Задания заключительного этапа Олимпиады школьников СПбГУ по физике 2021-2022 гг.

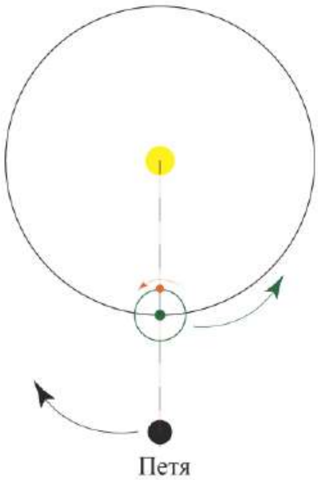
Участникам заключительного этапа предлагался к решению вариант, состоящий из 5 задач. Вариант для каждого участника выбирался случайным образом из заранее заготовленных.

8 класс, Вариант 1

Задача 1

Группа восьмиклассников пришла в научный музей на экскурсию, где им на упрощенной модели продемонстрировали явление «сизигии» – выравнивание трёх или более астрономических тел в пределах одной звездной системы на одной прямой. Модель состояла из неподвижной звезды и вращающейся вокруг нее планеты со спутником. Планета совершала полный оборот вокруг звезды за время T_1=12.5 минут, а спутник совершал полный оборот вокруг планеты за время T_2=55 с. Вращение планеты вокруг звезды и спутника вокруг планеты происходит против часовой стрелки. Скорости спутника и планеты постоянны, орбиты – круговые, лежащие в одной плоскости.

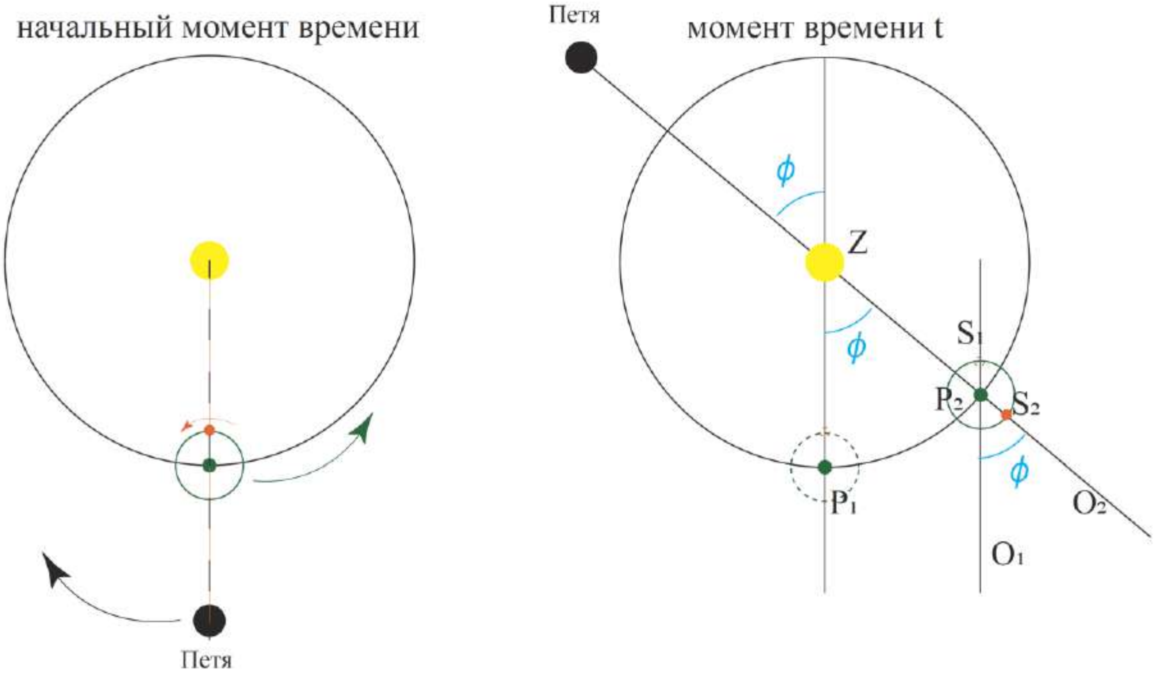
1. Если вести наблюдения от момента сизигий, сколько всего раз за один оборот планеты вокруг звезды в этой модели будет наблюдаться сизигия?
2. Петя, увлеченный демонстраций, решает обойти модель по кругу радиуса R=20 м по часовой стрелке, представляя себя еще одной планетой в системе (см. рисунок). Петя начинает движение ровно в тот момент, когда он, звезда, планета и спутник находились на одной прямой. С какой постоянной скоростью должен двигаться Петя, чтобы в момент следующей сизигии снова оказаться на одной прямой с небесными телами?



Решение:

Введем дополнительные буквенные обозначения: P_1 и P_2 для положения планеты в начальный момент времени и во время следующей сизигии, S_1 и S_2 для положения спутника в те же моменты времени. В условии не сказано, что начальное положение соответствует сизигии. Об этом упоминается только во втором вопросе. Построим вертикальную прямую, проходящую через P_2 и параллельную радиусу, соединяющему звезду и планету в начальный момент времени, когда спутник находится между планетой и звездой. Следующее выравнивание звезды, планеты и спутника произойдет в тот момент, когда спутник будет находиться за планетой относительно звезды. Спутник вращается быстрее, поэтому за некоторое время t, пока планета сместится на угол P_1ZP_2=ϕ, спутник должен сместиться из положения S_1 в положение S_2 на угол 180^o+$O_1P_2O_2$

$=180^o + \varphi$. Углы $O_1P_2O_2=P_1ZP_2=\phi$ как соответственные углы при пересечении параллельных прямых секущей (прямые параллельны по построению). Полный оборот (планеты вокруг звезды и спутника вокруг планеты) соответствует углу в 360^o. Скорости тел в модели постоянны, поэтому справедливы следующие соотношения:



$\varphi/t = 360^o/T_1$ – для угловой скорости движения планеты;
$(\varphi + 180^o)/t = 360^o/T_2$ – для угловой скорости движения спутника.
Отсюда находим интервал времени от начала наблюдения, спустя который будет наблюдаться сизигия:

$$t = \frac{T_1T_2}{2(T_1 - T_2)} = 29.68\ c$$

Угол, на который сдвинется планета от начального положения:

$$\varphi = \frac{180^o \cdot T_2}{T_1 - T_2} = 14.245^o \approx 14.2^o$$

Количество сизигий за один оборот планеты: разделим период обращения планеты T_1на найденное время t – интервал между двумя последовательными сизигиями.

$N = \frac{T_1}{t} = \frac{2(T_1-T_2)}{T_2} = 25.27 \approx 25$ – столько раз появлялась сизигия после начала наблюдений

Тогда количество сизигий за один оборот планеты (считая первую в начальный момент времени) равно $N + 1 = 26$.

То же самое значение можно получить, если вычислить $N = \frac{360^o}{\varphi} = \frac{360^o(T_1-T_2)}{180^oT_2} \approx 25$ и $N + 1 = 26$.

Ответ на вопрос 1 – 26.

За найденное выше время t Петя должен пройти расстояние, соответствующее длине дуги с градусной мерой $180^o - \varphi$. Для вычисления длины дуги используются радианы ($360^o = 2\pi$ радиан, $\pi \approx 3.1416$). Длина дуги равна $(\pi - \varphi)R$, подставим полученные ф (в радианах) и t. Тогда скорость Пети выразится как

$$V = \frac{(\pi - \varphi)R}{t} = 1.949 \ \approx 2.0 \text{ м/с}$$

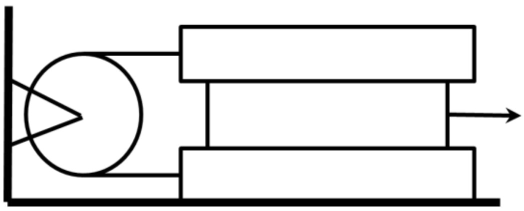
Решение в общем виде:

$$V = \frac{2R(\pi T_1 - 2\pi T_2)}{T_1 \square_2}$$

Ответ на вопрос 2 – 2.0 м/с.

Задача 2

В системе, показанной на рисунке, масса верхнего бруска 1 кг, а нижнего 2 кг. Верхний и нижний бруски соединены непровисающей невесомой нитью, перекинутой через прикрепленный к стене идеальный неподвижный блок. Средний брусок начинают аккуратно тянуть вправо так, что он движется с постоянной скоростью. При этом верхний и нижний бруски остаются неподвижными. При какой наибольшей массе среднего бруска такая ситуация возможна? Коэффициент трения между верхним и средним брусками 0.5, между средним и нижним брусками 0.5, а между нижним бруском и полом 0.3. Ускорение свободного падения считайте равным 10 Н/кг.



Решение.

