 человек.

Задача 2. (Правильно и полностью решенная задача оценивается в 10 баллов)

Менеджер банка Алексей, получивший доход в размере 160 тыс. руб., заплатил налог в размере 25 тыс. руб.

Прогрессивное налогообложение доходов с физических лиц в стране определено следующими налоговыми ставками:

- доходы ниже 20 тыс. руб. не облагаются налогом;
- доходы свыше 20 тыс. руб. и не более 100 тыс. руб. облагаются по ставке 20%;
- доходы свыше 100 тыс. руб. облагаются по ставке 30%.

Ответ на вопросы:

1. Заплачен ли налог полностью?

2. Если нет, то:

- Какую часть дохода индивид скрыл;
- Каков размер налога со всего полученного дохода.



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

по ЭКОНОМИКЕ
2020-2021 учебный год

10-11 класс

Решение:

$$80 \cdot 0,2 = 16 \text{ тыс. руб.}$$

$$60 \cdot 0,3 = 18 \text{ тыс. руб.}$$

$$16 + 18 = 34 \text{ тыс. руб.} - \text{размер налога со всего дохода.}$$

$$34 - 25 = 9 \text{ тыс. руб.} - \text{недоплата.}$$

$$9 / 0,3 = 30 \text{ тыс. руб.} - \text{скрытая часть дохода.}$$

Ответ:

Скрыл 30 тыс. руб. дохода (заплатил налог со 130 тыс. руб.), размер налога со всего полученного дохода 34 тыс. руб.

Задача 3. (Правильно и полностью решенная задача оценивается в 20 баллов)

В связи со сложной эпидемиологической обстановкой руководитель предприятия вынужден перевести на удалённую работу как можно больше сотрудников, поскольку семье каждого сотрудника, заболевшего на работе он, согласно законодательству, обязан выплачивать значительное пособие. В связи с тем, что производительность труда каждого сотрудника при переходе на удалённую работу падает в пять раз, руководитель решает повысить производительность остальных сотрудников. Простимулировав их материально, ему удаётся повысить их производительность на некоторое целое число процентов, но не более, чем в полтора раза. На предприятии 310 сотрудников. Какое наибольшее число сотрудников он сможет отправить на удалённую работу, не изменяя количество производимой предприятием продукции? Во сколько раз удалось руководителю предприятия увеличить производительность труда сотрудников, не ушедших на дистанционную работу?

Решение.

Пусть x — число сотрудников, отправленных на удалённую работу. Пусть t — количество продукции, производимой одним сотрудником до начала эпидемии. Таким образом, до начала эпидемии предприятие производило $310t$ единиц продукции. Если x сотрудников будут переведены на удалённую работу, то количество единиц производимой продукции будет равно

$$(310 - x)t \left(1 + \frac{y}{100} \right) + \frac{xt}{5}.$$

Количество производимой продукции не изменится в том и только в том случае, если будет справедливо равенство

$$(310 - x)t \left(1 + \frac{y}{100} \right) + \frac{xt}{5} = 310t,$$

которое равносильно равенству

$$310y - xy = 80x.$$

Откуда

$$y = \frac{80x}{310 - x}.$$

Так как y — целое, то $80x$ должно делиться на $310 - x$. Так как

$$80x = 80(x - 310) + 24800,$$

то число 24800 должно делиться на $290 - x$. По условию $y \leq 50$, откуда



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
по ЭКОНОМИКЕ
2020-2021 учебный год

10-11 класс

$$\frac{80x}{310-x} \leq 50.$$

Следовательно, $x \leq 119$. Остаётся найти наибольшее целое x , для которого число 24800 делится на $310 - x$. Заметим, что $24800 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 31$. Следовательно, всякий делитель числа 24800 имеет вид $2^k \cdot 5^l \cdot 31^m$, где $0 \leq k \leq 5$, $0 \leq l \leq 2$, $0 \leq m \leq 1$. Так как $x \leq 119$, то $310 - x \geq 191$. Таким образом, $191 \leq 310 - x \leq 310$. Итак, нам нужно найти наименьший делитель d числа 24800, лежащий в промежутке $[191; 310]$. Если $m = 1$, то $l = 0$ или $l = 1$, так как при $l = 2$ получаем, что $d \geq 5^2 \cdot 31 = 775 > 310$. Если $l = 1$, то $k = 1$ и $d = 310$. Если $l = 0$, то $k = 3$ и $d = 248$. Откуда получаем, что $d = 248$. Следовательно, $310 - x = 248$ и $x = 62$. Используя равенство $y = \frac{80x}{310-x}$, получаем $y = 20$.

Ответ: наибольшее число сотрудников, которое можно отправить на дистанционную работу равно 62; руководителю предприятия удалось увеличить производительность труда сотрудников, не ушедших на дистанционную работу, на 20%.

