

Шифр:

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА  
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ  
2015–2016**

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады **ЭКОНОМИКА (10-11 класс)**

Город, в котором проводится Олимпиада \_\_\_\_\_

Дата \_\_\_\_\_

\*\*\*\*\*

**Задача 1.**

В Стране чудес на рынке производства эликсира «Выпей меня» присутствует 50 одинаковых фирм-производителей. Все фирмы должны производить эликсир, строго следуя рецептуре приготовления и разливать в одинаковые флаконы. Для каждой фирмы зависимость между издержками производства и объемом выпуска флаконов с эликсиром задана функцией  $TC=0,5 \cdot Q^2+4 \cdot Q+18$ , где TC – стоимость производства в тыс. золотых монет, Q – объем производства эликсира в тысячах штук флаконов.

**Определите:**

1. Какой объем продукции будет предложен всеми производителями при установлении на рынке цены  $P=9$  золотых монет за флакон?
2. Каковы равновесные параметры рынка (цена и объем продаж), если спрос на продукцию задан функцией  $Q_D=7000/P$ ?
3. Каков коэффициент эластичности спроса при равновесной цене?
4. Какова величина прибыли или убытков отдельной фирмы при установлении равновесия?
5. Какой должна быть равновесная цена рынка, чтобы каждая отдельная фирма получала нулевую экономическую прибыль?

**Решение:**

1.  $TC=0,5 \cdot Q^2+4 \cdot Q+18$ ;  $MC=Q+4$ ;  $Q=-4+P$ ; для 50 фирм  $Q=-200+50 \cdot P$ ;  $P=9$  руб.;  $Q=250$  тыс. шт.
2.  $Q=-200+50 \cdot P=Q_D=7000/P$ ;  $50 \cdot P^2-200P-7000=0$ ;  $P^2-4P-140=0$ ;  $P=14$  руб.;  $Q=500$  тыс. шт.
3.  $E=-1 \cdot (7000/P^2) \cdot P/(7000/P)=-1$
4.  $Прибыль=TR-TC=14 \cdot 10-(0,5 \cdot 10^2+4 \cdot 10+18)=32$  тыс. руб.
5.  $Прибыль=TR-TC=0$ ;  $P \cdot Q-(0,5Q^2+4 \cdot Q+18)=0$ ; вместо  $P$  подставляем выражение через объем  $(Q+4) \cdot Q-(0,5Q^2+4 \cdot Q+18)=0$ ;  $Q=6$ ;  $P=10$  руб.

**Задача 2.**

У жителей Страны чудес изменились доходы. Реакция населения Страны чудес на изменения дохода такова, что при увеличении дохода на 1% расходы на потребление снижаются на 0,6%. На данное время расходы на потребление в Стране чудес составляют в среднем 70% всего дохода.

**Если доходы в ближайшее время увеличатся на 10%, каким станет удельный вес расходов на потребление от всего дохода?**

**Решение:**

*С расходы на потребление*

*I доходы*

$$C=0,7 \cdot I \quad 0,94 \cdot C=x \cdot 0,9 \cdot I \quad 0,94 \cdot 0,7 \cdot I=x \cdot 0,9 \cdot I \quad x=(0,94 \cdot 0,7)/0,9=0,731$$

**Расходы на потребление составят 73,1% от всех доходов**

### Задача 3.

Сельскохозяйственная артель в составе **деда, бабушки, внушки, Жучки, кошки и мышки** получила субсидию в рамках программы государственной поддержки импортозамещения с целью выращивания новой большой-пребольшой репки, а также больших-пребольших разновидностей других огородных культур. В результате, помимо репки, у них выросли: гигантский лук, гигантская морковь, гигантская свёкла и картофель (почему-то обычных размеров). Со сбором **картофеля** проблем не возникло, однако оказалось, что вытягивать гигантский **лук** поодиночке могут только люди, с гигантской **морковью** справиться в одиночку вообще невозможно, а гигантская **свёкла** поддаётся только совместным усилиям двух человек (один человек и двое животных уже не справляются). **Репку**, как и в прошлый раз, оказалось возможно вытянуть только всем вместе, вшестером. В итоге от продажи урожая были выручены следующие суммы:

Картофель	90 000 руб.
Лук	75 000 руб.
Морковь	60 000 руб.
Свёкла	48 000 руб.
Репка	30 000 руб.