Рассмотрим верхний брусок. По горизонтали на него действуют направленная влево сила натяжения нити T и направленная вправо сила трения $F_1 = \mu_1 g m_1$. Поскольку брусок покоится, $T = \mu_1 g m_1$

Рассмотрим горизонтальные силы, действующие на нижний брусок. Сила натяжения нити $T = \mu_1 g m_1$ действует налево. Сила трения со стороны среднего бруска действует направо и равна $F_2 = \mu_1 g(m_1 + M)$, где за M мы обозначили массу среднего бруска. Видно, что $F_2 > T$. Следовательно, чтобы нижний брусок покоился, сила трения со стороны пола F_3 необходимо направлена налево и равна $F_3 = F_2 - T = \mu_1 g M$. С другой стороны, сила трения со стороны пола не может превосходить силу трения скольжения, т.е. $F_3 \leq \nu g(m_1 + m_2 + M)$. Отсюда получим

$$\mu_1 g m \leq \nu g(m_1 + m_2 + M)$$

$$(\mu_1 - \nu)\, M \leq \nu(m_1 + m_2)$$

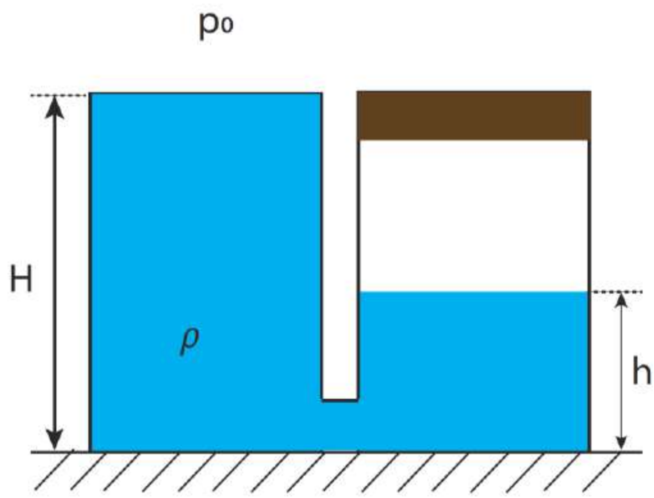
$$M \leq \nu(m_1 + m_2)/(\mu_1 - \nu)$$

Наибольшая возможная масса среднего бруска равна $\nu(m_1 + m_2)/(\mu_1 - \nu)$.

Задача 3

В камере, заполненной воздухом при давлении $p_0 = 20$ кПа, находятся два одинаковых сосуда высотой $H = 30$ см и площадью основания $S = 100$ см^2. Сосуды соединены тонкой трубкой, расположенной у дна; один из них плотно закрыт неподвижной тонкой пробкой. Определите, какой объем воды с плотностью $\rho = 1000$ кг/м^3 нужно влить в открытый сосуд, чтобы она начала переливаться через край? Так как температура в камере не изменяется, то состояние воздуха в замкнутом объеме описывается соотношением $pV = const$. Объем налитой воды считать пренебрежимо малым по сравнению с объемом камеры.

Решение:



Изначально сосуды пустые. Как только начинают наливать жидкость, воздух в закрытом сосуде становится изолированным от воздуха в камере. По мере наливания жидкости объем, занятый воздухом уменьшается, а его давление увеличивается.

Нас интересует ситуация, при которой высота столба жидкости в открытом сосуде равна высоте сосуда. Запишем для нее балланс давлений:

$$p_0 + \rho g H = p + \rho g h$$

Где h – высота столба жидкости в сосуде, закрытом пробкой, p – давление воздуха в объеме под пробкой. В то же время, для давления p справедливо равенство (подсказка из условия):

$$p_0 H S = p(H - h)S => p = \frac{p_0 H}{H - h}$$

Подставим выражение для давления p в первое уравнение:

$$p_0 + \rho g H = \frac{p_0 H}{H - h} + \rho g h$$

Введем обозначение $x = H - h$ и перепишем уравнение в виде:

$$p_0 + \rho g x = \frac{p_0 H}{x} => \rho g x^2 + p_0 x - p_0 H = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-p_0 \pm \sqrt{p_0^2 + 4 p_0 \rho g H}}{2 \rho g}$$

Очевидно, что из двух корней один получается положительным, другой – отрицательным. Выбираем положительный, т. к. согласно определению для выбранной переменной, она не может быть отрицательной (уровень воды в сосуде не может быть выше высоты сосуда).

Тогда высота столба жидкости в закрытом сосуде:

$$h = H + \frac{p_0 - \sqrt{p_0^2 + 4p_0\rho g H}}{2\rho g}$$

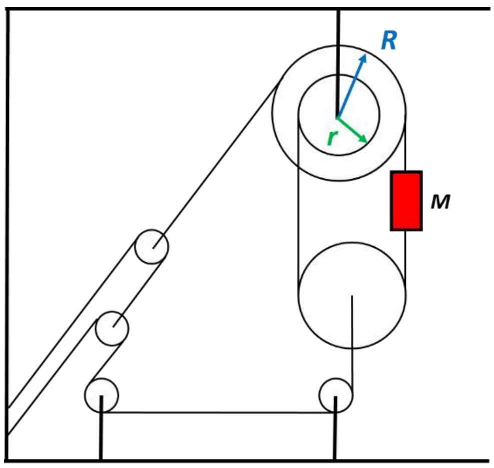
И искомый объем:

$$V = S(H+h) = S\left(2H - \frac{\sqrt{p_0^2 + 4p_0\rho g H} - p_0}{2\rho g}\right) = S\left(2H - \frac{p_0}{2\rho g}\sqrt{1 + \frac{4\rho g H}{p_0}}\right)$$

Подставляя числа, получаем ответ $V = 3350$ см^3.

Задача 4

На рисунке изображена система идеальных блоков, соединенных друг с другом невесомыми нерастяжимыми нитями, в которой подвешен груз массой M так, как показано на рисунке. Верхние соосные блоки радиусами $R = 15$ см и $r = 12$ см жестко скреплены друг с другом и могут вращаться вокруг своей оси. Конец нити, намотанной на блок радиуса r, закреплен на этом блоке Все нити в системе одинаковые, не провисают, не проскальзывают и могут выдерживать максимальную силу натяжения $T_{max} = 110$ Н. Определите максимальную массу груза M, которого можно подвесить таким образом, чтобы при этом ни одна из нитей не оборвалась. Трение в осях блоков отсутствует. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ Н/кг.



Решение

Обозначим за F_1 силу натяжения нити, стремящуюся повернуть блок Rпротив часовой стрелки, за F_2 – силу, тянущую за нижний блок. Поскольку система находится в равновесии, и верхние блоки не вращаются, уравнение моментов сил запишется следующим образом:

$$F_1 R + \frac{F_2}{2} r = \left(\frac{F_2}{2} + mg\right) R => F_1 R = \frac{F_2}{2}(R - r) + mgR => F_1 = \frac{F_2}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) + mg$$

С другой стороны, для сил натяжения можно записать:

$$F_1 = 4F_2$$

И тогда:

$$4F_2 = \frac{F_2}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) + mg => F_2\left(4 - \frac{1}{2} + \frac{r}{2R}\right) = mg => F_2\left(\frac{7R + r}{2R}\right) = mg =>$$

$$F_2 = \frac{2R}{7R + r}mg$$

Поскольку нити одинаковые во всей конструкции, максимальное натяжение испытывает нить между блоком радиуса R и грузом m:

$$F' = F_1 + \frac{1}{2}F_2\frac{r}{R} = \frac{F_2}{2}\left(8 + \frac{r}{R}\right) = \frac{R}{7R + r}\left(8 + \frac{r}{R}\right)mg = \frac{8R + r}{7R + r}mg$$

Поэтому в полученном выражении надо вместо F' подставлять данную по условию максимальную силу натяжения. И тогда ответ:

$$\frac{T_{max}}{g}\left(\frac{7R + r}{8R + r}\right) = m$$

Задача 5

T, °C	ρ, г/м³
15	12,8
16	13,6
17	14,5
18	15,4
19	16,3
20	17,3

Плотно закрытый теплоизолированный сосуд заполнен воздухом с относительной влажностью 90% и температурой 20 °C. Через специальный шлюз в сосуд поместили тонкую металлическую пластинку, причем воздух не выходил из сосуда и не входил в него. Спустя некоторое время на пластинке выпала роса. Температура воздуха в сосуде после установления теплового равновесия равна 17 °C. Какова была начальная температура пластинки? Зависимость плотности насыщенного водяного пара от температуры приведена в таблице. Считайте удельную теплоту испарения постоянной и равной 2465 кДж/кг. Удельная теплоемкость сухого воздуха равна 1005 Дж/(кг·°C), его плотность 1205 г/м^3, теплоемкость пластинки 420 Дж/°C. Объем сосуда равен 0,2 м^3, объемы пластинки и конденсата пренебрежимо малы. Теплотой, выделившейся при остывании пара и воды, можно пренебречь.