Задача 4. (Правильно и полностью решенная задача оценивается в 20 баллов)

После смерти Скупого Рыцаря его наследник вернулся домой и узнал: покойный барон решил усложнить сыну путь к наследству. В поместье им запрятано множество сундуков, которые пронумерованы натуральными числами и содержат указания на любое целое неотрицательное число, своё для каждого сундука, мест хранения других сундуков, те – следующих и так далее вплоть до того, в котором находится завещание. Сын должен обнаружить его в сжатые сроки (что не даёт возможности просто перекопать поместье), иначе наследство отойдёт короне. Душеприказчики вручают ему сотню универсальных ключей. Замок каждого из сундуков имеет две скважины и рассчитан на использование двух любых ключей. Однако некоторые из сундуков являются «ложными». Ложный сундук невозможно открыть, а при попытке это сделать оба ключа просто сломаются.

Местоположение первых шести сундуков (№1-№6) уже известно. Сундук №1 открылся, открыв путь к сундуку №7, сундук №5 - тоже, дав указание на сундуки №18 и №29, остальные четыре сундука оказались ложными и сломали восемь ключей. Чтобы не лишиться ключей задолго до конца поисков, наследник начал искать способ решить задачу, не открывая все сундуки подряд. Поскольку вряд ли барон мог реализовать этот план в одиночку, сын стал расспрашивать слуг, обещая награду. Один смог назвать мастера, изготовившего сундуки. Другой поделился частью плана размещения карт в сундуках, уцелевшей, когда барон сжигал этот план.

Мастер поведал, что настоящих сундуков всего сотня, и все они имеют одну особенность: предполагается, что для открытия замка нужно поворачивать оба ключа одновременно, тогда оба они останутся целыми, и их можно будет использовать повторно. Однако если, вставив оба ключа в скважины, поворачивать только один, этот ключ сломается, но сундук при этом откроется, а второй ключ можно будет извлечь. Изготовитель ложных сундуков, как и их число, неизвестны, однако, осмотрев сундук №2, мастер обнаружил похожую особенность: открыть ключами их невозможно, но попытка открыть ложный сундук поворотом только одного ключа приводит к поломке и потере только этого ключа.

Из спасённых из огня записей удалось выяснить следующее:

1. В них описывается последняя часть схемы описания содержимого сундуков, так что один из них должен содержать искомое завещание.

2. Содержимое сундуков №209, №220, №223, №225, №228 и №230 не указано, так что завещание явно содержится в одном из них, а остальные – ложные.



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

по ЭКОНОМИКЕ
2020-2021 учебный год

10-11 класс

3. Сундук №229 указывает путь к сундуку №230, №226 - к №228 и №229, №224 - к №225 и №226, №222 - к №223, №208 - к №209, №220, №222 и №224, №200 - к №201 и №207.

4. В паре сундуков №201 и №207 один является ложным, а другой – указывает место сундука №208. Плохой почерк барона не позволяет точно установить, какой именно.

Предположим, наследник уже добрался до сундука №200.

Каково минимальное число ключей, которое у него должно остаться к этому моменту, чтобы гарантированно получить завещание, в каком бы из возможных сундуков оно ни находилось?

Каким должно быть это число, если предположить, что он не знает секретного приёма от мастера, позволяющего пытаться открывать сундук поворотом только одного ключа?

Какие общие рекомендации по экономии ключей в процессе поиска сундука №200 вы бы могли ему дать?

Решение:

Начнём с того, что является очевидным в процессе поисков и может быть использовано в качестве рекомендаций наследнику по экономии ключей:

а) Если в данный момент проверены все сундуки, местоположение которых известно, кроме одного, но завещание ещё не найдено, оставшийся последний сундук обязан оказаться настоящим, а следовательно, открывается поворотом двух ключей без их потери.

б) Если в данный момент проверены все сундуки, местоположение которых известно, кроме двух, но завещание ещё не найдено, то как минимум один из них обязан оказаться настоящим. В этом случае имеет смысл прибегнуть к секретному приёму от мастера, связанному с поворотом только одного ключа и, если первый сундук оказался ложным, открывать второй сундук двумя ключами без проверки.

Предположим, что наследнику не удастся угадать, какой из сундуков - №201 или №207 - указывает место сундука №208. Сознывая это, он прибегнет к рассуждению б) и в самом худшем случае потратит только один ключ.

Далее, все сундуки, за исключением упомянутых в пункте 2, он, в соответствии с рассуждением а), будет открывать двумя ключами без их потери.