Дед предложил поделить итоговую сумму в 303 000 руб. поровну между всеми огородниками. Но против подобной схемы выступила считающая себя "продвинутой" внучка, заметив, что люди, как обладающие большими возможностями и, соответственно, затратившие больше усилий, по справедливости должны и получить больше. Она предложила схему, по которой каждый человек получает 55 000 руб., а каждое животное – 46 000 руб. Если же её делёж не будет принят, внучка пригрозила в будущем году выйти из состава артели с выделением ей персонального участка в размере 1/6 от каждой грядки, от чего артель, разумеется, проиграет.

Окончательное решение было отложено до утра. Ночью хитрая мышка переговорила сначала с дедом и Жучкой, затем с бабушкой и кошкой, предлагая проголосовать утром за схему дележа, предложенную изначально дедом, и доказывая, что артель сможет обойтись и без эгоистичной внушки в случае её ухода.

**Вопрос:** Установите, есть ли у мышки возможность убедить деда, бабушку, Жучку и кошку, что артель способна успешно функционировать и без внушки, работая на участке площадью 5/6 от изначальной, и если да - каким образом, если:

1. цены и количество посаженных растений в будущем году считаются такими же, как в текущем;
2. все участники переговоров (дед, бабушка, Жучка, кошка и мышка) стремятся к максимизации собственного дохода;
3. ни один из участников переговоров не поверит, что другой участник согласился на получение дохода меньшего, чем он был бы способен заработать сам вне артели;
4. Жучка ни при каких обстоятельствах не поссорится с дедом, а кошка – с бабушкой (то есть каждую пару «дед-Жучка» и «бабушка-кошка» уместно рассматривать как единого участника артели);
5. Бабушка и кошка не знают, что мышка говорит деду и Жучке, и наоборот.

**Решение:** такая возможность у мышки действительно есть, учитывая, что при обеих схемах раздела меняются доли только внушки и мышки; правда, для этого мышке придётся поступить не совсем честно. Рассмотрим возможности участников артели без внушки, при этом с математической точки зрения уместно считать, что их трое, а не пятеро, поскольку пары «дед-Жучка» и «бабушка-кошка» рассматриваем как единых участников артели.

Итак, коллектив из мышки, а также пар «дед-Жучка» и «бабушка-кошка» способен собирать любые овощи, кроме репки. При этом мы должны иметь в виду, что площадь общего участка уменьшается за счёт персонального участка внушки. Таким образом, из суммы в 303 000 руб., которую заработали бы все герои вместе с внушкой, нужно вычесть стоимость репки, а затем уменьшить её на 1/6.

$$(303\ 000 - 30\ 000) \cdot 5/6 = 227\ 500$$

При схеме раздела, предложенной внучкой, мышка должна получить 46 000, а выигрыши пар складываются из выигрыша одного человека и одного животного:

$$55\ 000 + 46\ 000 = 101\ 000$$

Таким образом, во-первых, ни одна из пар не согласится на меньший выигрыш, во-вторых, никто не допустит, что мышка согласится получить меньше предлагаемого ей дедом, и в-третьих, не поверит, что другая пара согласится получить меньше, чем могла бы получить, вообще не сотрудничая с прочими членами артели. Последнее число определяется как доход от картофеля, лука и моркови (больше ничего одной паре не собрать) с участка, на который может рассчитывать одна пара (то есть  $1/3$  огорода), то есть  $(90\ 000 + 75\ 000 + 60\ 000)/3 = 75\ 000$

С другой стороны, сумма данных выигрышей составляет  $50\ 500 + 101\ 000 + 75\ 000 = 226\ 500$

При этом коллектив, работая внятером, способен получить на 1 000 больше этой суммы. Соответственно, при переговорах с парой «дед-Жучка» (конкретное распределение денег внутри пары несущественно) мышке достаточно предложить схему раздела

Мышка	«дед-Жучка»	«бабка-кошка»
50 500	102 000	75 000

А при переговорах с парой «бабка-кошка», соответственно

Мышка	«дед-Жучка»	«бабка-кошка»
50 500	75 000	102 000

#### Задача 4.

В Стране чудес было единственное, но свое учебное заведение – Университет чудес, управлял им ректор. Ректор Университета чудес решил повысить рейтинг руководимого им учебного заведения путём материального стимулирования публикационной активности сотрудников. Для этого была сформирована комиссия, предложившая выплачивать ежемесячно в течение года (12 месяцев) определённую надбавку: по 59 золотых монет каждому сотруднику, опубликовавшему в престижных журналах в предшествующем году не менее 4 статей, и по 39 золотых монет – каждому сотруднику, опубликовавшему 3 статьи, и с этой целью выделить из бюджета университета определённую сумму, кратную двенадцати. Однако оказалось, что выделенную сумму не удастся распределить полностью между сотрудниками ни при каком количестве претендентов на надбавку.