Решение.

У нас есть

1) уравнение теплового баланса (где охлаждением пара и воды пренебрегли):

$$C(t_1 - t_п) = c_в m_в(t_0 - t_1) + L\Delta m,$$

2) выражение для массы воздуха: $m_в = \rho_в V_0$,

3) выражение для массы пара до охлаждения: $m + \Delta m = \varphi\rho_{нас}(t_0)V_0$,

4) выражение для массы пара, оставшегося в воздухе после охлаждения (раз выпала роса, то пар насыщенный): $m = \rho_{нас}(t_1)V_0$.

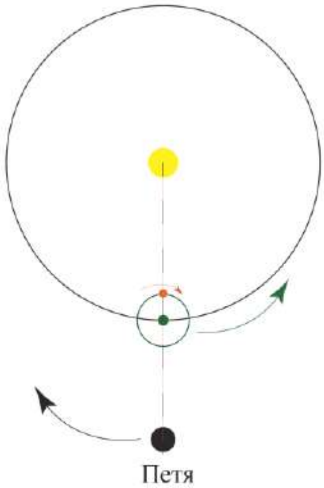
Подставляем известные величины в 2, 3 и 4, вычтем 4 из 3 – получим Δm. Подставим Δm в 1 и учтем 2. Отсюда выразим $t_п$.

Вариант 2

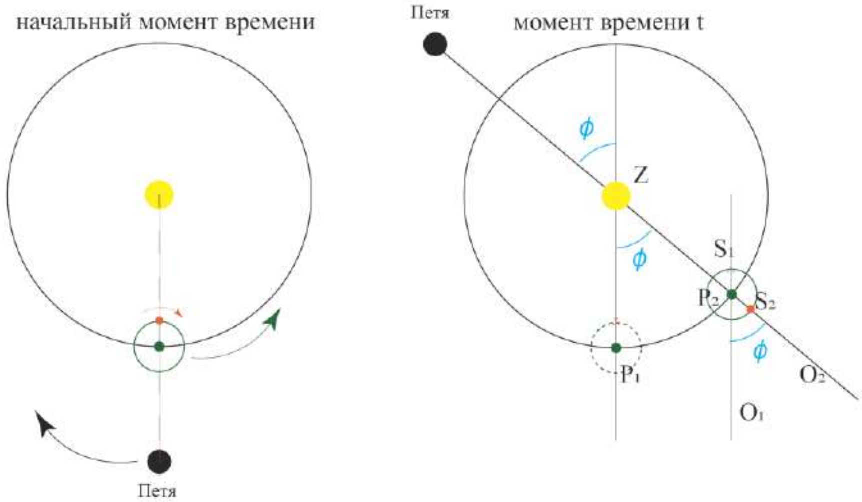
Задача 1

Группа восьмиклассников пришла в научный музей на экскурсию, где им на упрощенной модели продемонстрировали явление «сизигии» – выравнивание трёх или более астрономических тел в пределах одной звездной системы на одной прямой. Модель состояла из неподвижной звезды и вращающейся вокруг нее планеты со спутником. Планета совершала полный оборот вокруг звезды за время T_1=12.5 минут, а спутник совершал полный оборот вокруг планеты за время T_2=55 с. Вращение планеты вокруг звезды происходит против часовой стрелки, спутника вокруг планеты – по часовой. Скорости спутника и планеты постоянны, орбиты – круговые, лежащие в одной плоскости.

1. Если вести наблюдения от момента сизигии, сколько всего раз за один оборот планеты вокруг звезды в этой модели будет наблюдаться сизигия?
2. Петя, увлеченный демонстраций, решает обойти модель по кругу радиуса R=20 м по часовой стрелке, представляя себя еще одной планетой в системе (см. рисунок). Петя начинает движение ровно в тот момент, когда он, звезда, планета и спутник находились на одной прямой. С какой постоянной скоростью должен идти Петя, чтобы в момент следующей сизигии снова оказаться на одной прямой с небесными телами?



Решение:



Введем дополнительные буквенные обозначения: P_1 и P_2 для положения планеты в начальный момент времени и во время следующей сизигии, S_1 и S_2 для положения спутника в те же моменты времени. Построим вертикальную прямую, проходящую через P_2 и параллельную радиусу, соединяющему звезду и планету в начальный момент времени, когда спутник находится между планетой и звездой. Следующее выравнивание звезды, планеты и спутника произойдет в тот момент, когда спутник будет находиться за планетой относительно звезды. Спутник вращается быстрее, поэтому за некоторое время t, пока планета сместится на угол P_1ZP_2=ф, спутник должен сместиться из положения S_1 в положение S_2 на угол 180^o+$O_1P_2O_2$ =$180^o - \varphi$. Углы $O_1P_2O_2$=P_1ZP_2=ф как соответственные углы при пересечении параллельных прямых секущей (прямые параллельны по построению). Полный оборот (планеты вокруг звезды и спутника вокруг планеты) соответствует углу в 360^o. Скорости тел в модели постоянны, поэтому справедливы следующие соотношения:

$\varphi/t = 360^o/T_1$ – для угловой скорости движения планеты;

$(180^o - \varphi)/t = 360^o/T_2$ – для угловой скорости движения спутника.

Отсюда находим интервал времени от начала наблюдения, спустя который будет наблюдаться сизигия:

$$t = \frac{T_1 T_2}{2(T_1 + T_2)} = 25.62\ c$$

Угол, на который сдвинется планета от начального положения:

$$\varphi = \frac{180^o \cdot T_2}{T_1 + T_2} = 12.298^o \approx 12.3^o$$

Количество сизигий за один оборот планеты: разделим период обращения планеты T_1 на найденное время t – интервал между двумя последовательными сизигиями

$N = \frac{T_1}{t} = \frac{2(T_1+T_2)}{T_2} = 29.27 \approx 29$ – столько раз появлялась сизигия после начала наблюдений.

Тогда количество сизигий за один оборот планеты (считая первую в начальный момент времени) равно $N + 1 = 30$.

То же самое значение можно получить, если вычислить $N = \frac{360^o}{\varphi} = \frac{360^o(T_1+T_2)}{180^o T_2} \approx 29$ и $N + 1 = 30$.

Ответ на вопрос 1 – 30.

За найденное выше время t Петя должен пройти расстояние, соответствующее длине дуги с градусной мерой $180^o - \varphi$. Для вычисления длины дуги используются радианы ($360^o = 2\pi$ радиан, $\pi \approx 3.1416$). Длина дуги равна $(\pi - \varphi)R$, подставим полученные ф (в радианах) и t. Тогда скорость Пети выразится как

$$V = \frac{(\pi - \varphi)R}{t} = 2.285\ \approx 2.3\ \text{м/с}$$

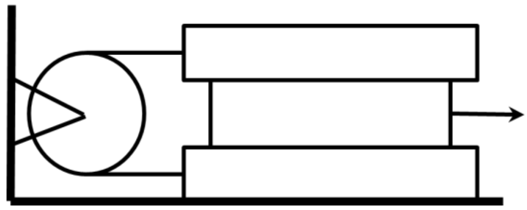
Решение в общем виде:

$$V = \frac{2\pi R}{T_2}$$

Ответ на вопрос 2 – 2.3 м/с.

Задача 2

В системе, показанной на рисунке, масса верхнего бруска 2 кг, среднего 1 кг, а нижнего 5 кг. Верхний и нижний бруски соединены непровисающей невесомой нитью, перекинутой через прикрепленный к стене идеальный неподвижный блок. Средний брусок начинают аккуратно тянуть вправо так, что он движется с постоянной скоростью. При этом верхний и нижний бруски остаются неподвижными. При каком наименьшем коэффициенте трения между нижним бруском и полом такая ситуация возможна? Коэффициент трения между верхним и средним брусками 0.5, между средним и нижним брусками 0.2. Ускорение свободного падения считайте равным 10 Н/кг.



Решение.

Рассмотрим верхний брусок. По горизонтали на него действуют направленная влево сила натяжения нити T и направленная вправо сила трения $F_1 = \mu_1 g m_1$. Поскольку брусок покоится, $T = \mu_1 g m_1$.