*В пункте 2 указано шесть сундуков, в каждом из которых может оказаться завещание. В самом худшем случае оно окажется в последнем открытом сундуке. Это значит, что предыдущие пять имеет смысл открыть поворотом одного ключа, потратив таким образом пять ключей. Прибавим к этому ключ, сломанный во время поисков сундука №208, и те два ключа, которые должны остаться у наследника, чтобы открыть сундук с завещанием, и получим в итоге минимально необходимое число в **8 ключей**.*

*Если предположить, что секретный приём ему неизвестен, он рискует потерять два ключа во время поисков сундука №208 и ещё десять ключей, пытаясь открыть пять ложных сундуков из пункта 2. Значит, вместе с ключами, которыми он откроет сундук с завещанием, ему понадобится **14 ключей**.*

Задача 5. (Правильно и полностью решенная задача оценивается в 25 баллов)

На затерянном острове проживает племя туземцев с необычными экономическими традициями. Все обитатели острова питаются только особыми фруктами – дурианами, которые индивидуально собираются с деревьев разной высоты. Остальные возможности потребления запрещены строгим набором верований этого племени.

Предположим, что количество обитателей острова, занятых добычей и обменом дурианами (трудоспособное население, N), составляет 1000 человек. Туземцы неукоснительно соблюдают древнее табу, которое требует не потреблять результат своего труда, а сначала обменяться



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
по ЭКОНОМИКЕ
2020-2021 учебный год

10-11 класс

собранными дурианами с любым своим соплеменником. Это значит, что акт потребления возможен только тогда, когда каждый житель, который хотел бы обменять свой дуриан на аналогичный продукт, найдет подходящего контрагента. Допустим, что за один раз абориген может собрать только один фрукт, и процесс нахождения потенциального «покупателя» не реализуется мгновенно, а сопряжен с трансакционными издержками на поиск подходящего контрагента. Также предположим, что на острове отсутствует кредит (то есть, для реализации своей потребности в дуриане каждый трудоспособный житель должен быть вовлечен в поиск фруктовых деревьев и сбор продукции).

В каждый период времени трудоспособный обитатель острова может пребывать в одном из двух состояний: находиться в процессе поиска фруктовых деревьев (сбора фруктов с них, т.е., «производства») или находиться в процессе поиска контрагента для обмена (имея на руках уже собранный дуриан). Между двумя этими категориями наблюдается взаимный переток трудоспособного населения.

Аборигены, вовлеченные в процесс поиска соплеменников для обмена («торгующие» жители), составляют на начало периода долю x от трудоспособного населения. Пусть каждый абориген находит себе торгового партнера со средним темпом g (фактически, это показатель времени, которое требуется затратить для совершения обменной операции). Успешность индивидуальных обменных операций напрямую зависит от количества торгующих жителей острова (то есть, $g = f(x)$). Рассмотрим простую ситуацию, при которой $g = x$.

Оставшаяся часть трудоспособного населения, занятая в данный период поиском и сбором фруктов, затрачивает на это определенные усилия. Пусть параметр f обозначает средний темп, с которым каждому жителю удается решить проблему нахождения дерева и доставания с него дуриана (фактически, это вероятность успешного акта «производства», зависящая от желания и усилий индивида).

Вопросы:

- (1) Выпишите уравнение, описывающее, от каких факторов будет зависеть изменение x в данном периоде. Приведите его экономическую интерпретацию.
- (2) Какое количество трудоспособного населения перейдет в данном периоде из категории «производителей» (сборщиков дурианов) в категорию «торговцев» (предлагающих дурианы к взаимному обмену), если на начало периода доля x составляла 40% трудоспособного населения, а параметр f равен 0,15?
- (3) Объясните, что будет обозначать ситуация, при которой $f = 0$. Каковы возможные причины и экономические последствия?
- (4) Будем считать равновесием на рынке труда ситуацию, при которой количество «производителей» и «торговцев» остается постоянным (то есть, доля x не меняется с течением времени). Найдите два возможных равновесных исхода. Каким будет равновесное значение x при $f = 0,15$ (при расчете округляйте значения до двух знаков после запятой)?
- (5) Находясь в статусе «производителей», обитатели острова имеют следующую функцию индивидуального благосостояния (функцию полезности): $U_1 = f \cdot c$ (где $c < 0$: величина издержек (антиполезность труда)). При этом обитатели острова, находящиеся в статусе «торговцев», имеют функцию индивидуального благосостояния $U_2 = g \cdot y$ (где y – объем потребления дурианов). При каком условии у жителей острова будут стимулы к увеличению своего потребления с течением времени? Приведите экономическую интерпретацию. Вычислите долю x , соответствующую данному условию, если $f = 0,15$; $c = (-80)$; $y = 120$.

Решение:

(1) Уравнение, описывающее изменение x в данном периоде, т.е. показывающее перетоки аборигенов из одной категории в другую за рассматриваемый период, имеет вид:

$$\Delta(x \cdot N) = f \cdot (1 - x) \cdot N - (g \cdot x \cdot N).$$

Поскольку по условию $g = x$, то: $\Delta(x \cdot N) = f \cdot (1 - x) \cdot N - x^2 \cdot N$.



