Южно-Уральская олимпиада школьников по математике
11 класс
19 февраля 2012 г.

1. За 18 дней брусок мыла уменьшился на 50% по высоте, на 30% по длине и на 20% по ширине. На сколько ещё дней его хватит, если каждый день расходуется один и тот же объём мыла?

Ответ: на 7 дней.

Решение. За 18 дней от бруска мыла останется $0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 100\% = 28\%$. Значит, всего израсходуется 72%, а за один день тратится 4% от исходного бруска. Отсюда и получается ответ.

Оценивание. Верное решение — 10 б.

2. Два велосипедиста в полдень выехали навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились через час. Прибыв в B и A соответственно, они сразу же повернули назад, после чего встретились вновь. Когда это произошло? (Каждый из велосипедистов двигался со своей постоянной скоростью).

Ответ: в 15.00.

Решение. Пусть расстояние между пунктами равно s, тогда к моменту первой встречи велосипедисты совместно проехали расстояние s, а к моменту второй встречи — расстояние $3s$. Поэтому промежуток времени от полдня до второй встречи втрое длиннее промежутка времени от полдня до первой встречи.

Оценивание. Верное решение — 11 б.

3. Отличница Аня вычислила произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 30 \cdot 31$ и записала результат на доске. Хулиган Вася стёр две цифры. Получилась запись (в ней стёртые цифры заменены звёздочками): $822283865417{*}92281772556288{*}000000$. Восстановите эти цифры.

Ответ: 7 и 0.

Решение. Поскольку в числе 31! есть множители 5, 10, 15, 20, 25 и 30, это число делится на 5^7. Легко видеть, что оно делится и на 2^7. Значит, наше число делится на 10^7 и оканчивается на 7 нулей. Итак, вторая из стёртых цифр — ноль. Оставшуюся стёртую цифру можно найти, используя признак делимости на 9 (или на 11).

Оценивание. Верное решение — 12 б.

Если найден только ноль — 6 б.

Если найден ноль и использован признак делимости на 9 (или 11), но в результате арифметических ошибок получена неверная вторая цифра, то 9 б.

Если сформулирован признак делимости на 9, и найдена сумма стёртых цифр, то 3 б.

Если кто-то из участников непосредственно вычислит 31!, приведя вычисления в работе, и нигде не ошибётся, то за такой подвиг он также заслуживает 12 б.

4. Имеется 10 гирь. Известно, что суммарный вес любых четырёх гирь больше суммарного веса любых трёх из оставшихся гирь. Верно ли, что суммарный вес любых трёх гирь больше суммарного веса любых двух из оставшихся гирь?

Ответ: верно.

Решение. Пусть веса гирь $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{10}$. По условию,

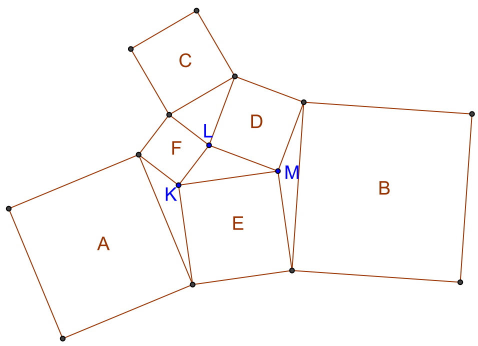
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > x_8 + x_9 + x_{10}. \tag{1}$$

Докажем, что $x_1 + x_2 + x_3 > x_9 + x_{10}$. Действительно, если это не так, т. е. $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant x_9 + x_{10}$, то сложив это неравенство с неравенством $x_4 \leqslant x_8$, получим противоречие с неравенством (1).

Итак, суммарный вес трёх самых лёгких гирь больше суммарного веса двух самых тяжёлых гирь. Значит, суммарный вес любых трёх гирь больше суммарного веса любых двух из оставшихся гирь.

Оценивание. Верное решение — 13 б.

5. По произвольному треугольнику KLM построили шесть квадратов (A, B, C, D, E, F) так, как показано на рис.



Докажите, что сумма площадей квадратов A, B и C в три раза больше суммы площадей квадратов D, E и F.

Решение. Пусть стороны квадратов A, B, C, D, E, F равны соответственно a, b, c, d, e, f; $\angle LKM = \alpha$, $\angle KML = \beta$, $\angle MLK = \gamma$.

Применим теорему косинусов ко всем треугольникам на рис., причём к треугольнику KLM трижды (при этом учитываем, что $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$):

$$a^2 = f^2 + e^2 + 2fe\cos\alpha, \quad b^2 = e^2 + d^2 + 2ed\cos\beta, \quad c^2 = d^2 + f^2 + 2df\cos\gamma,$$

$$d^2 = f^2 + e^2 - 2fe\cos\alpha, \quad f^2 = e^2 + d^2 - 2ed\cos\beta, \quad e^2 = d^2 + f^2 - 2df\cos\gamma.$$

После сложения шести равенств и очевидных преобразований получим

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3(d^2 + e^2 + f^2),$$

что и требовалось доказать.

