Задания заключительного этапа Олимпиады школьников СПбГУ по физике 2021-2022 гг.

Участникам заключительного этапа предлагался к решению вариант, состоящий из 5 задач. Вариант для каждого участника выбирался случайным образом из заранее заготовленных.

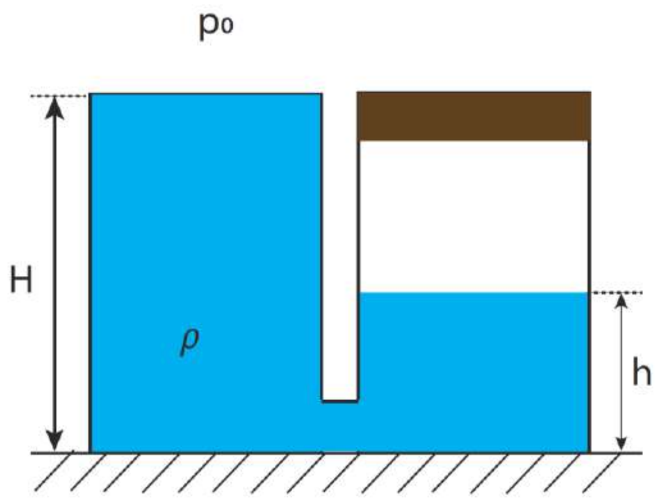
9 класс

Вариант 1

Задача 1

В камере, заполненной воздухом при давлении $p_0 = 20$ кПа, находятся два одинаковых сосуда высотой $H = 30$ см и площадью основания $S = 100$ см^2. Сосуды соединены тонкой трубкой, расположенной у дна; один из них плотно закрыт неподвижной тонкой пробкой. Определите, какой объем воды с плотностью $\rho = 1000$ кг/м^3 нужно влить в открытый сосуд, чтобы она начала переливаться через край? Так как температура в камере не изменяется, то состояние воздуха в замкнутом объеме описывается соотношением $pV = const$. Объем налитой воды считать пренебрежимо малым по сравнению с объемом камеры.

Решение:



Изначально сосуды пустые. Как только начинают наливать жидкость, воздух в закрытом сосуде становится изолированным от воздуха в камере. По мере наливания жидкости объем, занятый воздухом уменьшается, а его давление увеличивается.

Нас интересует ситуация, при которой высота столба жидкости в открытом сосуде равна высоте сосуда. Запишем для нее балланс давлений:

$$p_0 + \rho g H = p + \rho g h$$

Где h – высота столба жидкости в сосуде, закрытом пробкой, p – давление воздуха в объеме под пробкой. В то же время, для давления p справедливо равенство (подсказка из условия):

$$p_0HS = p(H-h)S => p = \frac{p_0H}{H-h}$$

Подставим выражение для давления p в первое уравнение:

$$p_0 + \rho gH = \frac{p_0H}{H-h} + \rho gh$$

Введем обозначение $x = H - h$ и перепишем уравнение в виде:

$$p_0 + \rho gx = \frac{p_0H}{x} => \rho gx^2 + p_0x - p_0H = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-p_0 \pm \sqrt{p_0^2 + 4p_0\rho gH}}{2\rho g}$$

Очевидно, что из двух корней один получается положительным, другой – отрицательным. Выбираем положительный, т. к. согласно определению для выбранной переменной, она не может быть отрицательной (уровень воды в сосуде не может быть выше высоты сосуда).

Тогда высота столба жидкости в закрытом сосуде:

$$h = H + \frac{p_0 - \sqrt{p_0^2 + 4p_0\rho gH}}{2\rho g}$$

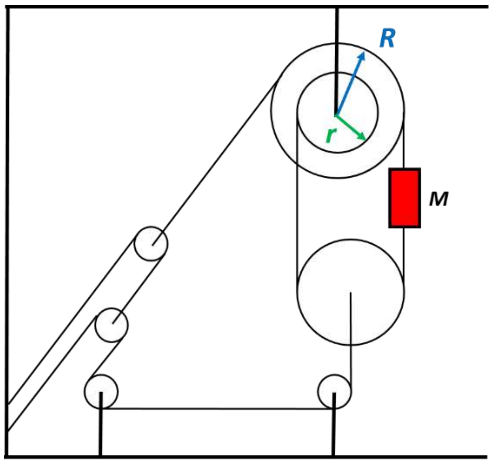
И искомый объем:

$$V = S(H+h) = S\left(2H - \frac{\sqrt{p_0^2 + 4p_0\rho gH} - p_0}{2\rho g}\right) = S\left(2H - \frac{p_0}{2\rho g}\sqrt{1 + \frac{4\rho gH}{p_0}}\right)$$

Подставляя числа, получаем ответ $V = 3350$ см^3.

Задача 2

На рисунке изображена система идеальных блоков, соединенных друг с другом невесомыми нерастяжимыми нитями, в которой подвешен груз массой M так, как показано на рисунке. Верхние соосные блоки радиусами $R = 15$ см и $r = 12$ см жестко скреплены друг с другом и могут вращаться вокруг своей оси. Конец нити, намотанной на блок радиуса r, закреплен на этом блоке. Все нити в системе одинаковые, не провисают, не проскальзывают и могут выдерживать максимальную силу натяжения $T_{max} = 110$ Н. Определите максимальную массу груза M, которого можно подвесить таким образом, чтобы при этом ни одна из нитей не оборвалась. Трение в осях блоков отсутствует. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ Н/кг.



Решение

Обозначим за F_1 силу натяжения нити, стремящуюся повернуть блок Rпротив часовой стрелки, за F_2 – силу, тянущую за нижний блок. Поскольку система находится в равновесии, и верхние блоки не вращаются, уравнение моментов сил запишется следующим образом:

$$F_1R + \frac{F_2}{2}r = \left(\frac{F_2}{2} + mg\right)R => F_1R = \frac{F_2}{2}(R - r) + mgR => F_1 = \frac{F_2}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) + mg$$

С другой стороны, для сил натяжения можно записать:

$$F_1 = 4F_2$$

И тогда:

$$4F_2 = \frac{F_2}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) + mg => F_2\left(4 - \frac{1}{2} + \frac{r}{2R}\right) = mg => F_2\left(\frac{7R + r}{2R}\right) = mg =>$$

$$F_2 = \frac{2R}{7R + r}mg$$

Поскольку нити одинаковые во всей конструкции, максимальное натяжение испытывает нить между блоком радиуса R и грузом m:

$$F' = F_1 + \frac{1}{2}F_2\frac{r}{R} = \frac{F_2}{2}\left(8 + \frac{r}{R}\right) = \frac{R}{7R + r}\left(8 + \frac{r}{R}\right)mg = \frac{8R + r}{7R + r}mg$$

Поэтому в полученном выражении надо вместо F' подставлять данную по условию максимальную силу натяжения. И тогда ответ:

$$\frac{T_{max}}{g}\left(\frac{7R + r}{8R + r}\right) = m$$

Задача 3

Из города А в город В можно добраться по соединяющему их речному каналу за время $t_{\text{пл}}$, если плыть на плоту. Из города А отчаливает катер и направляется в город В. Для наиболее быстрого прохождения маршрута капитан сразу же включает мотом, позволяющей катерку двигаться с постоянным ускорением. Кроме того, капитан знает, что для того, чтобы остановиться с нулевой скоростью у причала рядом с городом В, ему надо единожды поменять направление тяги мотора на противоположное (модуль ускорения катера при этом не меняется) и сделать это около определенного дерева, растущего на берегу канала. Определите время движения катера до этого дерева из города А, если известно, что в стоячей воде мотор разгоняет катер до скорости течения воды в канале за время t_c. Считайте, что при отплытии катер мгновенно приобретает скорость воды в канале.