Рассмотрим горизонтальные силы, действующие на нижний брусок. Сила натяжения нити $T \ = \mu_1 g m_1$ действует налево. Сила трения со стороны среднего бруска действует направо и равна $F_2 = \mu_2 g(m_1 + M) = 0.6\mu_1 g m_1$. Видно, что $F_2 < T$. Следовательно, чтобы нижний брусок покоился, сила трения со стороны пола F_3 необходимо направлена направо и равна $F_3 = T - F_2 = 0.4\mu_1 g M$.С другой стороны, сила трения со стороны пола не может превосходить силу трения скольжения, т.е. $F_3 \leq \nu g(m_1 + m_2 + M) = \nu g(1.5m_1 + m_2)$, где за ν мы обозначили коэффициент трения между полом и бруском. Отсюда получим

$$0.4\mu_1 g m_1 \leq \nu g(1.5m_1 + m_2)$$

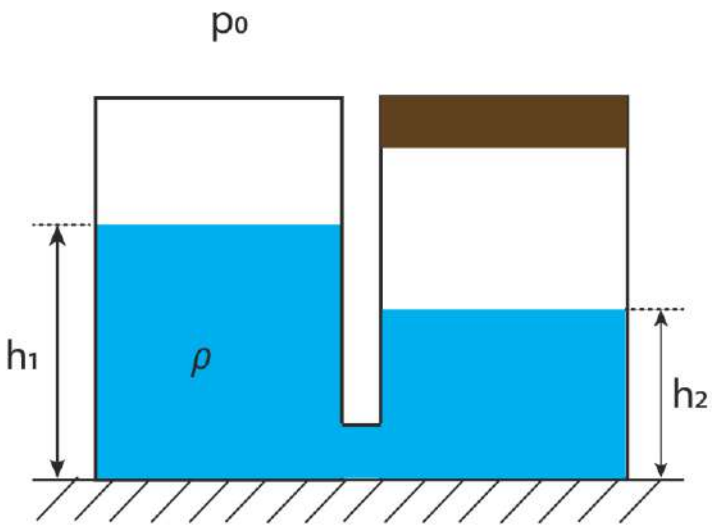
$$\nu \geq 0.4\mu_1 m_1/(1.5m_1 + m_2)$$

Наименьшее допустимое значение коэффициента трения равно $0.4\mu_1 m_1/(1.5m_1 + m_2)$.

Задача 3

В камере, заполненной воздухом при давлении $p_0 = 25$ кПа, находятся два одинаковых сосуда высотой $H = 50$ см и площадью основания $S = 200$ см^2. Сосуды соединены тонкой трубкой, расположенной у дна; один из них закрыт тонкой пробкой. Определите, какой объем жидкости с плотностью $\rho = 820$ кг/м^3 нужно влить в открытый сосуд (жидкость не переливается через край), чтобы пробка вылетела? Максимальная величина силы трения покоя, действующей на пробку, равна $F = 30$ Н. Так как температура в камере не изменяется, то состояние воздуха в замкнутом объеме описывается соотношением $pV = const$. Объем налитой жидкости считать пренебрежимо малым по сравнению с объемом камеры. Массой пробки можно пренебречь.

Решение:



Изначально сосуды пустые. Как только начинают наливать жидкость, воздух в закрытом сосуде становится изолированным от воздуха в камере. По мере наливания жидкости объем, занятый воздухом уменьшается, а его давление увеличивается.

Нас интересует ситуация, при которой давление воздуха p становится достаточно большим для того, чтобы выдавить пробку: $pS = F + p_0S$ - условие равновесия пробки перед тем, как воздух ее выдавит.

Запишем для этой ситуации баланс давлений:

$$p_0 + \rho g h_1 = p + \rho g h_2 => p_0 + \rho g h_1 = \frac{F}{S} + p_0 + \rho g h_2$$

$$=> \rho g h_1 = \frac{F}{S} + \rho g h_2$$

Где h_1 – высота столба жидкости в открытом сосуде, h_2 – высота столба жидкости в сосуде, закрытом пробкой. В то же время, для воздуха в сосуде справедливо равенство (подсказка из условия):

$$p_0 HS = p(H - h_2)S => p_0 H = \left(\frac{F}{S} + p_0\right)(H - h_2) => 0 = \frac{F}{S}H - \frac{F}{S}h_2 - p_0 h_2 =>$$

$$h_2 = \frac{FH}{S\left(\frac{F}{S} + p_0\right)} = \frac{FH}{(F + p_0 S)}$$

Подставим h_2 в первое уравнение:

$$\rho g h_1 = \frac{F}{S} + \rho g \frac{FH}{(F + p_0 S)}$$

И найдем h_1:

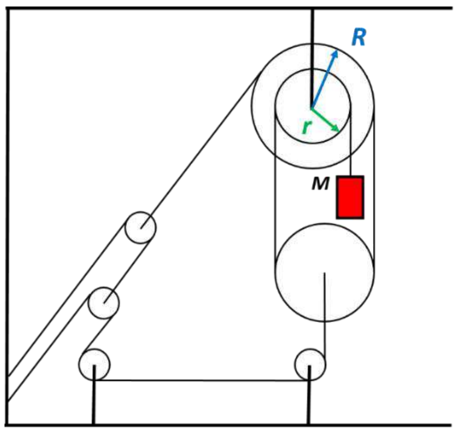
$$h_1 = \frac{F}{S\rho g} + \frac{FH}{(F + p_0 S)} = \frac{F}{S}\left(\frac{1}{\rho g} + \frac{HS}{(F + p_0 S)}\right)$$

Тогда искомый объем:

$$V = S(h_1 + h_2) = S\left(\frac{F}{S\rho g} + \frac{2FH}{(F + p_0 S)}\right) = F\left(\frac{1}{\rho g} + \frac{2SH}{(F + p_0 S)}\right)$$

Задача 4

На рисунке изображена система невесомых блоков, соединенных друг с другом невесомыми нерастяжимыми нитями, в которой подвешен груз массой M так, как показано на рисунке. Верхние соосные блоки радиусами R и r жестко скреплены друг с другом и могут вращаться вокруг своей оси. Все нити в системе одинаковые, не провисают, не проскальзывают и могут выдерживать максимальную силу натяжения $T_{max} = 105.35$ Н. Определите максимальную массу груза M, которого можно подвесить таким образом, чтобы при этом ни одна из нитей не оборвалась. Трение в осях блоков отсутствует. Ускорение свободного падения примите равным $g = 9.8$ Н/кг.



Решение

Обозначим за F_1 силу натяжения нити, стремящуюся повернуть блок R против часовой стрелки, за F_2 – силу, тянущую за нижний блок. Поскольку система находится в равновесии, и верхние блоки не вращаются, уравнение моментов сил запишется следующим образом:

$$F_1 R + \frac{F_2}{2} r = \frac{F_2}{2} R + Mgr => F_1 R = \frac{F_2}{2}(R - r) + Mgr => F_1 = \frac{F_2}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) + Mg\frac{r}{R}$$

С другой стороны, для сил натяжения можно записать:

$$F_1 = 4F_2$$

И тогда:

$$4F_2 = \frac{F_2}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) + Mg\frac{r}{R} => F_2\left(4 - \frac{1}{2} + \frac{r}{2R}\right) = Mg\frac{r}{R} => F_2\left(\frac{7R + r}{2R}\right) = Mg\frac{r}{R} =>$$

$$F_2 = \frac{2r}{7R + r}Mg$$

$$F_1 = 4F_2 = \frac{8r}{7R + r}Mg$$

Поскольку по условию $r < R$, найденные силы F_1 и F_2 будут меньше силы тяжести груза. Поэтому максимальное натяжение, которое испытывает какая-либо из нитей в системе, это Mg. Отсюда ответ:

$$M = \frac{T_{max}}{g}$$

Задача 5

Плотно закрытый теплоизолированный сосуд заполнен воздухом с относительной влажностью 90% и температурой 20 °С. Через специальный шлюз в сосуд поместили тонкую металлическую пластинку, причем воздух не выходил из сосуда и не входил в него. Спустя некоторое время на пластинке выпала роса. Температура воздуха в сосуде после установления теплового равновесия равна 17 °С. Какова была начальная температура пластинки? Зависимость плотности насыщенного водяного пара от температуры приведена в таблице. Считайте удельную теплоту испарения постоянной и равной 2465 кДж/кг. Удельная теплоемкость сухого воздуха равна 1005 Дж/(кг·°С), его плотность 1205 г/м^3, теплоемкость пластинки 420 Дж/°С. Объем сосуда равен 0,2 м^3, объемы пластинки и конденсата пренебрежимо малы. Теплотой, выделившейся при остывании пара и воды, можно пренебречь.

Т, °С	**ρ, г/м^3**
15	12,8
16	13,6
17	14,5
18	15,4
19	16,3
20	17,3

Решение:

У нас есть

1) уравнение теплового баланса (где охлаждением пара и воды пренебрегли):

$$C(t_1 - t_\text{п}) = c_\text{в} m_\text{в}(t_0 - t_1) + L\Delta m,$$

2) выражение для массы воздуха: $m_\text{в} = \rho_\text{в} V_0$,

3) выражение для массы пара до охлаждения: $m + \Delta m = \varphi \rho_\text{нас}(t_0) V_0$,

4) выражение для массы пара, оставшегося в воздухе после охлаждения (раз выпала роса, то пар насыщенный): $m = \rho_\text{нас}(t_1) V_0$.