Оценивание. Верное решение — 14 б.

6. Решите неравенство $(x-4)^8+(x-2)^8 \leqslant 256$.

Ответ: $[2;4]$.

Первое решение. Рассмотрим функцию $f=(x-4)^8+(x-2)^8$. С помощью производной найдём промежутки возрастания и убывания этой функции.

$$f'(x)=8(x-4)^7+8(x-2)^7=0 \iff (x-4)^7=-(x-2)^7 \iff x-4=2-x \iff x=3.$$

$$f'(x)>0 \iff x>3; \quad f'(x)<0 \iff x<3.$$

Значит, функция $f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty;3]$ и возрастает на промежутке $[3;+\infty)$. Заметив, что $f(2)=f(4)=256$, получаем отсюда, что на отрезке $[2;4]$ неравенство $f(x)\leqslant 256$ выполняется, а вне этого отрезка $f(x)>256$.

Можно было также использовать выпуклость функции $f(x)$.

Второе решение. Перепишем неравенство в виде

$$\left(\frac{x-4}{2}\right)^8+\left(\frac{x-2}{2}\right)^8 \leqslant 1. \tag{1}$$

Из (1) следует, что

$$\left|\frac{x-4}{2}\right| \leqslant 1; \quad \left|\frac{x-2}{2}\right| \leqslant 1. \tag{2}$$

Решив совместно эти неравенства, получим

$$2 \leqslant x \leqslant 4. \tag{3}$$

Итак, условие (3) необходимо для выполнения неравенства (1). Покажем, что оно и достаточно. Действительно, в силу (2) и (3) имеем цепочку неравенств

$$\left(\frac{x-4}{2}\right)^8+\left(\frac{x-2}{2}\right)^8 \leqslant \left|\frac{x-4}{2}\right|+\left|\frac{x-2}{2}\right| = \frac{4-x}{2}+\frac{x-2}{2}=1.$$

Оценивание. Верное решение — 13 б. Если лишь показано, что неравенство не выполняется вне отрезка $[2;4]$, то 3 б.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x+2^y=5-2x; \\ 2^{x+y}=x^2-5x+4. \end{cases}$

Ответ: $x=0$, $y=2$.

Решение. Из условия задачи следует, что $5-2x>0$ и $x^2-5x+4>0$. Отсюда $x<1$. Обозначим $a=2^x$, $b=2^y$. Тогда

$$a+b=5-2x; \quad ab=x^2-5x+4;$$

$$a(5-2x-a)=x^2-5x+4; \quad a^2+2ax-5a+x^2-5x+4=0;$$

$$\left(a+x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}. \tag{$*$}$$

Поскольку $x < 1$, имеем $a < 2$ и $a + x - \frac{5}{2} < \frac{1}{2}$. Поэтому из $(*)$ получаем $2^x + x - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$, или

$$2^x + x = 1.$$

Ясно, что 0 — корень полученного уравнения, а других корней нет из-за того, что функция, записанная в левой части уравнения, является возрастающей.

Далее находим $a = 1$, $b = 4$, $y = 2$.

Оценивание. Верное решение — 13 б.

Если участник олимпиады свёл задачу к трансцендентному уравнению от одной переменной, в котором угадал корень, но при этом не обосновал отсутствие других корней (ссылкой на монотонность или графики), то 9 б.

Просто угадан ответ — 2 б.

8. Четыре сферы радиусом a вписаны во все трёхгранные углы тетраэдра и касаются внешним образом одной и той же сферы радиусом b. Найдите радиус сферы, описанной вокруг тетраэдра, если радиус вписанной в него сферы равен r.

Ответ: $\dfrac{(a+b)r}{r-a}$.

Решение. Рассмотрим тетраэдр T с вершинами в центрах четырёх сфер.

Он подобен исходному тетраэдру (так как их грани соответственно параллельны), а центры вписанных в них сфер совпадают (поскольку расстояния между параллельными гранями этих тетраэдров равны одной и той же величине a, и точка, равноудалённая от граней исходного тетраэдра, будет находиться на одинаковых расстояниях и от граней тетраэдра T). Радиус вписанной в T сферы равен $r - a$, а описанной — $a + b$ (центр сферы радиусом b находится на расстоянии $a + b$ от каждой вершины тетраэдра T). Из подобия имеем: $\dfrac{R}{a+b} = \dfrac{r}{r-a}$, где R — искомый радиус описанной сферы.

Оценивание. Верное решение — 14 б.