

# ЮЖНО-УРАЛЬСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

МАТЕМАТИКА  
2011 год

---

1. Лариса, Вера и Саша собирали грибы. Вера собрала грибов на 40% больше, чем Саша, но на 30% меньше, чем Лариса. На сколько процентов Саша собрал грибов меньше, чем Лариса?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{4^x - 3^x}{x^2 + x + 1}} + \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{4^x - 3^x}} = \sqrt{4x - x^2}.$$

3. Найдите объём четырёхугольной пирамиды  $MABCD$  с вершиной в точке  $M$ , если известны координаты точек  $A, B, C, D$  и  $M$ :

$$A(-4; 0; 1), B(-2; 2; 1), C(4; 0; 1), D(1; -3; 1), M(4; 4; 4).$$

4. Пусть  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Докажите, что

$$(\cos x + \sin x)^2 (\cos^4 x + \sin^4 x) \geq 1.$$

5. На координатной плоскости  $Oxy$  постройте фигуру, ограниченную линиями  $x = -2, x = 2, y = 0$  и

$$y = \frac{1}{2} \left( \sqrt{5 - x^2 + 2\sqrt{4 - x^2}} + \sqrt{5 - x^2 - 2\sqrt{4 - x^2}} \right),$$

и найдите её площадь.

6. В треугольнике  $ABC$  продолжение медианы  $BD$  пересекает описанную вокруг треугольника окружность в точке  $E$ . Найдите  $BD$ , если  $AB = 7$ ,  $BC = 9$ ,  $BE = 13$ .

7. Найдите все простые числа  $p$ , для которых существуют такие целые положительные числа  $m$  и  $n$ , что  $p^m - 1 = n^3$ .

8. Два парохода идут по морю с постоянными скоростями по фиксированным прямолинейным направлениям. В 9 часов расстояние между ними было 20 км, в 9 ч 35 мин — 15 км, в 9 ч 55 мин — 13 км. Каким будет минимальное расстояние между пароходами?

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!