Решение:

Обозначим расстояние между городами L, скорость течения реки – u. По условию нам дано:

$$\boldsymbol{t}_{\text{пл}} = \frac{L}{u}, \boldsymbol{t}_{\text{с}} = \frac{u}{a}$$

Откуда следует, что:

$$L = a\boldsymbol{t}_{\text{с}}\boldsymbol{t}_{\text{пл}}$$

Обозначим S_1 расстояние от города А до дерева, S_2 – расстояние от дерева до города В, t_1, t_2 – соответствующие времена в пути. Тогда:

$$L = S_1 + S_2$$

$$v(t_1) = u + at_1, S_1(t_1) = ut_1 + \frac{at_1^2}{2}$$

По условию дано, что в город В катер приходит с нулевой скоростью:

$$v(t_2) = u + at_1 - at_2 = 0$$

Откуда:

$$u + at_1 - at_2 = 0 => t_2 - t_1 = \frac{u}{a}$$

Далее, для S_2 и полного расстояния имеем:

$$S_2(t_2) = (u + at_1)t_2 - \frac{at_2^2}{2}$$

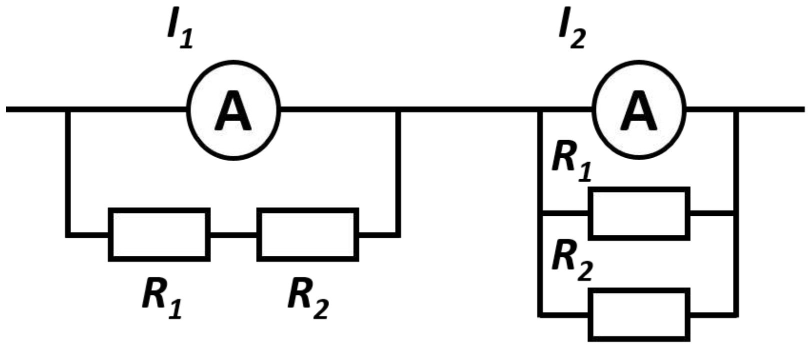
$$\begin{cases} L = ut_1 + \frac{at_1^2}{2} + (u + at_1)t_2 - \frac{at_2^2}{2} \\ t_2 - t_1 = \frac{u}{a} \end{cases}$$

Получаем квадратное уравнение, находим t_1 и t_2:

$$\mathrm{t}_2 = \sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{u}^2}{2\mathrm{a}^2}} = \sqrt{\mathbf{t}_{\text{с}}\mathbf{t}_{\text{пл}} + \frac{\mathbf{t}_{\text{с}}^2}{2}}, \mathrm{t}_1 = \sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{u}^2}{2\mathrm{a}^2}} - \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}} = \sqrt{\mathbf{t}_{\text{с}}\mathbf{t}_{\text{пл}} + \frac{\mathbf{t}_{\text{с}}^2}{2}} - \mathbf{t}_{\text{с}}$$

Задача 4

В участок цепи последовательно подключены два одинаковых неидеальных амперметра с пределом измерения 2А. К каждому из них параллельно подключены по два резистора с сопротивлениями R_1=0.1 Ом и R_2=0.4 Ом. В одном случае резисторы подключены последовательно друг другу, в другом – параллельно друг другу (см. рисунок). Первый амперметр показывает I_1=1.25 А, а второй I_2=0.1 А. Каковы сопротивления амперметров? Какая максимальная сила тока в цепи может быть измерена с помощью такого подключения этих амперметров?



Решение:

Обозначим величины, связанные с левой группой элементов, цифрой 1, с правой – цифрой 2, сопротивление амперметров – R_A, силы тока через группы резисторов I_{1R}и I_{2R}.

Амперметры подсоединены параллельно группам резисторов, поэтому напряжения будут одинаковы внутри каждой группы:

$$I_1R_A = I_{1R}(R_1 + R_2), \qquad I_2R_A = I_{2R}\left(\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\right)$$

При этом, в каждой группе сумма тока, протекающего через амперметр и тока, протекающего через резисторы, равна току во всей цепи I:

$$I = I_1 + I_{1R} = I_1\frac{R_1 + R_2 + R_A}{R_1 + R_2}, I = I_2 + I_{2R} = I_2\left(1 + \frac{R_A}{R_1} + \frac{R_A}{R_2}\right)$$

Откуда находим сопротивление амперметров:

$$I_1\frac{R_1 + R_2 + R_A}{R_1 + R_2} = I_2\left(1 + \frac{R_A}{R_1} + \frac{R_A}{R_2}\right) => R_A = \frac{I_2 - I_1}{\frac{I_1}{R_1 + R_2} - I_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} = 0.72 \text{ Ом}$$

Тогда, полагая, что через амперметр идёт максимально возможная для измерения сила тока, получаем, что ток в цепи и есть та наибольшая сила тока, которую можно измерить в данных условиях:

$$I_{1\max} = I_{max}\frac{R_1 + R_2 + R_A}{R_1 + R_2} = 2.44 \text{ А}, \quad I_{2\max} = I_{max}\left(1 + \frac{R_A}{R_1} + \frac{R_A}{R_2}\right) = 20 \text{ А}$$

Соответственно, при токе в 20 А второй амперметр покажет значение в 2 А, в то время как первый будет зашкаливать.

Задача 5

Клава придумала следующую систему автоматического полива. На ее участке у самого края грядки на постаменте стоит бочка для воды. Клава решила просверлить в стенке бочки маленькое отверстие и снабдить его пробкой. По задумке, она будет наполнять бочку водой доверху, а затем открывать отверстие, и струйка воды из него будет литься на грядку. Какова наибольшая длина грядки, которую можно целиком полить таким способом? На каком расстоянии от дна бочки для этого нужно проделать отверстие? Высота постамента a, высота бочки b>a. Считайте воду идеальной несжимаемой жидкостью, ее течение ламинарным, а диаметр отверстия много меньше диаметра бочки. Струя воды из бочки вылетает горизонтально. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Примечание. Ламинарным называется течение жидкости, при котором ее слои не перемешиваются. Траектории движения малых элементов жидкости не пересекаются и называются линиями тока. Идеальной называется жидкость с нулевой вязкостью, т.е. при течении между ее слоями не возникает трения. Для установившегося ламинарного течения идеальной несжимаемой жидкости справедлив закон Бернулли: вдоль линии тока сумма давления и объемных плотностей кинетической и потенциальной энергии жидкости остается постоянной: $p+\frac{\rho v^2}{2}+\rho g h=const$.

Решение.

Рассмотрим линию тока от поверхности воды до отверстия и запишем закон Бернулли. Пусть в некоторый момент высота столба воды над отверстием равна h_1. И у поверхности жидкости, и снаружи у отверстия давление равно атмосферному. Поскольку площадь отверстия много меньше площади поверхности жидкости, то ясно, что скорость у поверхности жидкости пренебрежимо мала по сравнению со скоростью вытекания струи v. Тогда $\rho v^2/2 \ =\rho g h_1$, откуда скорость вытекания равна $v=\sqrt{2gh_1}$.

Обозначим расстояние от основания бочки до отверстия H. Рассчитаем, на каком расстоянии от бочки L малый объем воды, вылетевший из отверстия горизонтально с начальной скоростью v, упадет на землю. Отверстие находится на высоте $H+a$ над землей, поэтому время полета будет равно $t=\sqrt{2(H+a)/g}$. Тогда длина полета $L=vt=2\sqrt{(H+a)h_1}$.

Учитывая, что когда бочка заполнена доверху, $h_1=b-H$, получим максимальное расстояние, до которого добьет струя из отверстия:

$$L_{max}=2\sqrt{(H+a)(b-h)}=2\sqrt{ab\ +\ H(b-a)-H^2}$$

Максимум квадратного трехчлена под корнем достигается при $H=(b-a)/2$. На таком расстоянии от дна бочки нужно сделать отверстие, чтобы длина дорожки полива была максимально возможной. Найдем ее значение, подставив H в выражение для L_{max}:

$L_{max}=2\sqrt{ab\ +(b-a)^2/4}=b+a$.

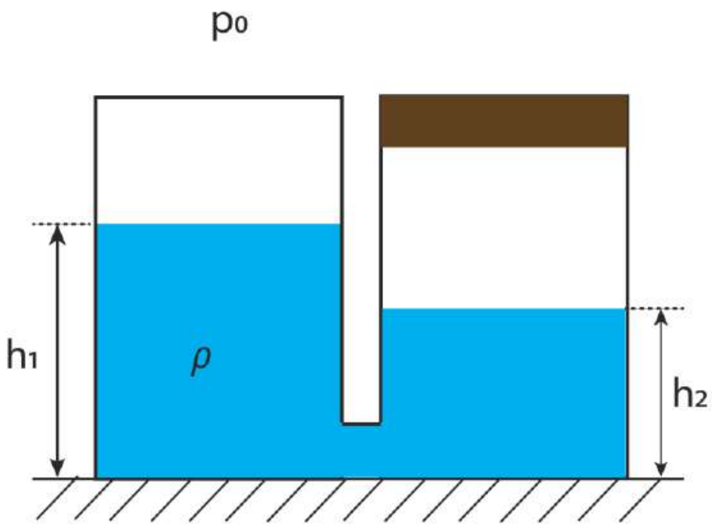
Ответ: $H=(b-a)/2$, $L_{max}=b+a$.