**Какое наибольшее значение могла иметь эта сумма?**

**Решение.** Пусть  $n$  — предполагаемая ежемесячная выплата, пусть  $x_0$  — число претендентов на первую надбавку и  $y_0$  — число претендентов на вторую. Тогда  $x_0$  и  $y_0$  неотрицательны и  $59x_0 + 39y_0 = n$ . Докажем, что при любом  $n > 59 \cdot 39 = 2301$  уравнение  $59x + 39y = n$  имеет решение в натуральных числах. Отсюда будет следовать, что при любом  $n \geq 58 \cdot 38 = 2204$  уравнение  $59x_0 + 39y_0 = n$  имеет решение в неотрицательных целых числах. Во-первых, заметим, что  $59 \cdot 2 + 39 \cdot (-3) = 1$ , откуда  $59 \cdot (2n) + 39 \cdot (-3n) = n$ . Следовательно, уравнение  $59x + 39y = n$  имеет решение в целых числах при любом целом  $n$ . Если  $(x_0; y_0)$  — произвольное целое решение этого уравнения, то  $(x_0 + 39; y_0 - 59)$  и  $(x_0 - 39; y_0 + 59)$  — тоже его решения. Поэтому среди целых решений этого уравнения можно выбрать решение  $(x_0; y_0)$ , для которого  $1 \leq x_0 \leq 39$ . Тогда  $59x_0 < 59 \cdot 39$ . Если  $n > 59 \cdot 39$ , то  $y_0 = \frac{n - 59x_0}{39} > 0$ , и, таким образом,  $(x_0; y_0)$  — решение уравнения  $59x + 39y = n$  в натуральных числах. Осталось доказать, что уравнение  $59x + 39y = 2300$  не имеет решений в натуральных числах. Рассуждаем от противного. Пусть натуральные числа  $x_0$  и  $y_0$  таковы, что  $59x_0 + 39y_0 = 2300$ . Тогда  $x_0$  делится на 39, откуда  $59x_0 + 39y_0 > 59 \cdot 39 = 2301$ . Противоречие. Итак, 2203 рублей — наибольшая сумма, кратная 12, которая не может быть выплачена в месяц. Следовательно, наибольшее значение выделенной для надбавок суммы могло составить  $2203 \cdot 12 = 26436$  рублей.

**Ответ: 26436 рублей.**

#### Задача 5.

Фирмы «Светоч», «Колор» и «Художник» производят комплекты красок и мольберты. Производственные возможности каждой из фирм характеризуются следующими данными: фирма «Светоч» может выпускать за один рабочий день максимум 24 комплекта красок или 16 мольбертов, фирма «Колор» - 20 комплектов красок или 30 мольбертов, а фирма «Художник» - 10 комплектов красок или 40 мольбертов.

Фирмы поставляют на небольшой местный рынок художественных принадлежностей все производимые ими мольберты, являясь при этом единственными продавцами на этом рынке. Функция спроса на мольберты описывается уравнением:

$$Q_{\text{мольбертов}} = 100 - 8 \cdot P_{\text{мольбертов}},$$

где  $Q_{\text{мольбертов}}$  – это объем спроса на мольберты, а  $P_{\text{мольбертов}}$  – цена мольбертов. Также известно, что на этом рынке равновесие достигается при цене 6 денежных единиц.

Для расширения своего присутствия на местном рынке художественных принадлежностей владельцы этих фирм решили продавать производимые ими краски. Изучение рынка красок показало, что там действует достаточно много других поставщиков этой продукции, а продажи аналогичных комплектов красок осуществляются по одной и той же цене. Для освоения рынка красок фирмы решили объединить свои усилия. В первый день продаж красок стало известно, что фирма «Светоч» получила предельную выручку в размере 12 денежных единиц.

**Необходимо:**

1) Построить общую дневную границу производственных возможностей трех фирм после их объединения с указанием на соответствующих осях координатной плоскости числовых параметров, определяющих эту границу, а также дать исчерпывающие пояснения своих построений.