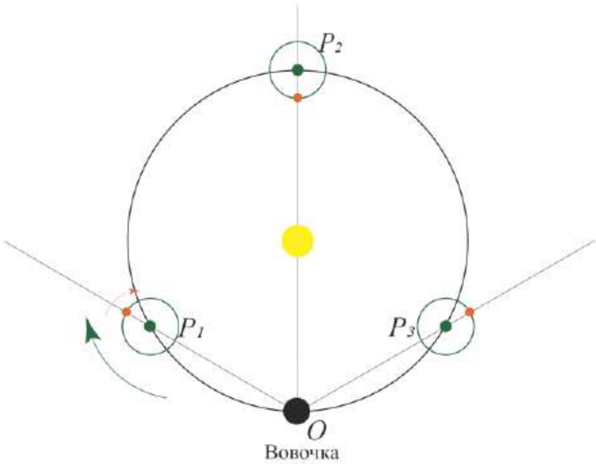
Подставляем известные величины в 2 и 4. Из 1 определяем Δm, складываем с 4. $\rho_\text{нас}(t_0)$ определим по таблице, разделим $m + \Delta m$ на $\rho_\text{нас}(t_0) V_0$. Получили φ.

Вариант 3

Задача 1

Вовочка надел очки виртуальной реальности и оказался в симуляции космического пространства. На уровне его глаз находится уменьшенная копия звездной системы – неподвижной звезды и вращающейся вокруг нее планеты со спутником. Вовочка подходит к орбите планеты вплотную и спустя несколько оборотов планеты замечает, что каждую треть оборота планеты вокруг звезды спутник оказывается полностью закрыт от его взгляда. В двух из этих трех случаев спутник закрыт планетой, и один раз – звездой, причем в тот момент, когда звезда находится на прямой между мальчиком и планетой, а спутник – между звездой и планетой. При каком соотношении периодов обращения T_1/T_2 может наблюдаться описанная ситуация? T_1 – период обращения планеты, T_2 – период обращения спутника. Вовочка стоит неподвижно, планета вращается с постоянной скоростью по часовой стрелке вокруг звезды, а спутник – по часовой стрелке вокруг планеты. Орбиты небесных тел круговые и лежат в одной плоскости (в реальности небесные тела движутся по эллиптическим орбитам, но в нашей виртуальной реальности модель упрощенная).

[Период обращения –время, за который тело, движущееся по окружности, совершает полный оборот]



Решение:

Поскольку по условию задачи сказано, что исчезновение спутника из поля зрения происходит каждую треть периода, то положения планеты в эти моменты делят окружность на три дуги равной длины. Отметим эти положения на рисунке и обозначим их как P_1,P_2 и P_3, положение Вовочки – O, положение звезды – Z. Построим вертикальную линию, проходящую через P_1 и параллельную диаметру окружности OP_2. Найдем углы на рисунке. Углы P_1ZP_2, P_2ZP_3 и P_1ZP_3 равны друг другу и равны 120^o, т.к. по условию точки P_1, P_2, P_3 находятся на расстоянии 1/3 периода обращения планеты вокруг звезды и скорость планеты постоянна.

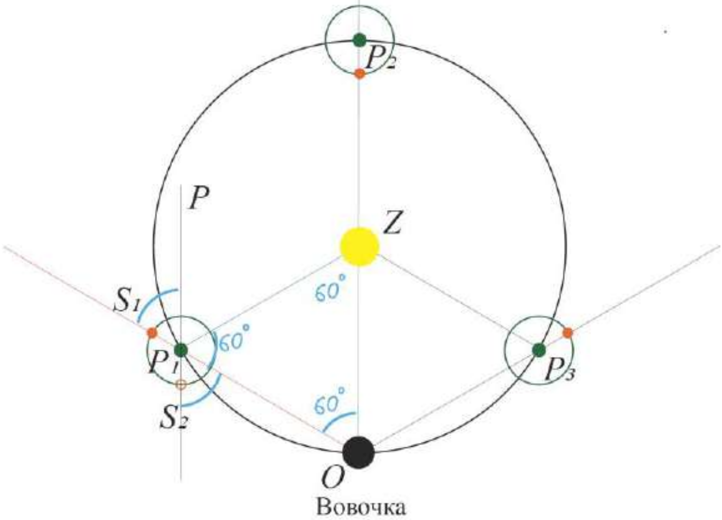


Рисунок к решению.

Поскольку по условию точка P_2 находится диаметрально противоположно от Вовочки, то из симметрии задачи точки P_1 и P_3 равноудалены и от точки O, а углы P_1ZO и OZP_3 равны. Так как их сумма равна 120°, то каждый из них равен 60°. Отрезки P_1Z и OZ – радиусы окружности и потому равны. Следовательно, треугольник P_1ZO – равносторонний (по двум равным сторонам и углу в 60° между ними.) Углы S_2P_1O и P_1OZ равны как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых секущей; прямые параллельны по построению. Тогда угол S_1P_1P тоже равен 60° как вертикальный угол с S_2P_1O.

Рассмотрим перемещение планеты из положения P_1 в положение P_2 и обозначим время перемещения за t. За это время планета сместится на угол в 120°, а спутник – на угол 180°+S_1P_1P = 180°+60° =240° (из положения S_1 в положение S_2, см. рисунок). Скорости движения планеты и спутника постоянны по условию, поэтому справедливы соотношения:

$\frac{120^o}{t} = \frac{360^o}{T_1}$ – для скорости движения планеты;

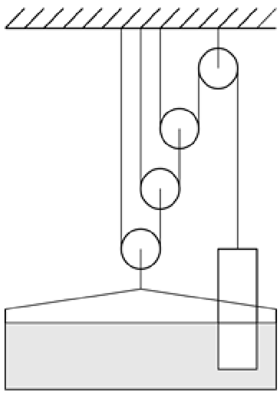
$\frac{240^o}{t} = \frac{360^o}{T_2}$ – для скорости движения спутника.

Разделим второе уравнение на первое и получим искомое отношение $T_1/T_2 = 2$.

Ответ: 2

Задача 2

Ванночка с водой подвешена к системе идеальных блоков, уравновешенной цилиндрическим грузом массой 250 г и плотностью 2.5 г/см³. Груз погружен в воду на треть своего объема (см. рисунок) и не касается дна. Определите массу ванночки с водой. Ускорение свободного падения считайте равным 10 Н/кг.



Решение.

Рассмотрим верхний брусок. По горизонтали на него действуют направленная влево сила натяжения нити T и направленная вправо сила трения $F_1 = \mu_1 g m_1$. Поскольку брусок покоится, $T = \mu_1 g m_1$.

Рассмотрим горизонтальные силы, действующие на нижний брусок. Сила натяжения нити $T = \mu_1 g m_1$ действует налево. Сила трения со стороны среднего бруска действует направо и равна $F_2 = \mu_2 g(m_1 + M) = 0.6\mu_1 g m_1$. Видно, что $F_2 < T$. Следовательно, чтобы нижний брусок покоился, сила трения со стороны пола F_3 необходимо направлена направо и равна $F_3 = T - F_2 = 0.4\mu_1 g M$.С другой стороны, сила трения со стороны пола не может превосходить силу трения скольжения, т.е. $F_3 \le \nu g(m_1 + m_2 + M) = \nu g(1.5m_1 + m_2)$, где за ν мы обозначили коэффициент трения между полом и бруском. Отсюда получим

$$0.4\mu_1 g m_1 \le \nu g(1.5m_1 + m_2)$$

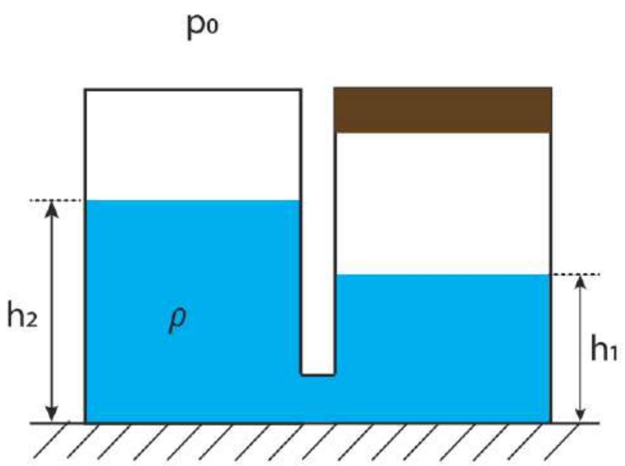
$$\nu \ge 0.4\mu_1 m_1/(1.5m_1 + m_2)$$

Наименьшее допустимое значение коэффициента трения равно $0.4\mu_1 m_1/(1.5m_1 + m_2)$.