Вариант 2

Задача 1

В камере, заполненной воздухом при давлении $p_0=25$ кПа, находятся два одинаковых сосуда высотой $H=50$ см и площадью основания $S=200$ см^2. Сосуды соединены тонкой трубкой, расположенной у дна; один из них закрыт тонкой пробкой. Определите, какой объем жидкости с плотностью $\rho=820$ кг/м^3 нужно влить в открытый сосуд (жидкость не переливается через край), чтобы пробка вылетела? Максимальная величина силы трения покоя, действующей на пробку, равна $F = 30$ Н. Так как температура в камере не изменяется, то состояние воздуха в замкнутом объеме описывается соотношением $pV = const$. Объем налитой жидкости считать пренебрежимо малым по сравнению с объемом камеры. Массой пробки можно пренебречь.

Решение:



Изначально сосуды пустые. Как только начинают наливать жидкость, воздух в закрытом сосуде становится изолированным от воздуха в камере. По мере наливания жидкости объем, занятый воздухом уменьшается, а его давление увеличивается.

Нас интересует ситуация, при которой давление воздуха p становится достаточно большим для того, чтобы выдавить пробку: $pS = F + p_0S$ - условие равновесия пробки перед тем, как воздух ее выдавит.

Запишем для этой ситуации баланс давлений:

$$p_0 + \rho g h_1 = p + \rho g h_2 => p_0 + \rho g h_1 = \frac{F}{S} + p_0 + \rho g h_2$$

$$=> \rho g h_1 = \frac{F}{S} + \rho g h_2$$

Где h_1 – высота столба жидкости в открытом сосуде, h_2 – высота столба жидкости в сосуде, закрытом пробкой. В то же время, для воздуха в сосуде справедливо равенство (подсказка из условия):

$$p_0HS = p(H - h_2)S => p_0H = \left(\frac{F}{S} + p_0\right)(H - h_2) => 0 = \frac{F}{S}H - \frac{F}{S}h_2 - p_0h_2 =>$$

$$h_2 = \frac{FH}{S\left(\frac{F}{S} + p_0\right)} = \frac{FH}{(F + p_0S)}$$

Подставим h_2 в первое уравнение:

$$\rho g h_1 = \frac{F}{S} + \rho g \frac{FH}{(F + p_0 S)}$$

И найдем h_1:

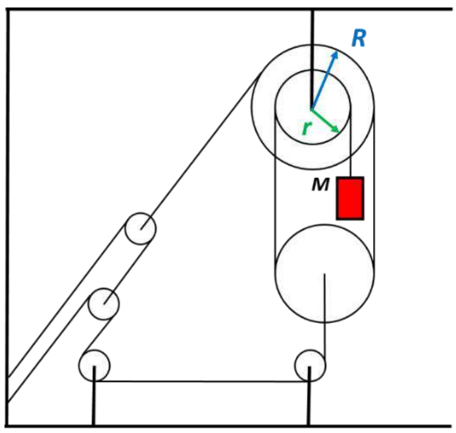
$$h_1 = \frac{F}{S\rho g} + \frac{FH}{(F + p_0 S)} = \frac{F}{S}\left(\frac{1}{\rho g} + \frac{HS}{(F + p_0 S)}\right)$$

Тогда искомый объем:

$$V = S(h_1 + h_2) = S\left(\frac{F}{S\rho g} + \frac{2FH}{(F + p_0 S)}\right) = F\left(\frac{1}{\rho g} + \frac{2SH}{(F + p_0 S)}\right)$$

Задача 2

На рисунке изображена система невесомых блоков, соединенных друг с другом невесомыми нерастяжимыми нитями, в которой подвешен груз массой M так, как показано на рисунке. Верхние соосные блоки радиусами R и r жестко скреплены друг с другом и могут вращаться вокруг своей оси. Все нити в системе одинаковые, не провисают, не проскальзывают и могут выдерживать максимальную силу натяжения $T_{max} = 105.35$ Н. Определите максимальную массу груза M, которого можно подвесить таким образом, чтобы при этом ни одна из нитей не оборвалась. Трение в осях блоков отсутствует. Ускорение свободного падения примите равным $g = 9.8$ Н/кг.



Решение

Обозначим за F_1 силу натяжения нити, стремящуюся повернуть блок R против часовой стрелки, за F_2 – силу, тянущую за нижний блок. Поскольку система находится в равновесии, и верхние блоки не вращаются, уравнение моментов сил запишется следующим образом:

$$F_1 R + \frac{F_2}{2} r = \frac{F_2}{2} R + Mgr \Rightarrow F_1 R = \frac{F_2}{2}(R - r) + Mgr \Rightarrow F_1 = \frac{F_2}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) + Mg\frac{r}{R}$$

С другой стороны, для сил натяжения можно записать:

$$F_1 = 4F_2$$

И тогда:

$$4F_2 = \frac{F_2}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) + Mg\frac{r}{R} => F_2\left(4 - \frac{1}{2} + \frac{r}{2R}\right) = Mg\frac{r}{R} => F_2\left(\frac{7R + r}{2R}\right) = Mg\frac{r}{R} =>$$

$$F_2 = \frac{2r}{7R + r}Mg$$

$$F_1 = 4F_2 = \frac{8r}{7R + r}Mg$$

Поскольку по условию $r < R$, найденные силы F_1 и F_2 будут меньше силы тяжести груза. Поэтому максимальное натяжение, которое испытывает какая-либо из нитей в системе, это Mg. Отсюда ответ:

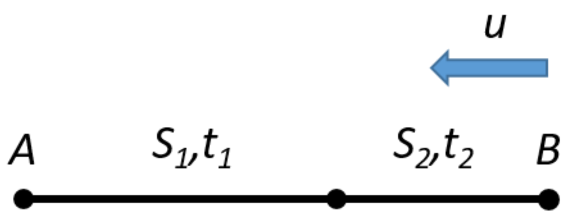
$$M = \frac{T_{max}}{g}$$

Задача 3

Конвейерная лента движется с постоянной скоростью u. На ленту в точке А ставят радиоуправляемую машинку (машинка при это неподвижна относительно ленты) и сразу запускают против направления движения ленты в точку В. Машинка сначала движется с постоянным ускорением a, а затем в какой-то момент начинает тормозить с тем же ускорением, и в точку В приезжает с нулевой скоростью относительно неподвижного наблюдателя. Определите расстояние между точками А и В, если за все время движение машинки конвейерная лента прошла расстояние S.

Решение:

Введем обозначения, как показано на рисунке:



$\mathrm{L = S_1 + S_2}$ $\quad\quad$ $\mathrm{v(t_1) = -u + at_1}$ $\quad\quad$ $\mathrm{S_1(t_1) = -ut_1 + \frac{at_1^2}{2}}$

$$\mathrm{v(t_2) = -u + at_1 - at_2 = 0 \text{ (условие равенства нулю скорости в точке В)}}$$

$$\mathrm{-u + at_1 - at_2 = 0 => t_1 - t_2 = \frac{u}{a}}$$

$$\mathrm{S_2(t_2) = (-u + at_1)t_2 - \frac{at_2^2}{2}}$$

$$\begin{cases} \mathrm{L = -ut_1 + \frac{at_1^2}{2} + (-u + at_1)t_2 - \frac{at_2^2}{2}} \\ \mathrm{t_1 - t_2 = \frac{u}{a}} \end{cases}$$

Получаем квадратное уравнение на $\mathrm{t_2}$:

$$t_2^2 - \left(\frac{u^2}{2a^2} + \frac{L}{a}\right) = 0$$

Находим t_1 и t_2:

$$t_2 = \sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} + \frac{u}{a}$$

Используем условие задачи:

$$\frac{S}{u} = t_1 + t_2 = 2\sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} + \frac{u}{a}$$

Откуда выражаем L через данные задачи:

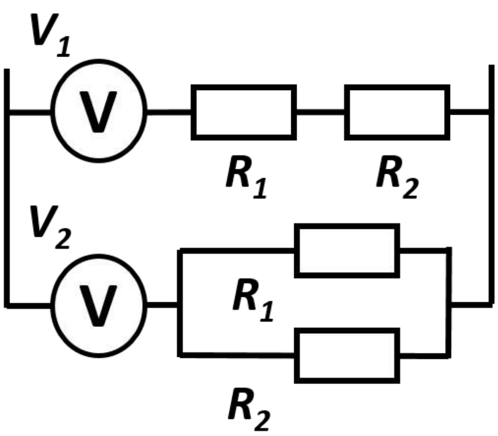
$$\frac{S}{u} - \frac{u}{a} = 2\sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}}$$

$$\left(\frac{S}{2u} - \frac{u}{2a}\right)^2 = \frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}$$

$$L = -\frac{S}{2} + \frac{aS^2}{4u^2} - \frac{u^2}{4a}$$

Задача 4

В цепь параллельно подключены два одинаковых неидеальных вольтметра с пределом измерения 12 В. К каждому из них последовательно подключены по два резистора с сопротивлениями R_1=20 кОм и R_2=80 кОм. В одном случае резисторы подключены последовательно друг другу, в другом – параллельно друг другу (см. рисунок). Первый вольтметр показывает U_1=3 В, а второй U_2=10 В. Каковы сопротивления вольтметров? Какое максимальное напряжение в этой цепи может быть измерено с помощью такого подключения этих вольтметров?