2) Определить ежедневную суммарную выручку, получаемую каждой фирмой от продажи в этой стране производимых ею красок и мольбертов.

**Решение:**

Выполнение задания 1.

1) Общая кривая производственных возможностей строится исходя из правила – каждая фирма должна производить тот товар, который она может изготавливать с наибольшей эффективностью (производительностью). Для наглядности можно свести данные в условиях задачи производственные возможности фирм в таблицу

Название фирм	Краски	Мольберты
Светоч	24	16
Колор	20	30
Художник	10	40

Из условий задачи и приведенной таблицы понятно, что фирма «Светоч» имеет преимущества в изготовлении красок (24 против 20 у «Колор» и 10 у «Художника»). Фирма «Художник» имеет преимущества в изготовлении мольбертов (40 против 16 у «Светоч» и 30 у «Колор»). А фирма «Колор» занимает срединное положение (т.е. может заниматься производством и красок и мольбертов).

2) Исходя из этого, можно найти координаты точек, которые определяют конфигурацию границы производственных возможностей:

Точка 1.

Все фирмы направляют все свои ресурсы на производство красок и, следовательно, не могут произвести ни одного мольберта:

Краски = 54 (24 + 20 + 10); Мольберты = 0.

Точка 2.

Все фирмы направляют все свои ресурсы на производство мольбертов и, следовательно, не могут произвести ни одного комплекта красок:

Краски = 0; Мольберты = 86 (16 + 30 + 40).

Точка 3.

Фирма «Светоч» производит краски (у нее преимущество в производстве красок), а фирмы «Колор» и «Художник» производят мольберты:

Стулья = 24; Диваны = 70 (30 + 40).

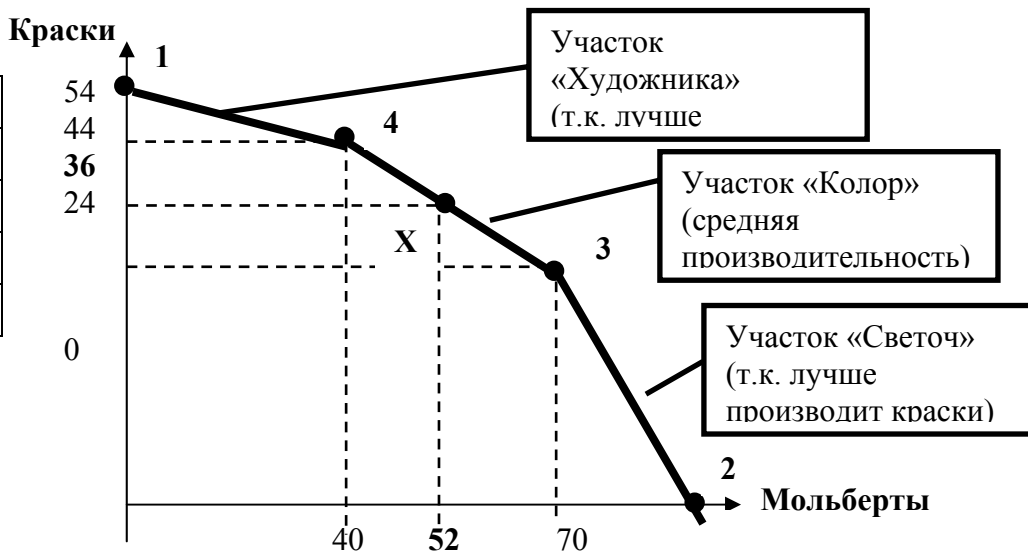
Точка 4.

Фирма «Художник» производит мольберты (у нее преимущество в производстве мольбертов), а фирмы «Колор» и «Светоч» производят краски:

Краски = 44 (24 + 20); Мольберты = 40.

3) Строим по точкам границу производственных возможностей:

	Краски	Мольберты
Точка 1	54	0
Точка 2	0	86
Точка 3	24	70
Точка 4	44	40



### Выполнение задания 2.

1) Находим, сколько мольбертов производят все фирмы с учетом спроса на них при цене равновесия в 6 ден.ед. Для этого подставляем в известную из условий задачи функцию спроса цену в 6 ден. ед.:

$$Q_{\text{мольбертов}} = 100 - 8 \cdot 6 = 52 \text{ мольберта}$$

Из эти 52 мольбертов:

- 40 мольбертов произвела фирма «Художник» (это видно из построенного графика + она имеет преимущество в производстве мольбертов);
- тогда 12 мольбертов приходится на фирму «Колор»
- фирма «Светоч» не производит мольбертов вообще (у нее преимущество в производстве красок).