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
по ЭКОНОМИКЕ
2020-2021 учебный год

10-11 класс

Откуда, поделив на N , получим:

$$\Delta x = f \cdot (1 - x) - x^2.$$

Интерпретация: доля трудоспособного населения, находящаяся в положении «торговцев», будет увеличиваться по мере того, как с темпом f люди будут находить дурианы и перетекать из категории сборщиков в категорию торговцев. При росте f эффективность «производства» (т.е., поиска и сбора) растет \Rightarrow более быстро пополняется состав «торговцев» и снижаются временные затраты на поиск контрагента. При этом с темпом g «торговцы» находят контрагента для обмена, потребляют дуриан и возвращаются в состав «производителей» \Rightarrow рост параметра g приводит к более быстрому выыттию из состава «торговцев».

(2) Из полученного уравнения нам нужен первый компонент, который как раз и покажет «приток» в категорию торговцев: **приток** $= f \cdot (1 - x) \cdot N = 0,15 \cdot (1 - 0,4) \cdot 1000 = 90$.

(3) Для $f = 0$: $\Rightarrow \Delta x = -x^2$.

Интерпретация: при $f = 0$ количество «торгующих» на острове будет убывать с темпом x^2 . Это означает, что с течением времени на острове не останется возможностей для потребления.

Причины, почему f может быть нулевым:

1. Из-за засухи или стихийного бедствия на острове не осталось дурианов;
2. Дурианы остались только на самых верхних ветках деревьев, и аборигены не могут их достать.

(4) Условие равновесия: $\Delta x = 0$.

Первый возможный равновесный исход – при $f = 0$:

$$\Delta x = -x^2 = 0 \Rightarrow x^* = 0.$$

(ситуация, при которой никто не хочет собирать дурианы \Rightarrow в итоге никто не будет занят и в обмене ими).

Второй возможный равновесный исход – при $f > 0$:

$$\Delta x = f \cdot (1 - x) - x^2 = 0$$

Раскрываем скобки и решаем квадратное уравнение относительно x :

$$x^2 + f \cdot x - f = 0$$

Видим два корня: $x_{1,2}^* = \frac{1}{2} \cdot (-f \pm \sqrt{f^2 + 4 \cdot f})$

Один корень $x_1^* = \frac{1}{2} \cdot (-f - \sqrt{f^2 + 4 \cdot f})$ – его сразу отмечаем, так как видно, что получится в итоге отрицательное число (а это противоречит здравому смыслу: доля от населения не может быть отрицательной).

Соответственно, остается одно решение: $x_2^* = \frac{1}{2} \cdot (-f + \sqrt{f^2 + 4 \cdot f})$

При $f = 0,15$ получим: $x^* = \frac{1}{2} \cdot (-0,15 + \sqrt{0,15^2 + 4 \cdot 0,15}) =$
 $= \frac{1}{2} \cdot (-0,15 + 0,79) = 0,32$ (т.е. 32%).

(5) Для того, чтобы с течением времени потреблять больше дурианов, необходимо, чтобы для каждого индивида его положительная полезность от потребления превышала по модулю его отрицательную полезность (издержки) на сбор фруктов (необходимый для их последующего обмена): $U_2 - |U_1| > 0$

Тогда $g \cdot y > |f \cdot c| \Rightarrow$ при $g = x$ (по условию): $x > \frac{|f \cdot c|}{y}$

Экономическая интерпретация: чтобы иметь возможность увеличивать потребление, требуется чтобы высокой была людей, занятых в «торговле» (ведь расширение возможностей



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

по ЭКОНОМИКЕ
2020-2021 учебный год

10-11 класс

обмена – единственный способ увеличивать потребление). То есть, доля x имеет некоторый «критический» уровень (который может отличаться от равновесного, вычисленного в п. 4), и при величине ниже этого уровня издержки (антиполезность) будут превышать выгоды от потребления. Исходя из получившейся формулы, большему критическому значению x соответствует и более высокий уровень усилий, которые индивидам требуется прикладывать для сбора дурианов. Если индивиды будут прикладывать значительные усилия (это означает и большие издержки \Rightarrow более высокую антиполезность) для сбора высоко висящих дурианов, то это должно компенсироваться более высоким уровнем полезности, получаемым от потребления (а этот уровень при заданном u определяется как раз возможностью более быстро найти контрагента для обмена (более высоким x)).

Из условия при данных нам значениях параметров найдем, что

$$x > \frac{|0,15 \cdot (-80)|}{120} \Rightarrow x > 0,1 \text{ (то есть } x \text{ должна превышать } 10\%).$$