Задача 3

В камере, заполненной воздухом при давлении $p_0 = 20$ кПа, находятся два одинаковых сосуда высотой $H = 1$ м и площадью основания $S = 680$ см^2. Сосуды соединены тонкой трубкой, расположенной у дна; один из них плотно закрыт неподвижной тонкой пробкой. В открытый сосуд вливают некоторое количество воды с плотностью ⍰ $= 1000$ кг/м^3, после чего в закрытом сосуде ее уровень устанавливается на высоте $h_1 = 20$ см. Затем систему нагревают и поддерживают при постоянной температуре и том же давлении воздуха в камере p_0, при этом уровень воды в закрытом сосуде изменяется на $\Delta h = 5$ см. Вода из открытого сосуда не выливается. Найдите отношение конечной и начальной температур в камере T/T_0. Состояние воздуха в замкнутом объеме описывается соотношением $pV/T = const$. Объем налитой воды считать пренебрежимо малым по сравнению с объемом камеры, тепловым расширением жидкости пренебречь.

Решение:



Изначально сосуды пустые. Как только начинают наливать жидкость, воздух в закрытом сосуде становится изолированным от воздуха в камере. По мере наливания жидкости объем, занятый воздухом уменьшается, а его давление увеличивается.

Запишем балланс давлений для ситуации до нагрева, обозначив высоту столба жидкости в открытом сосуде за h_2:

$$p_0 + \rho g h_2 = p + \rho g h_1$$

Где p – давление воздуха в объеме под пробкой. В то же время, для давления p справедливо равенство (подсказка из условия):

$$p_0HS/T_0 = p(H-h_1)S/T_0 => p = \frac{p_0H}{(H-h_1)}$$

Подставив p в первое уравнение, найдем высоту столба жидкости в открытом сосуде:

$$p_0 + \rho g h_2 = \frac{p_0H}{(H-h_1)} + \rho g h_1 => h_2 = \frac{p_0H}{\rho g(H-h_1)} + h_1 - \frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g}\left(\frac{H}{H-h_1} - 1\right) + h_1 =>$$

$$=> h_2 = \frac{p_0}{\rho g}\frac{h_1}{H-h_1} + h_1 = h_1\left(\frac{p_0}{\rho g(H-h_1)} + 1\right)$$

Теперь рассмотрим систему после нагрева до температуры T. При нагревании воздух в замкнутом объеме расширяется и уровень жидкости понижается на Δh. Запишем балланс давлений для этой ситуации, предполагая, что объем налитой жидкости не изменился:

$$p_0 + \rho g(h_2 + \Delta h) = p' + \rho g(h_1 - \Delta h)$$

Где p' – давление воздуха в объеме под пробкой, установившееся после нагревания сосудов.

Выразим из этого уравнения p':

$$p' = p_0 + \rho g(h_2 + 2\Delta h - h_1) = \frac{p_0H}{h_1} + 2\rho g\Delta h$$

$$p' = p_0 + \rho g(h_2 - h_1 + 2\Delta h) = p_0 + p_0\frac{h_1}{H-h_1} + 2\Delta h\rho g = p_0\frac{H}{H-h_1} + 2\Delta h\rho g$$

Для воздуха в замкнутом объеме справедливо равенство (подсказка из условий):

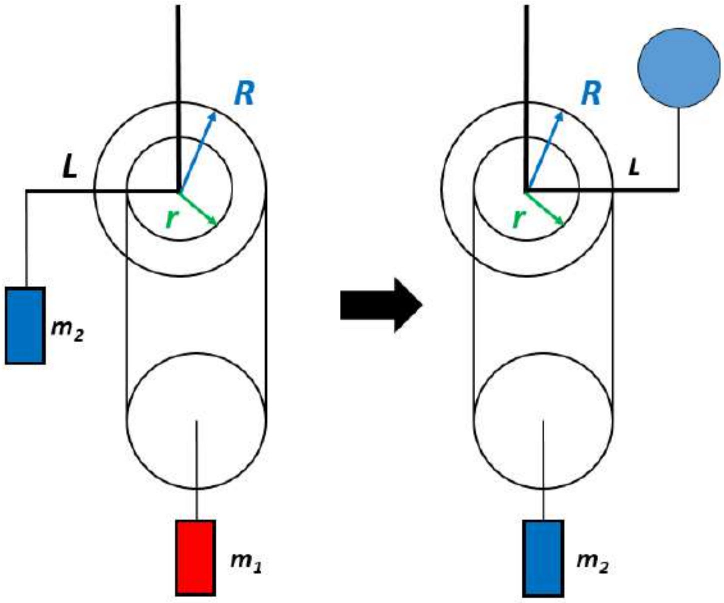
$$\frac{p_0HS}{T_0} = \frac{p'(H-h_1+\Delta h)S}{T}$$

Откуда мы можем найти искомое отношение температур:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p'(H-h_1+\Delta h)}{p_0H} = \frac{\left(p_0\frac{H}{H-h_1} + 2\rho g\Delta h\right)}{p_0H}(h_1-\Delta h) = \left(\frac{1}{H-h_1} + \frac{2\rho g\Delta h}{p_0H}\right)(h_1-\Delta h)$$

Задача 4

На рисунке изображена система невесомых блоков, соединенных друг с другом невесомыми нерастяжимыми нитями. К нижнему блоку прикреплен груз 1 массой $m_1 = 560$ г. Верхние соосные блоки радиусами $R = 20$ см и $r = 18$ см жестко скреплены друг с другом и могут вращаться вокруг своей оси. Концы нитей закреплены на этих блоках. К этой же оси прикреплена ручка длиной $L = 80$ см, к концу которой подвешен груз 2 неизвестной массы. Система находится в равновесии. Затем, груз 2 снимают с ручки и подвешивают вместо груза 1, а ручку переводят в диаметрально противоположное положение и прикрепляют к ней шарик, заполненный гелием. Каким должен быть объем шарика, чтобы система осталась в равновесии? Трение в осях блоков отсутствует, массой пустого шарика пренебречь. Плотность воздуха равна $\rho_{\text{возд}} = 1.3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность гелия $\rho_{He} = 0.18\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.



Решение

Рассмотрим первую конфигурацию системы. Поскольку система находится в равновесии, и верхние блоки не вращаются, уравнение моментов сил запишется следующим образом:

$$m_2 gL + \frac{m_1 g}{2} r = \frac{m_1 g}{2} R$$

Откуда можно найти неизвестную массу груза 2:

$$m_2 = \frac{m_1}{2} \frac{R - r}{L}$$

Тоже условие равновесие для второй конфигурации запишется как:

$$\frac{m_2 g}{2} r + (\square_A - \rho_{He} gV)L = \frac{m_2 g}{2} R$$

Поскольку сила Архимеда равна $F_A = \rho_{\text{возд}} gV$, то

$$\left(\rho_{\text{возд}} - \rho_{He}\right) gVL = \frac{m_2 g}{2}(R - r)$$

Подставляя ранее найденное выражение для массы груза 2, находим объем шарика:

$$V = \frac{m_1}{\rho_{\text{возд}} - \rho_{He}} \left(\frac{R - r}{2L}\right)^2$$

Задача 5

T, °C	ρ, г/м^3
15	12,8
16	13,6

17	14,5
18	15,4
19	16,3
20	17,3

Плотно закрытый теплоизолированный сосуд заполнен влажным воздухом с температурой 20 ^{o}С. Через специальный шлюз в сосуд поместили металлическую пластинку с температурой 14 ^{o}С, причем воздух не выходил из сосуда и не входил в него. Спустя некоторое время на пластинке выпала роса. Температура воздуха в сосуде после установления теплового равновесия равна 17 ^{o}С. Определите начальную влажность воздуха. Зависимость плотности насыщенного водяного пара от температуры приведена в таблице. Считайте удельную теплоту испарения постоянной и равной 2465 кДж/кг. Удельная теплоемкость сухого воздуха равна 1005 Дж/(кг·^{o}С), плотность при начальной температуре 1205 г/м^3, теплоемкость пластинки 420 Дж/^{o}С. Объем сосуда равен 0,2 м^3, объемы пластинки и конденсата пренебрежимо малы. Теплотой, выделившейся при остывании пара и воды, можно пренебречь.

Решение.