2) Находим, какое максимально возможное количество красок будет произведено и продано при произведенных фирмами 52-ух мольбертов:

- фирма «Художник» не произведет ни одного комплекта красок, т.к. она производит максимально возможное для нее количество мольбертов;
- так как фирма «Светоч» не производила мольбертов вообще, то она должна в этом случае произвести максимально возможное количество комплектов красок (воспользовавшись своим преимуществом в производстве красок), т.е. – 24 комплекта красок.

- фирма «Колор» должна произвести 12 комплектов красок, т.к. она не использовала все свои производственные мощности при производстве мольбертов. Цифра 12 получается следующим образом:

- ✓ Альтернативная стоимость производства одного мольберта для фирмы «Колор» равна произведенному некоторому количеству комплектов красок, т.е.  $20/30 = 2/3$  комплекта красок. Это означает, что при производстве одного мольберта фирма «Колор» несет потери в виде  $2/3$  произведенного комплекта красок (или один мольберт стоит фирме  $2/3$  комплекта красок)
- ✓ Альтернативная стоимость 12-ти произведенных фирмой «Колор» мольбертов равна:  $2/3 \cdot 12 = 8$  комплекта красок.
- ✓ Из условий задачи фирма «Колор» может максимально произвести 20 комплектов красок. Значит при производстве ею 12-ти мольбертов она должна оставшиеся ресурсы направить на производство красок, которые она произведет в количестве:  $20 - 8 = 12$  комплектов красок.

Таким образом, вместе фирма «Светоч» и фирма «Колор» произведут и выставят на рынок:

$24 + 12 = 36$  комплектов красок (при этом фирма «Художник» полностью сосредоточена на производстве мольбертов в количестве = 40 шт.). На графике это обозначено точкой X с координатами (52; 36).

3) Находим суммарную выручку каждой фирмы, которую они получают при реализации мольбертов и красок:

- выручка = цена товара · количество проданного товара;
- из условий задачи можно сделать вывод, что на рынке красок существует совершенная конкуренция, т.к. фирмы продают их по одной и той же цене. Отсюда следует, что цена комплекта красок равна

предельной выручке. А так как из условий задачи известно, что фирма «Светоч» получила предельную выручку в 12 ден. ед., то и цена комплекта красок равна 12 ден. ед. ( $P_{\text{красок}} = 12$  ден. ед.)

- Для удобства определения суммарной выручки каждой фирмы составим таблицу:

Фирма	Кол-во комплектов красок	Цена комплекта красок	Выручка от продажи красок	Кол-во мольбертов	Цена мольберта	Выручка от продажи мольбертов	Суммарная выручка фирмы
«Светоч»	24	12	288	0	6	0	288
«Колор»	12	12	144	12	6	72	216
«Художник»	0	12	0	40	6	240	240

**Ответ:**

Суммарная выручка фирмы «Светоч» равна 288 ден.ед.; фирмы «Колор» 216 ден.ед.; фирмы «Художник» 240 ден.ед.

**КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ОТВЕТОВ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ  
(10-11 класс)**