Решение:

Обозначим величины, связанные с верхней группой элементов, цифрой 1, с нижней – цифрой 2, сопротивление вольтметров – R_V, напряжения на группах резисторов U_{1R} и U_{2R}.

Вольтметры подсоединены последовательно группам резисторов, поэтому силы тока через вольтметры будут равны току через соответствующие группы резисторов:

$$\frac{U_1}{R_V} = \frac{U_{1R}}{(R_1 + R_2)}, \qquad \frac{U_2}{R_V} = \frac{U_{1R}(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$$

При этом, в каждой группе сумма напряжения на вольтметре и напряжения на группе резисторов равна напряжению во всей цепи U:

$$U = U_1 + U_{1R} = U_1\left(1 + \frac{R_1 + R_2}{R_V}\right), U = U_2 + U_{2R} = U_2\left(1 + \frac{R_1 R_2}{R_V(R_1 + R_2)}\right)$$

Откуда находим сопротивления вольтметров:

$$U_1\left(1 + \frac{R_1 + R_2}{R_V}\right) = U_2\left(1 + \frac{R_1 R_2}{R_V(R_1 + R_2)}\right) => R_V = \frac{U_1(R_1 + R_2)^2 - U_2 R_1 R_2}{(R_1 + R_2)(U_2 - U_1)} = 20 \text{ кОм}$$

Тогда, полагая, что на вольтметре максимально возможное для измерения напряжение, получаем, что напряжение в цепи и есть то наибольшее напряжение, которое можно измерить в данных условиях:

$$U_{1\max} = U_{max}\left(1 + \frac{R_1 + R_2}{R_V}\right) = 72 \text{ В}, \quad U_{2\max} = U_{max}\left(1 + \frac{R_1 R_2}{R_V(R_1 + R_2)}\right) = 21.6 \text{ В}$$

Соответственно, при напряжении в 72 В первый вольтметр покажет значение в 12 В, в то время как второй будет зашкаливать.

Задача 5

У Васи на даче есть бочка для сбора дождевой воды, стоящая на постаменте высотой a. Вася просверлил в ее стенке друг под другом два небольших отверстия – верхнее на расстоянии h_1, а нижнее на расстоянии h_2 от дна бочки – и заткнул их пробками. Однажды после дождя, когда оба отверстия оказались под водой, Вася мелком отметил уровень воды в бочке, открыл верхнее отверстие и отметил наиболее удаленное от постамента место, куда попала струя воды. После этого Вася закрыл верхнее отверстие, долил в бочку воды до отметки и открыл нижнее отверстие. Струя упала на землю в ту же точку, что и в предыдущий раз. Какой уровень воды в бочке был после дождя? На каком расстоянии от постамента струи воды падали на землю? Считайте воду идеальной несжимаемой жидкостью, ее течение ламинарным, а диаметр отверстия много меньше диаметра бочки. Струя воды из бочки вылетает горизонтально. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Примечание. Ламинарным называется течение жидкости, при котором ее слои не перемешиваются. Траектории движения малых элементов жидкости не пересекаются и называются линиями тока. Идеальной называется жидкость с нулевой вязкостью, т.е. при течении между ее слоями не возникает трения. Для установившегося ламинарного течения идеальной несжимаемой жидкости справедлив закон Бернулли: вдоль линии тока сумма давления и объемных плотностей кинетической и потенциальной энергии жидкости остается постоянной: $p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = const$.

Решение.

Рассмотрим линию тока от поверхности воды до отверстия и запишем закон Бернулли. Пусть в некоторый момент высота столба воды над отверстием равна h. И у поверхности жидкости, и снаружи у отверстия давление равно атмосферному. Поскольку площадь отверстия много меньше площади поверхности жидкости, то ясно, что скорость у поверхности жидкости пренебрежимо мала по сравнению со скоростью вытекания струи v. Тогда $\rho v^2/2\ = \rho g h$, откуда скорость вытекания равна $v = \sqrt{2gh}$.

Обозначим высоту столба воды в бочке после дождя b. Для каждого отверстия рассчитаем расстояние от бочки до места падения малого объема воды, вылетевшего из него горизонтально с начальной скоростью $v_{1,2}$. Отверстия находятся на высоте $h_{1,2} + a$ над землей, поэтому времена полета будут равны $t_{1,2} = \sqrt{2(a + h_{1,2})/g}$. В обоих случаях бочка была заполнена до одного уровня, поэтому $v_{1,2} = \sqrt{2g(b - h_{1,2})}$. Тогда струи из верхнего и нижнего отверстий упали на землю на расстоянии $L_{1,2} = v_{1,2}t_{1,2} = 2\sqrt{(a + h_{1,2})(b - h_{1,2})} = 2\sqrt{ab + h_{1,2}(b - a) - h_{1,2}^2}$ от бочки (индекс 1 соответствует верхнему отверстию, а 2 – нижнему).

По условию эти расстояния равны, $L_1 = L_2$, значит,

$$ab + h_1(b - a) - h_1^2 = ab + h_2(b - a) - h_2^2$$

откуда

$${h_1}^2 - {h_2}^2 = (b - a)(h_1 - h_2)$$

По условию отверстия находятся на разной высоте (h_1 не равно h_2). Поэтому, разделив на $h_1 - h_2$, получим

$$h_1 + h_2 = b - a => b = h_1 + h_2 + a$$

Подставляя найденное значение в выражение для расстояния, получим

$$L = 2\sqrt{(a + h_1)(a + h_2)}$$

Ответ: $b = h_1 + h_2 + a$, $L = 2\sqrt{(a + h_1)(a + h_2)}$.

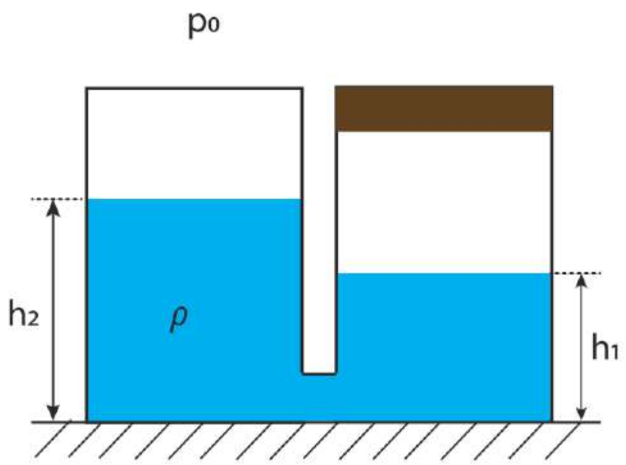
Вариант 3

Задача 1

В камере, заполненной воздухом при давлении $p_0 = 20$ кПа, находятся два одинаковых сосуда высотой $H = 1$ м и площадью основания $S = 680$ см^2. Сосуды соединены тонкой трубкой, расположенной у дна; один из них плотно закрыт неподвижной тонкой пробкой. В открытый сосуд вливают некоторое количество воды с плотностью $\rho = 1000$ кг/м^3, после чего в закрытом сосуде ее уровень устанавливается на высоте $h_1 = 20$ см. Затем систему нагревают и поддерживают при постоянной температуре и том же давлении воздуха в камере p_0, при этом уровень воды в закрытом сосуде изменяется на $\Delta h = 5$ см.

Вода из открытого сосуда не выливается. Найдите отношение конечной и начальной температур в камере T/T_0. Состояние воздуха в замкнутом объеме описывается соотношением $pV/T = const$. Объем налитой воды считать пренебрежимо малым по сравнению с объемом камеры, тепловым расширением жидкости пренебречь.

Решение:



Изначально сосуды пустые. Как только начинают наливать жидкость, воздух в закрытом сосуде становится изолированным от воздуха в камере. По мере наливания жидкости объем, занятый воздухом уменьшается, а его давление увеличивается.