У нас есть

1) уравнение теплового баланса (где охлаждением пара и воды пренебрегли):

$$C(t_1 - t_\text{п}) = c_\text{в} m_\text{в}(t_0 - t_1) + L\Delta m,$$

2) выражение для массы воздуха: $m_\text{в} = \rho_\text{в} V_0$,

3) выражение для массы пара до охлаждения: $m + \Delta m = \varphi \rho_\text{нас}(t_0) V_0$,

4) выражение для массы пара, оставшегося в воздухе после охлаждения (раз выпала роса, то пар насыщенный): $m = \rho_\text{нас}(t_1) V_0$.

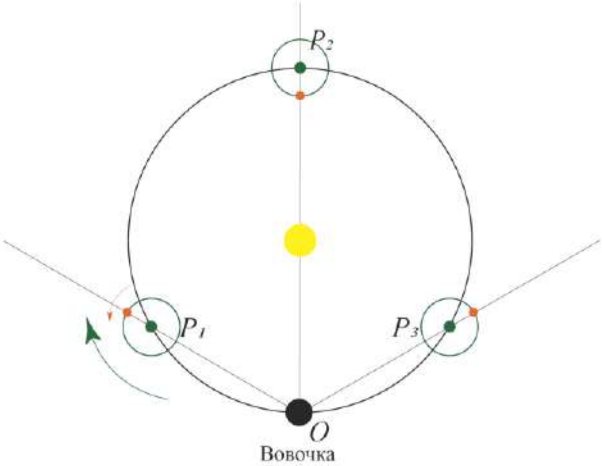
Подставляем известные величины в 2 и 4. Из 1 определяем Δm, складываем с 4. $\rho_\text{нас}(t_0)$ определим по таблице, разделим $m + \Delta m$ на $\rho_\text{нас}(t_0) V_0$. Получили φ.

Вариант 4

Задача 1

Вовочка надел очки виртуальной реальности и оказался в симуляции космического пространства. На уровне его глаз находится уменьшенная копия звездной системы – неподвижной звезды и вращающейся вокруг нее планеты со спутником. Вовочка подходит к орбите планеты вплотную и спустя несколько оборотов планеты замечает, что каждую треть оборота планеты вокруг звезды спутник оказывается полностью закрыт от его взгляда. В двух из этих трех случаев спутник закрыт планетой, и один раз – звездой, причем в тот момент, когда звезда находится на прямой между мальчиком и планетой, а спутник – между звездой и планетой. При каких соотношениях периодов обращения T_1/T_2 может наблюдаться описанная ситуация? T_1 – период обращения планеты, T_2 – период обращения спутника. Вовочка стоит неподвижно, планета вращается с постоянной скоростью по часовой стрелке вокруг звезды, а спутник – против часовой стрелки вокруг планеты. Орбиты небесных тел круговые и лежат в одной плоскости (в реальности небесные тела движутся по эллиптическим орбитам, но в нашей виртуальной реальности модель упрощенная).

[Период обращения –время, за который тело, движущееся по окружности, совершает полный оборот]



Решение:

Поскольку по условию точка P_2 находится диаметрально противоположно от Вовочки, то из симметрии задачи точки P_1 и P_3 равноудалены и от точки O, а углы P_1ZO и OZP_3 равны. Так как их сумма равна 120^o, то каждый из них равен 60^o. Отрезки P_1Z и OZ – радиусы окружности и потому равны. Следовательно, треугольник P_1ZO – равносторонний (по двум равным сторонам и углу в 60^o между ними.) Углы S_2P_1O и P_1OZ равны как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых секущей; прямые параллельны по построению. Тогда угол S_1P_1P тоже равен 60^o как вертикальный угол с S_2P_1O.

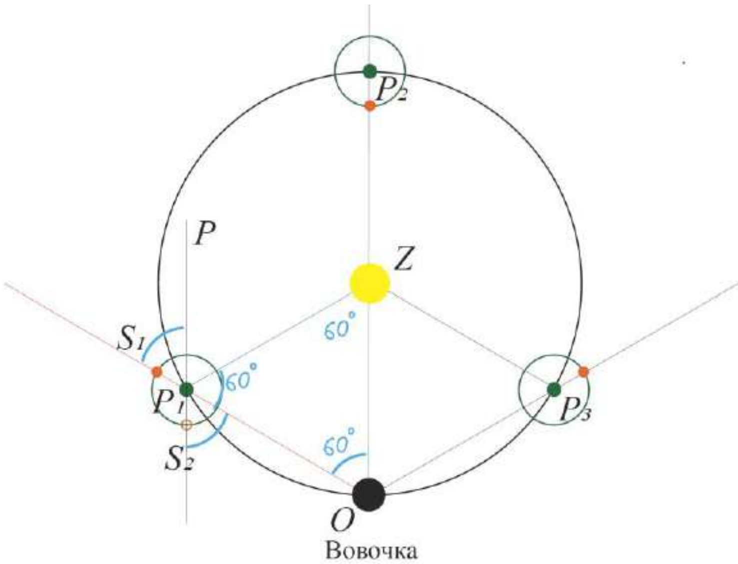


Рисунок к решению.

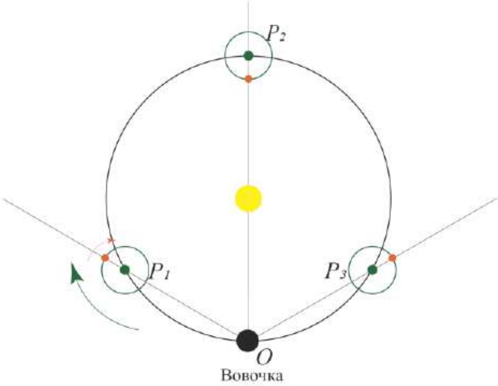
Рассмотрим перемещение планеты из положения P_1 в положение P_2 и обозначим время перемещения за t. За это время планета сместится на угол в 120^o, а спутник – на угол $S_1P_1S_2 = 180^o\text{-}60^o = 120^o$ (из положения S_1 в положение S_2, см. Рисунок). Скорости движения планеты и спутника постоянны по условию, поэтому справедливы соотношения:

$\frac{120^o}{t} = \frac{360^o}{T_1}$ – для скорости движения планеты

$\frac{120^o}{t} = \frac{360^o}{T_2}$ – для скорости движения спутника

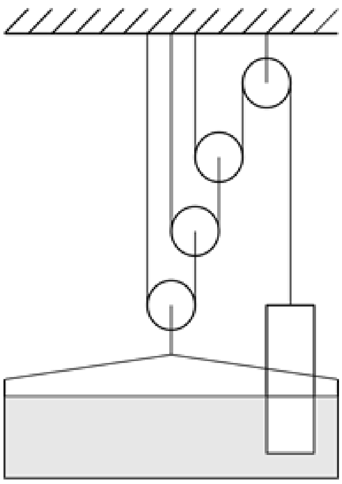
Разделим второе уравнение на первое и получим искомое отношение $T_1/T_2 = 1$.

Ответ: 1



Задача 2

Ванночка с водой массой 1.8 кг подвешена к системе идеальных блоков, уравновешенной цилиндрическим грузом массой 300 г. Груз погружен в воду на 0.6 своего объема (см. рисунок) и не касается дна. Определите плотность материала, из которого сделан груз. Ускорение свободного падения считайте равным 10 Н/кг



Решение.

Рассмотрим силы, действующие на груз. Это сила тяжести gm, направленная вниз, и сила Архимеда $F_A = g\rho_{\text{в}}\, \alpha m/\rho$ (здесь ρ – плотность материала груза) с силой натяжения нити T, направленные вверх. Поскольку груз покоится, то

$$T = gm\left(1 - \frac{\alpha\rho_{\text{в}}}{\rho}\right).$$

Рассмотрим систему ванночка-груз. На нее действует сила тяжести $g(m+M)$ и сила со стороны системы блоков, равная $9T$ (поскольку в системе 3 подвижных блока, сила натяжения нити, к которой прикреплена ванночка, в 8 раз больше силы натяжения нити, на которой висит груз). Система покоится, значит

$$9T = g(m+M)$$

Отсюда получим

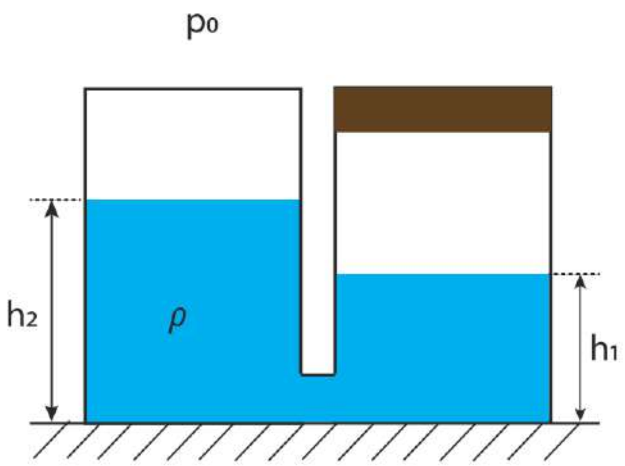
$$8gm - 9gm\frac{\alpha\rho_{в}}{\rho} = gm$$

$$\rho = 9m\alpha\rho_{в}/(8m - M)$$

Задача 3

В камере, заполненной воздухом при давлении $p_0 = 20$ кПа, находятся два одинаковых сосуда высотой $H = 1$ м и площадью основания $S = 100$ см^2. Сосуды соединены тонкой трубкой, расположенной у дна; один из них плотно закрыт тонкой пробкой. В открытый сосуд вливают некоторое количество воды плотностью $\rho = 1000$ кг/м^3, после чего в закрытом сосуде устанавливается уровень жидкости высотой $h_1 = 17$ см. Затем систему нагревают до некоторой температуры, поддерживая давление воздуха в камере на прежнем уровне p_0 (вода из открытого сосуда не выливается), после чего пробка вылетает из сосуда. Максимальная величина силы трения покоя, действующей на пробку, равна $F = 50$ Н. Найдите отношение конечной и начальной температур в камере T/T_0. Состояние воздуха в замкнутом объеме описывается соотношением $pV/T = const$. Объем налитой воды считать пренебрежимо малым по сравнению с объемом камеры, тепловым расширением жидкости пренебречь. Массой пробки можно пренебречь.