№ задания	Критерии оценивания	Баллы
<b>Задача 1</b>	Все 5 заданий решены полностью, даны верные ответы и задания имеют правильный ход решения	<b>25</b>
	Решены полностью правильно четыре из пяти заданий, которые имеют верный ход решения и правильные ответы	20
	Решены полностью правильно три из пяти заданий, которые имеют верный ход решения и правильные ответы.	15
	Решены полностью правильно два из пяти заданий, которые имеют верный ход решения и правильные ответы	10
	Решено полностью только одно задание, дан правильный ответ. Второе задание решено неверно.	5
	Не решено ни одно из заданий	0
<b>Задача 2</b>	Задача полностью решена правильно, представлены правильные решения, даны правильные ответы.	<b>10</b>
	Задача решена частично правильно: ход решения верный, но в допущены арифметические ошибки	5
	Полностью неправильно решена задача	0
	Оба задания решены неверно.	0
<b>Задача 3</b>	Задача решена полностью, ответ правильный, представлены полностью и правильно перспективные схемы раздела дохода	<b>20</b>
	Задача решена полностью, ответ получен правильный, условия индивидуальной и группой рациональности не нарушены, но сделаны арифметические ошибки.	15
	Задача решена полностью, нарушено условие индивидуальной рациональности, но условие группой рациональности не нарушено, могут присутствовать арифметические ошибки	10
	Задача решена полностью, условие группой рациональности нарушено, могут присутствовать арифметические ошибки, нащупан правильны ход решения	5
	Полностью неправильно решена задача	0
<b>Задача 4</b>	Задача полностью решена правильно, представлены правильные решения, даны правильные ответы.	<b>20</b>
	Задача решена частично правильно: имеется в большей части верный ход решения.	10
	Полностью неправильно решена задача	0
<b>Задача 5</b>	Задача полностью решена правильно: 1) В ответе на первое задание верно представлен график границы производственных возможностей с верно указанными на осях координат числовыми параметрами и даны исчерпывающие, ясные и непротиворечивые пояснения графических построений; 2) В ответе на второе задание верно представлены количественные значения ежедневной суммарной выручки каждой из трех фирм, которые сопровождаются верными пояснениями хода решения этого задания	<b>25</b>
	Одно из двух заданий решено частично правильно: 1) Либо в ответе на первое задание верно представлен график границы производственных возможностей (его конфигурация), но числовые параметры на осях координат приведены частично или приведены, но неправильно из-за ошибок в арифметических подсчетах, при этом пояснения к построению	20

	<p>графика верны или верны частично.          Либо график построен неверно, но даны абсолютно верные пояснения к его построению.          Либо график построен верно и правильно приведены числовые параметры на осях, но в пояснениях к его построению имеются содержательные ошибки.          Второе задание выполнено полностью правильно.</p> <p>2) Либо <u>в ответе на второе задание</u> неверно представлены все или некоторые количественные значения ежедневной суммарной выручки каждой из трех фирм из-за арифметических ошибок, но которые сопровождаются верными пояснениями хода решения этого задания,          Или верно представлены количественные значения ежедневной суммарной выручки каждой из трех фирм, но пояснения хода решения этого задания содержат ошибки.          Первое задание выполнено полностью правильно с представленными исчерпывающими пояснениями.</p>	
	<p><u>Одно из двух заданий не решено</u> (нет решения) либо решено полностью неверно. При этом под нерешенным заданием, в том числе, понимается:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- для первого задания представление графика правильной конфигурации без количественных показателей на осях и без пояснений его построения;</li> <li>- для второго задания представление верных количественных значения ежедневной суммарной выручки каждой из трех фирм без всяких пояснений.</li> </ul> <p><u>Другое задание</u> полностью решено правильно с представлением исчерпывающих верных пояснений хода его решения либо при его решении допущены незначительные погрешности, связанные с ошибками арифметического характера, не приводящими к неоднозначному толкованию представленного хода решения задания.</p>	15
	<p>Оба задания решены частично правильно (см. критерий оценки для 20 баллов), либо имеют неверные ответы, но в каждом из них имеется четко просматривающийся уловленный участником олимпиады верный ход решения, который явно представлен в работе и выполнен не менее чем на половину от полностью верного представления хода решения задания.</p>	10
	<p><u>Одно из двух заданий не решено</u> (нет решения) либо решено полностью неверно. При этом под нерешенным заданием, в том числе, понимается:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- для первого задания представление графика правильной конфигурации без количественных показателей на осях и без пояснений его построения;</li> <li>- для второго задания представление верных количественных значения ежедневной суммарной выручки каждой из трех фирм без всяких пояснений.</li> </ul> <p><u>Другое задание</u> решено частично правильно (см. критерий оценки для 20 баллов) либо имеет неверный ответ, но в нем имеется четко просматривающийся уловленный участником олимпиады верный ход решения, который явно представлен в</p>	5



	работе и выполнен не менее чем на половину от полностью верного представления хода решения задания.	
	Нет решения задачи либо представлены решения обоих заданий, но: 1) В первом задании график представлен неверно и даны неверные пояснения к нему либо просто представлен график правильной конфигурации без количественных показателей на осях и без пояснений его построения. 2) Во втором задании неверно представлены количественные значения ежедневной суммарной выручки каждой из трех фирм, которые сопровождаются неверными пояснениями хода решения этого задания либо представлены верные количественные значения ежедневной суммарной выручки каждой из трех фирм без всяких пояснений.	0