Запишем балланс давлений для ситуации до нагрева, обозначив высоту столба жидкости в открытом сосуде за h_2:

$$p_0 + \rho g h_2 = p + \rho g h_1$$

Где p – давление воздуха в объеме под пробкой. В то же время, для давления p справедливо равенство (подсказка из условия):

$$p_0 HS/T_0 = p(H - h_1)S/T_0 => p = \frac{p_0 H}{(H - h_1)}$$

Подставив p в первое уравнение, найдем высоту столба жидкости в открытом сосуде:

$$p_0 + \rho g h_2 = \frac{p_0 H}{(H - h_1)} + \rho g h_1 => h_2 = \frac{p_0 H}{\rho g (H - h_1)} + h_1 - \frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g}\left(\frac{H}{H - h_1} - 1\right) + h_1 =>$$

$$=> h_2 = \frac{p_0}{\rho g}\frac{h_1}{H - h_1} + h_1 = h_1\left(\frac{p_0}{\rho g (H - h_1)} + 1\right)$$

Теперь рассмотрим систему после нагрева до температуры T. При нагревании воздух в замкнутом объеме расширяется и уровень жидкости понижается на Δh. Запишем балланс давлений для этой ситуации, предполагая, что объем налитой жидкости не изменился:

$$p_0 + \rho g (h_2 + \Delta h) = p' + \rho g (h_1 - \Delta h)$$

Где p' – давление воздуха в объеме под пробкой, установившееся после нагревания сосудов.

Выразим из этого уравнения p':

$$p' = p_0 + \rho g(h_2 + 2\Delta h - h_1) = \frac{p_0 H}{h_1} + 2\rho g\Delta h$$

$$p' = p_0 + \rho g(h_2 - h_1 + 2\Delta h) = p_0 + p_0\frac{h_1}{H - h_1} + 2\Delta h\rho g = p_0\frac{H}{H - h_1} + 2\Delta h\rho g$$

Для воздуха в замкнутом объеме справедливо равенство (подсказка из условий):

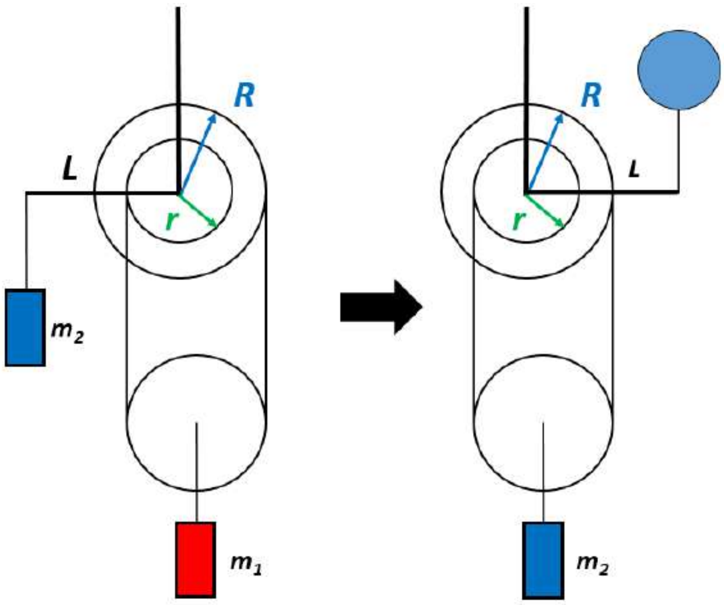
$$\frac{p_0 HS}{T_0} = \frac{p'(H - h_1 + \Delta h)S}{T}$$

Откуда мы можем найти искомое отношение температур:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p'(H - h_1 + \Delta h)}{p_0 H} = \frac{\left(p_0\frac{H}{H - h_1} + 2\rho g\Delta h\right)}{p_0 H}(h_1 - \Delta h) = \left(\frac{1}{H - h_1} + \frac{2\rho g\Delta h}{p_0 H}\right)(h_1 - \Delta h)$$

Задача 2

На рисунке изображена система невесомых блоков, соединенных друг с другом невесомыми нерастяжимыми нитями. К нижнему блоку прикреплен груз 1 массой $m_1 = 560$ г. Верхние соосные блоки радиусами $R = 20$ см и $r = 18$ см жестко скреплены друг с другом и могут вращаться вокруг своей оси. Концы нитей закреплены на этих блоках. К этой же оси прикреплена ручка длиной $L = 80$ см, к концу которой подвешен груз 2 неизвестной массы. Система находится в равновесии. Затем, груз 2 снимают с ручки и подвешивают вместо груза 1, а ручку переводят в диаметрально противоположное положение и прикрепляют к ней шарик, заполненный гелием. Каким должен быть объем шарика, чтобы система осталась в равновесии? Трение в осях блоков отсутствует, массой пустого шарика пренебречь. Плотность воздуха равна $\rho_{возд} = 1.3\ \frac{кг}{м^3}$, плотность гелия $\rho_{He} = 0.18\ \frac{кг}{м^3}$.



Решение

Рассмотрим первую конфигурацию системы. Поскольку система находится в равновесии, и верхние блоки не вращаются, уравнение моментов сил запишется следующим образом:

$$m_2gL + \frac{m_1g}{2}r = \frac{m_1g}{2}R$$

Откуда можно найти неизвестную массу груза 2:

$$m_2 = \frac{m_1}{2}\frac{R-r}{L}$$

Тоже условие равновесие для второй конфигурации запишется как:

$$\frac{m_2g}{2}r + (F_A - \rho_{He}gV)L = \frac{m_2g}{2}R$$

Поскольку сила Архимеда равна $F_A = \rho_{\text{возд}}gV$, то

$$(\rho_{\text{возд}} - \rho_{He})gVL = \frac{m_2g}{2}(R-r)$$

Подставляя ранее найденное выражение для массы груза 2, находим объем шарика:

$$V = \frac{m_1}{\rho_{\text{возд}} - \rho_{He}}\left(\frac{R-r}{2L}\right)^2$$

Задача 3

Конвейерная лента движется с некоторой постоянной скоростью. У ленты в точках А и В стоят флажки. На ленту у каждого из флажков ставят две одинаковые радиоуправляемые машинки (они при этом неподвижны относительно ленты) и сразу же запускают навстречу друг другу. Каждая из машинок сначала движется с постоянным ускорением, а затем в какой-то момент начинает тормозить с тем же ускорением, и приезжает к противоположному флажку с нулевой скоростью относительно неподвижного наблюдателя. Известно, что та из машинок, которая двигалась против хода ленты, изменила своё ускорение через $\boldsymbol{\tau_1}$ после начала движения. Также известно, что моторчик машинки разгоняет ее до скорости, равной скорости конвейерной ленты, за время $\boldsymbol{\tau_2}$. Определите, сколько времени в пути находилась каждая из машинок.

Решение:

При движении против ленты:

$$\mathrm{L} = \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 \qquad \mathrm{v}(\mathrm{T}_1) = -\mathrm{u} + \mathrm{aT}_1 \qquad \mathrm{S}_1(\mathrm{T}_1) = -\mathrm{uT}_1 + \frac{\mathrm{aT}_1^2}{2}$$

$$\mathrm{v}(\mathrm{T}_2) = -\mathrm{u} + \mathrm{aT}_1 - \mathrm{aT}_2 = 0 \text{ (условие равенства нулю скорости в точке B)}$$

$$-\mathrm{u} + \mathrm{aT}_1 - \mathrm{aT}_2 = 0 => \mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2 = \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}$$

$$\mathrm{S}_2(\mathrm{T}_2) = (-\mathrm{u} + \mathrm{aT}_1)\mathrm{T}_2 - \frac{\mathrm{aT}_2^2}{2}$$

$$\begin{cases} \mathrm{L} = -\mathrm{uT}_1 + \frac{\mathrm{aT}_1^2}{2} + (-\mathrm{u} + \mathrm{aT}_1)\mathrm{T}_2 - \frac{\mathrm{aT}_2^2}{2} \\ \mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2 = \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}} \end{cases}$$

Получаем квадратное уравнение на T_2: $\mathrm{T}_2^2 - \left(\frac{\mathrm{u}^2}{2\mathrm{a}^2} + \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{a}}\right) = 0$

Находим T_1 и T_2:

$$T_1 = \sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} + \frac{u}{a} = \boldsymbol{\tau_1},\ T_2 = \sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} = \boldsymbol{\tau_1 - \tau_2}$$

$$T = T_1 + T_2 = 2\sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} + \frac{u}{a} = \boldsymbol{2\tau_1 - \tau_2}$$

При движении по ленте:

$$L = s_1 + s_2 \qquad v(t_1) = u + at_1 \qquad s_1(t_1) = ut_1 + \frac{at_1^2}{2}$$

$$v(t_2) = u + at_1 - at_2 = 0 \text{ (условие равенства нулю скорости в точке B)}$$

$$u + at_1 - at_2 = 0 => t_2 - t_1 = \frac{u}{a}$$

$$s_2(t_2) = (u + at_1)t_2 - \frac{at_2^2}{2}$$

$$\begin{cases} L = ut_1 + \frac{at_1^2}{2} + (u + at_1)t_2 - \frac{at_2^2}{2} \\ t_2 - t_1 = \frac{u}{a} \end{cases}$$

Находим t_1 и t_2:

$$t_2 = \sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} = T_2 = \boldsymbol{\tau_1 - \tau_2} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} - \frac{u}{a} = \boldsymbol{\tau_1 - 2\tau_2}$$

$$t = t_1 + t_2 = 2\sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} - \frac{u}{a} = \boldsymbol{2\tau_1 - 3\tau_2}$$

Ответ: Первая машинка в пути $2\tau_1 - 3\tau_2$, вторая машинка в пути $2\tau_1 - \tau_2$.