Решение:



Изначально сосуды пустые. Как только начинают наливать жидкость, воздух в закрытом сосуде становится изолированным от воздуха в камере. По мере наливания жидкости объем, занятый воздухом уменьшается, а его давление увеличивается.

Запишем балланс давлений для ситуации до нагрева, обозначив высоту столба жидкости в открытом сосуде за h_2:

$$p_0 + \rho g h_2 = p + \rho g h_1$$

Где p – давление воздуха в объеме под пробкой. В то же время, для давления p справедливо равенство (подсказка из условия):

$$p_0 HS/T_0 = p(H - h_1)S/T_0 => p = \frac{p_0 H}{(H - h_1)}$$

Подставив p в первое уравнение, найдем высоту столба жидкости в открытом сосуде:

$$p_0 + \rho g h_2 = \frac{p_0 H}{(H - h_1)} + \rho g h_1 => h_2 = \frac{p_0 H}{\rho g (H - h_1)} + h_1 - \frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g}\left(\frac{H}{H - h_1} - 1\right) + h_1 =>$$

$$=> h_2 = \frac{p_0}{\rho g}\frac{h_1}{H - h_1} + h_1 = h_1\left(\frac{p_0}{\rho g (H - h_1)} + 1\right)$$

Теперь рассмотрим систему после нагрева до температуры T перед тем, как пробка вылетает из сосуда. Максимальная сила трения покоя, действующая на пробку, равна $F = p'S - p_0 S$, где p' – давление воздуха в замкнутом объеме под пробкой после нагревания.

При нагревании воздух расширяется и уровень жидкости в закрытом сосуде понижается, обозначим это изменение уровня жидкости как Δh. Запишем балланс давлений для этой ситуации, предполагая, что объем налитой жидкости не изменился:

$$p_0 + \rho g (h_2 + \Delta h) = p' + \rho g (h_1 - \Delta h) => p_0 + \rho g (h_2 + \Delta h) = F/S + p_0 + \rho g (h_1 - \Delta h)$$

$$=> \rho g (h_2 + \Delta h) = F/S + \rho g (h_1 - \Delta h)$$

Найдем Δh:

$$\Delta h = \frac{F}{2\rho g S} + \frac{(h_1 - h_2)}{2} = \frac{F}{2\rho g S} - \frac{p_0}{2\rho g}\frac{h_1}{H - h_1} = \frac{1}{2\rho g}\left(\frac{F}{S} - \frac{p_0 h_1}{H - h_1}\right)$$

Теперь воспользуемся подсказкой про соотношение давления и температуры воздуха в замкнутом объеме:

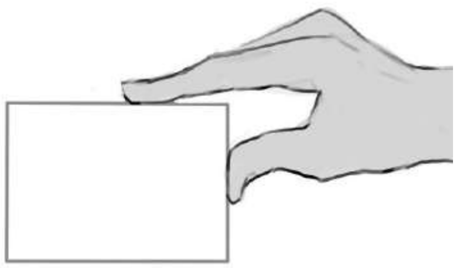
$$\frac{p_0 H S}{T_0} = \frac{p'(H - h_1 + \Delta h) S}{T} => \frac{p_0 H}{T_0} = \frac{F(H - h_1 + \Delta h)}{ST}$$

Выразим искомое отношение температур:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{F(H - h_1 + \Delta h)}{p_0 H S} = \frac{F}{p_0 H S}\left(H - h_1 + \frac{1}{2\rho g}\left(\frac{F}{S} - \frac{p_0 h_1}{H - h_1}\right)\right)$$

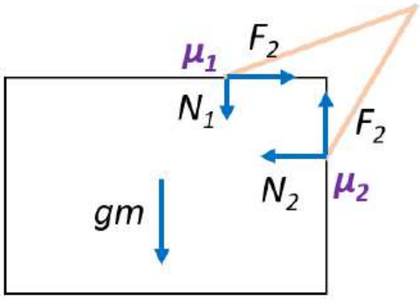
Задача 4

Мальчик удерживает небольшую легкую прямоугольную коробку на весу, взяв ее одной рукой: большой палец касается боковой грани, а остальные – верхней грани коробки. При этом пальцы не проскальзывают, грани коробки не прогибаются, а основание коробки параллельно полу. При каких условиях на коэффициенты трения между пальцами и гранями коробки это возможно?



Решение

На коробку действует сила тяжести gm. Большой палец давит на боковую грань коробки с некоторой силой N_2, а остальные пальцы на верхнюю грань с некоторой силой N_1. Это приводит к возникновению сил трения F_2 и F_1, соответственно, направленных к углу коробки (см. рисунок).



Поскольку пальцы не скользят по поверхности коробки, то модули сил трения не превосходят соответствующих значений сил трения скольжения: $F_1 \le \mu_1 N_1, F_2 \le \mu_2 N_2$. Коробочка находится в равновесии, следовательно

$$N_2 = F_1 \le \mu_1 N_1,\, gm + N_1 = F_2 \le \mu_2 N_2 \le \mu_1 \mu_2 N_1$$

Отсюда $(\mu_1\mu_2 - 1)N_1 \ge gm$. Следовательно, чтобы коробочку можно было так удержать, произведение коэффициентов трения с необходимостью должно быть больше единицы: $\mu_1\mu_2 > 1$. Более точные ограничения зависят от массы коробки и силы мальчика: N_1 максимальное может быть порядка 100–500 Н. Принципиальным ограничением является условие $\mu_1\mu_2 > 1$.

Задача 5

Плотно закрытый теплоизолированный сосуд заполнен влажным воздухом с температурой 20 ^{o}С. Через специальный шлюз в сосуд поместили металлическую пластинку с температурой 14 ^{o}С, причем воздух не выходил из сосуда и не входил в него. Спустя некоторое время на пластинке выпала роса. Температура воздуха в сосуде после установления теплового равновесия равна 17 ^{o}С. Определите начальную влажность воздуха. Зависимость плотности насыщенного водяного пара от температуры приведена в таблице. Считайте удельную теплоту испарения постоянной и равной 2465 кДж/кг. Удельная теплоемкость сухого воздуха равна 1005 Дж/(кг·^{o}С), плотность при начальной температуре 1205 г/м^3, теплоемкость пластинки 420 Дж/^{o}С. Объем сосуда равен 0,2 м^3, объемы пластинки и конденсата пренебрежимо малы. Теплотой, выделившейся при остывании пара и воды, можно пренебречь.

T, ^{o}C	**ρ, г/м^3**
15	12,8
16	13,6
17	14,5
18	15,4
19	16,3
20	17,3

Решение.

У нас есть

1) уравнение теплового баланса (где охлаждением пара и воды пренебрегли):

$$C(t_1 - t_{\text{п}}) = c_{\text{в}} m_{\text{в}} (t_0 - t_1) + L\Delta m,$$

2) выражение для массы воздуха: $m_{\text{в}} = \rho_{\text{в}} V_0$,

3) выражение для массы пара до охлаждения: $m + \Delta m = \varphi \rho_{\text{нас}}(t_0) V_0$,

4) выражение для массы пара, оставшегося в воздухе после охлаждения (раз выпала роса, то пар насыщенный): $m = \rho_{\text{нас}}(t_1) V_0$.

Подставляем известные величины в 2 и 4. Из 1 определяем Δm, складываем с 4. $\rho_{\text{нас}}(t_0)$ определим по таблице, разделим $m + \Delta m$ на $\rho_{\text{нас}}(t_0) V_0$. Получили φ.