Задача 4

В ящике лежит множество одинаковых неидеальных амперметров, к каждому из которых припаяны резисторы. Валера перебрал все устройства в ящике и установил:

- К каждому амперметру подключены по два разных резистора, сопротивления которых R_1=0.2 Ом, R_2=0.1 Ом;
- имеются все возможные способы подсоединения этих резисторов к амперметру;
- среди всех конфигураций амперметров и подключенных к ним резисторов минимальный предел измерения тока оказался равным 4 А.

Определите, в какой из конфигураций амперметра и припаянных резисторов будет максимальный предел измерения тока, и рассчитайте его. Внутреннее сопротивление амперметра известно и равно 0.1 Ом.

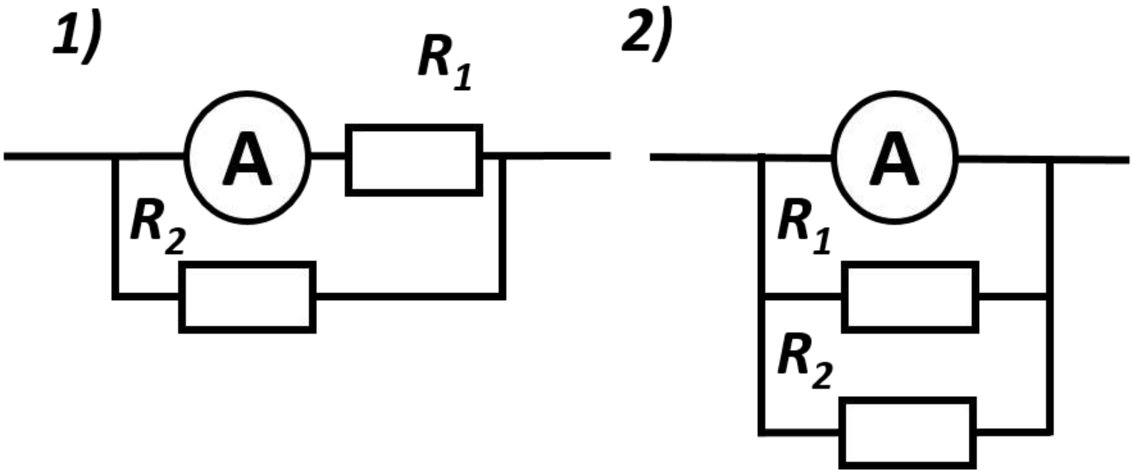
Решение:

Очевидно, что минимальный предел измерения будет достигаться тогда, когда весь ток в цепи будет протекать через амперметр, т. е. тогда, когда параллельно амперметру не подключено никаких сопротивлений (например, все три резистора подключены последовательно амперметру). В этом случае предел измерения конфигурации равен пределу измерения самого амперметра.

При подключении параллельного амперметру сопротивления предел измерения увеличивается, так как часть тока начинает течь через это параллельное сопротивление. Количественно это определяется отношением сопротивления, последовательного амперметру (в том числе внутреннего сопротивления неидеального амперметра), к параллельному сопротивлению. Соответственно, увеличение (уменьшение) предела достигается за счет:

1) Уменьшения (увеличения) параллельного сопротивления;
2) Увеличения (уменьшение) последовательного сопротивления.

С учетом того, что к амперметру подключены 2 резистора, необходимо рассмотреть следующие конфигурации:



Конфигурацию, когда два сопротивления соединены последовательно друг другу и параллельно амперметру не рассматриваем, так как очевидно, что она будет иметь меньший предел по сравнению с конфигурацией 2. Также не рассматриваем конфигурацию, такую же как 1, но в которой резисторы поменяны местами.

Предел измерения тока (обозначим как I_x) для всей конфигурации достигается тогда, когда через амперметр протекает максимально возможный ток (который мы определили ранее). Тогда для конфигурации 1 имеем:

$$I_a(R_a + R_1) = (I_x - I_a)R_2 => I_x = I_a\left(\frac{R_a}{R_2} + \frac{R_1}{R_2} + 1\right) = 4I_a = 16\text{A}$$

Для конфигурации 2:

$$I_aR_2 = (I_x - I_a)\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} => I_x = I_a\left(R_a + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\right)\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2} = I_a\left(\frac{R_a}{R_1} + \frac{R_a}{R_2} + 1\right) = \frac{5}{2}I_a = 10\text{A}$$

Получаем, что максимальный предел достигается в конфигурации 1 и равен 16 А.

Задача 5

У Васи на даче есть бочка для сбора дождевой воды, стоящая на постаменте высотой a. Вася просверлил в ее стенке два небольших отверстия – верхнее на расстоянии h_1, а нижнее на расстоянии h_2 от дна бочки – и заткнул их пробками. Однажды после дождя, когда бочка оказалась целиком заполнена, Вася открыл верхнее отверстие. Дождавшись, когда вода перестанет течь, он измерил длину мокрого следа, оставленного на земле струей. После этого Вася открыл нижнее отверстие и так же измерил длину следа. Она оказалась такой же, что и у первого следа. Какой уровень воды в бочке был после дождя? Какова длина мокрых следов? Считайте воду идеальной несжимаемой жидкостью, ее течение ламинарным, а диаметр отверстия много меньше диаметра бочки. Струя воды из бочки вылетает горизонтально. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Примечание. Ламинарным называется течение жидкости, при котором ее слои не перемешиваются. Траектории движения малых элементов жидкости не пересекаются и называются линиями тока. Идеальной называется жидкость с нулевой вязкостью, т.е. при течении между ее слоями не возникает трения. Для установившегося ламинарного течения идеальной несжимаемой жидкости справедлив закон Бернулли: вдоль линии тока сумма давления и объемных плотностей кинетической и потенциальной энергии жидкости остается постоянной: $p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = const$.

Решение.

Рассмотрим линию тока от поверхности воды до отверстия и запишем закон Бернулли. Пусть в некоторый момент высота столба воды над отверстием равна h. И у поверхности жидкости, и снаружи у отверстия давление равно атмосферному. Поскольку площадь отверстия много меньше площади поверхности жидкости, то ясно, что скорость у поверхности жидкости пренебрежимо мала по сравнению со скоростью вытекания струи v. Тогда $\rho v^2/2 \ = \rho g h$, откуда скорость вытекания равна $v = \sqrt{2gh}$.

Обозначим высоту столба воды в бочке после дождя b. Для каждого отверстия рассчитаем расстояние от бочки до места падения малого объема воды, вылетевшего из него горизонтально с начальной скоростью $v_{1,2}$. Отверстия находятся на высоте $h_{1,2} + a$ над землей, поэтому времена полета будут равны $t_{1,2} = \sqrt{2(a + h_{1,2})/g}$. В обоих случаях бочка была заполнена до одного уровня, поэтому $v_{1,2} = \sqrt{2g(b - h_{1,2})}$. Тогда струи из верхнего и нижнего отверстий упали на землю на расстоянии $L_{1,2} = v_{1,2} t_{1,2} = 2\sqrt{(a + h_{1,2})(b - h_{1,2})} = 2\sqrt{ab + h_{1,2}(b - a) - h_{1,2}^2}$ от бочки (индекс 1 соответствует верхнему отверстию, а 2 – нижнему).

По условию эти расстояния равны, $L_1 = L_2$, значит,

$$ab + h_1(b - a) - h_1^2 = ab + h_2(b - a) - h_2^2$$

откуда

$${h_1}^2 - {h_2}^2 = (b - a)(h_1 - h_2)$$

По условию отверстия находятся на разной высоте (h_1 не равно h_2). Поэтому, разделив на $h_1 - h_2$, получим

$$h_1 + h_2 = b - a => b = h_1 + h_2 + a$$

Подставляя найденное значение в выражение для расстояния, получим

$$L = 2\sqrt{(a + h_1)(a + h_2)}$$

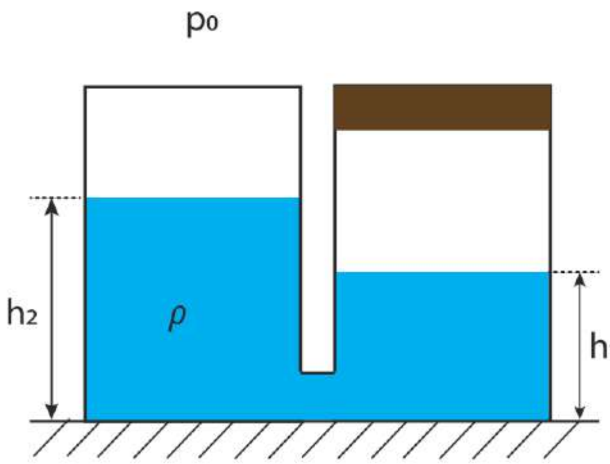
Ответ: $b = h_1 + h_2 + a, L = 2\sqrt{(a + h_1)(a + h_2)}$.

Вариант 4

Задача 1

В камере, заполненной воздухом при давлении $p_0 = 20$ кПа, находятся два одинаковых сосуда высотой $H = 1$ м и площадью основания $S = 100$ см^2. Сосуды соединены тонкой трубкой, расположенной у дна; один из них плотно закрыт тонкой пробкой. В открытый сосуд вливают некоторое количество воды плотностью $\rho = 1000$ кг/м^3, после чего в закрытом сосуде устанавливается уровень жидкости высотой $h_1 = 17$ см. Затем систему нагревают до некоторой температуры, поддерживая давление воздуха в камере на прежнем уровне p_0 (вода из открытого сосуда не выливается), после чего пробка вылетает из сосуда. Максимальная величина силы трения покоя, действующей на пробку, равна $F = 50$ Н. Найдите отношение конечной и начальной температур в камере T/T_0. Состояние воздуха в замкнутом объеме описывается соотношением $pV/T = const$. Объем налитой воды считать пренебрежимо малым по сравнению с объемом камеры, тепловым расширением жидкости пренебречь. Массой пробки можно пренебречь.

Решение:



Изначально сосуды пустые. Как только начинают наливать жидкость, воздух в закрытом сосуде становится изолированным от воздуха в камере. По мере наливания жидкости объем, занятый воздухом уменьшается, а его давление увеличивается.

Запишем балланс давлений для ситуации до нагрева, обозначив высоту столба жидкости в открытом сосуде за h_2:

$$p_0 + \rho g h_2 = p + \rho g h_1$$

Где p – давление воздуха в объеме под пробкой. В то же время, для давления p справедливо равенство (подсказка из условия):

$$p_0HS/T_0 = p(H-h_1)S/T_0 \Rightarrow p = \frac{p_0H}{(H-h_1)}$$

Подставив p в первое уравнение, найдем высоту столба жидкости в открытом сосуде:

$$p_0 + \rho g h_2 = \frac{p_0H}{(H-h_1)} + \rho g h_1 \Rightarrow h_2 = \frac{p_0H}{\rho g(H-h_1)} + h_1 - \frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g}\left(\frac{H}{H-h_1} - 1\right) + h_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{p_0}{\rho g}\frac{h_1}{H-h_1} + h_1 = h_1\left(\frac{p_0}{\rho g(H-h_1)} + 1\right)$$

Теперь рассмотрим систему после нагрева до температуры T перед тем, как пробка вылетает из сосуда. Максимальная сила трения покоя, действующая на пробку, равна $F = p'S - p_0S$, где p' – давление воздуха в замкнутом объеме под пробкой после нагревания.

При нагревании воздух расширяется и уровень жидкости в закрытом сосуде понижается, обозначим это изменение уровня жидкости как Δh. Запишем балланс давлений для этой ситуации, предполагая, что объем налитой жидкости не изменился:

$$p_0 + \rho g(h_2 + \Delta h) = p' + \rho g(h_1 - \Delta h) \Rightarrow p_0 + \rho g(h_2 + \Delta h) = F/S + p_0 + \rho g(h_1 - \Delta h)$$

$$\Rightarrow \rho g(h_2 + \Delta h) = F/S + \rho g(h_1 - \Delta h)$$

Найдем Δh:

$$\Delta h = \frac{F}{2\rho g S} + \frac{(h_1 - h_2)}{2} = \frac{F}{2\rho g S} - \frac{p_0}{2\rho g}\frac{h_1}{H-h_1} = \frac{1}{2\rho g}\left(\frac{F}{S} - \frac{p_0h_1}{H-h_1}\right)$$

Теперь воспользуемся подсказкой про соотношение давления и температуры воздуха в замкнутом объеме:

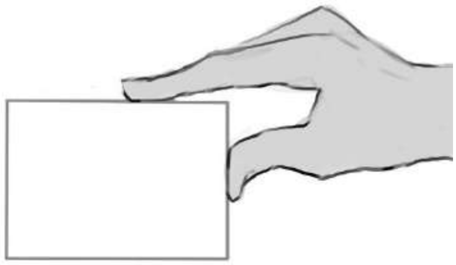
$$\frac{p_0HS}{T_0} = \frac{p'(H-h_1+\Delta h)S}{T} \Rightarrow \frac{p_0H}{T_0} = \frac{F(H-h_1+\Delta h)}{ST}$$

Выразим искомое отношение температур:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{F(H-h_1+\Delta h)}{p_0HS} = \frac{F}{p_0HS}\left(H - h_1 + \frac{1}{2\rho g}\left(\frac{F}{S} - \frac{p_0h_1}{H-h_1}\right)\right)$$

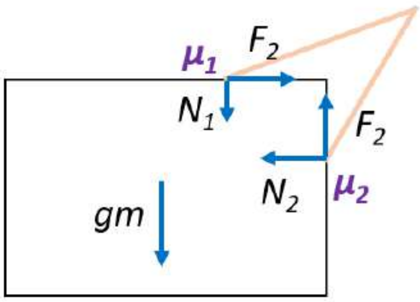
Задача 2

Мальчик удерживает небольшую легкую прямоугольную коробку на весу, взяв ее одной рукой: большой палец касается боковой грани, а остальные – верхней грани коробки. При этом пальцы не проскальзывают, грани коробки не прогибаются, а основание коробки параллельно полу. При каких условиях на коэффициенты трения между пальцами и гранями коробки это возможно?



Решение

На коробку действует сила тяжести gm. Большой палец давит на боковую грань коробки с некоторой силой N_2, а остальные пальцы на верхнюю грань с некоторой силой N_1. Это приводит к возникновению сил трения F_2 и F_1, соответственно, направленных к углу коробки (см. рисунок).



Поскольку пальцы не скользят по поверхности коробки, то модули сил трения не превосходят соответствующих значений сил трения скольжения: $F_1 \le \mu_1 N_1, F_2 \le \mu_2 N_2$. Коробочка находится в равновесии, следовательно

$$N_2 = F_1 \le \mu_1 N_1, \, gm + N_1 = F_2 \le \mu_2 N_2 \le \mu_1 \mu_2 N_1$$

Отсюда $(\mu_1\mu_2 - 1)N_1 \ge gm$. Следовательно, чтобы коробочку можно было так удержать, произведение коэффициентов трения с необходимостью должно быть больше единицы: $\mu_1\mu_2 > 1$. Более точные ограничения зависят от массы коробки и силы мальчика: N_1 максимальное может быть порядка 100–500 Н. Принципиальным ограничением является условие $\mu_1\mu_2 > 1$.

Задача 3

У конвейерной ленты в точках А и В на расстоянии L друг от друга стоят флажки. Лента движется с постоянной скоростью u в направлении из А в В. На ленту у каждого из флажков ставят две одинаковые радиоуправляемые машинки (они при этом неподвижны относительно ленты) и сразу же запускают навстречу друг другу. Машинка из точки В движется с постоянным ускорением a. Машинка из точки А сначала также движется с постоянным ускорением a, но затем в какой-то момент начинает тормозить с тем же ускорением и подъезжает к флажку В с нулевой скоростью относительно неподвижного наблюдателя. Определите длину отрезка конвейерной ленты, который преодолеет машинка из точки В за время от начала движения до момента приезда первой машинки к флажку В?

Решение:

Для машинки, движущейся по направлению движения ленты (t_1 – время от начала движения машинки А до момента переключения ускорения на противоположное, S_1 – расстояние, которое она прошла за это время, S_2 – расстояние от S_1 до флажка В, t_2 – время, за которое машинка А проедет это расстояние):

$$L = S_1 + S_2 \qquad v(t_1) = u + at_1 \qquad s_1(t_1) = ut_1 + \frac{at_1^2}{2}$$

$$v(t_2) = u + at_1 - at_2 = 0 \text{ (условие равенства нулю скорости в точке В)}$$

$$u + at_1 - at_2 = 0 => t_2 - t_1 = \frac{u}{a}$$

$$s_2(t_2) = (u + at_1)t_2 - \frac{at_2^2}{2}$$

$$\begin{cases} L = ut_1 + \frac{at_1^2}{2} + (u + at_1)t_2 - \frac{at_2^2}{2} \\ t_2 - t_1 = \frac{u}{a} \end{cases}$$

Находим t_1 и t_2:

$$t_1 = \sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} - \frac{u}{a}, \mathrm{t}_2 = \sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{u}^2}{2\mathrm{a}^2}}$$

Суммарное время:

$$t = 2\sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} - \frac{u}{a}$$

И искомое расстояние:

$$S = \frac{at^2}{2} = \frac{a}{2}\left(2\sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{u}^2}{2\mathrm{a}^2}} - \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}\right)^2$$

Задача 4

В ящике лежит множество одинаковых неидеальных вольтметров, к каждому из которых припаяны резисторы. Валера перебрал все устройства в ящике и установил:

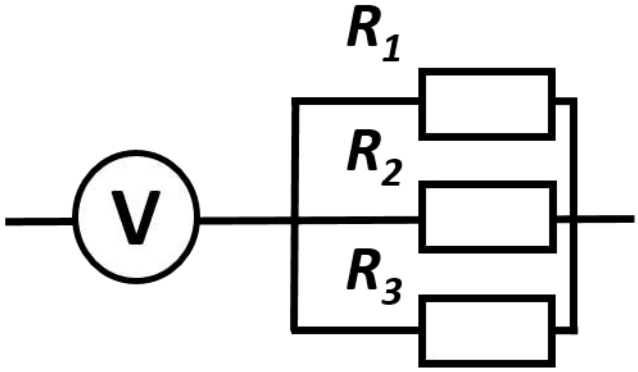
- К каждому вольтметру припаяны по три разных резистора R, $2R$, $3R$;
- имеются все возможные способы подсоединения этих трех резисторов к вольтметру, в которых по крайней мере один резистор подключен последовательно с вольтметром;
- Среди всех конфигураций минимальный предел измерения напряжения оказался равным U_{min}, а максимальный – U_{max}.

Определите внутреннее сопротивление и предел измерения одиночного вольтметра.

Решение

При подключении последовательно вольтметру сопротивления предел измерения увеличивается, так как часть напряжения начинает падать на этом сопротивлении.

Подключение сопротивления параллельно вольтметру при этом ничего не меняет. Поэтому очевидно, что, учитывая ограничения по условию задачи, минимальный предел измерения будет при последовательном подключении к вольтметру одного наименьшего сопротивления, которое может быть составлено параллельным подключением всех трех:



Тогда, если напряжение на вольтметре равно U_V, то

$$I_V = I' => \frac{U_V}{R_V} = \frac{U'}{R'}$$

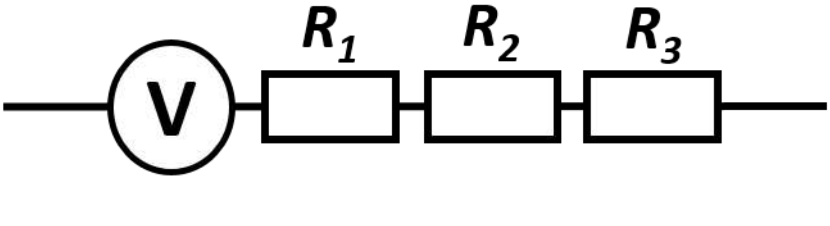
Где R' - общее сопротивление трех параллельно соединенных резисторов:

$$R' = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = \frac{6R^3}{2R^2 + 3R^2 + 6R^2} = \frac{6}{11}R$$

И полное напряжение в цепи, при котором на вольтметре будет подать напряжение, равное его номинальному пределу измерения, будет:

$$U_{min} = U_V + U' = U_V\left(1 + \frac{6}{11}\frac{R}{R_V}\right)$$

Максимальный предел измерения тогда будет в конфигурации:



$$U_{max} = U_V + U_1 + U_2 + U_3 = U_V\left(1 + 6\frac{R}{R_V}\right) => R_V = \frac{6R}{\frac{U_{max}}{U_V} - 1}$$

$$U_{min} = U_V\left(1 + \frac{6}{11}\frac{R}{R_V}\right) => R_V = \frac{6}{11}\frac{R}{\left(\frac{U_{min}}{U_V} - 1\right)}$$

Приравниваем:

$$\frac{6R}{\frac{U_{max}}{U_V} - 1} = \frac{6}{11}\frac{R}{\left(\frac{U_{min}}{U_V} - 1\right)}$$

$$11(U_{min} - U_V) = U_{max} - U_V$$

$$U_V = \frac{11U_{min} - U_{max}}{10}$$

$$R_V = \frac{6R}{\frac{10U_{max}}{11U_{min} - U_{max}} - 1} = \frac{6R(11U_{min} - U_{max})}{10U_{max} - 11U_{min} + U_{max}} = \frac{6R}{11}\frac{11U_{min} - U_{max}}{U_{max} - U_{min}}$$

Задача 5

Для полива грядки Клава использует следующую систему автоматического полива. У самого края грядки на постаменте стоит бочка для воды. Клава взяла бочку, поставила ее на постамент у самого края грядки, просверлила в ее стенке одно под другим два отверстия, и закрыла их пробками. При поливе Клава доверху наполняет бочку, в умеренно дождливый сезон открывает верхнюю пробку, а в засушливый – нижнюю. При этом в обоих случаях струя воды проходится по всей длине грядки. Определите, на каком расстоянии от земли расположены отверстия, если известно, что расстояние между ними H. Высота постамента a, высота бочки b. Считайте воду идеальной несжимаемой жидкостью, ее течение ламинарным, а диаметр отверстия много меньше диаметра бочки. Струя воды из бочки вылетает горизонтально. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Примечание. Ламинарным называется течение жидкости, при котором ее слои не перемешиваются. Траектории движения малых элементов жидкости не пересекаются и называются линиями тока. Идеальной называется жидкость с нулевой вязкостью, т.е. при течении между ее слоями не возникает трения. Для установившегося ламинарного течения идеальной несжимаемой жидкости справедлив закон Бернулли: вдоль линии тока сумма давления и объемных плотностей кинетической и потенциальной энергии жидкости остается постоянной: $p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = const$.

Решение

Рассмотрим линию тока от поверхности воды до отверстия и запишем закон Бернулли. Пусть в некоторый момент высота столба воды над отверстием равна h. И у поверхности жидкости, и снаружи у отверстия давление равно атмосферному. Поскольку площадь отверстия много меньше площади поверхности жидкости, то ясно, что скорость у поверхности жидкости пренебрежимо мала по сравнению со скоростью вытекания струи v. Тогда $\rho v^2/2\ = \rho g h$, откуда скорость вытекания равна $v = \sqrt{2gh}$.

Обозначим положения отверстий над дном бочки как h_1 и h_2. Для каждого отверстия рассчитаем расстояние от бочки до места падения малого объема воды, вылетевшего из него горизонтально с начальной скоростью $v_{1,2}$. Отверстия находятся на высоте $h_{1,2} + a$ над землей, поэтому времена полета будут равны $t_{1,2} = \sqrt{2(a + h_{1,2})/g}$. В обоих случаях бочка была заполнена до верха, поэтому $v_{1,2} = \sqrt{2g(b - h_{1,2})}$. Тогда струи из верхнего и нижнего отверстий упали на землю на расстоянии $L_{1,2} = v_{1,2}t_{1,2} = 2\sqrt{(a + h_{1,2})(b - h_{1,2})} = 2\sqrt{ab + h_{1,2}(b - a) - h_{1,2}^2}$ от бочки (индекс 1 соответствует верхнему отверстию, а 2 – нижнему).

По условию эти расстояния равны, $L_1 = L_2$, значит,

$$ab + h_1(b-a) - h_1^2 = ab + h_2(b-a) - h_2^2$$

откуда

$${h_1}^2 - {h_2}^2 = (b-a)(h_1 - h_2)$$

По условию отверстия находятся на разной высоте (h_1 не равно h_2). Поэтому, разделив на $h_1 - h_2$, получим

$$h_1 + h_2 = b - a \Rightarrow h_1 = b - a - h_2$$

По условию имеем:

$$h_1 - h_2 = H$$

Тогда

$$h_1 = \frac{b + H - a}{2}, h_2 = \frac{b - H - a}{2}$$