Задания заключительного этапа Олимпиады школьников СПбГУ по физике 2021-2022 гг.

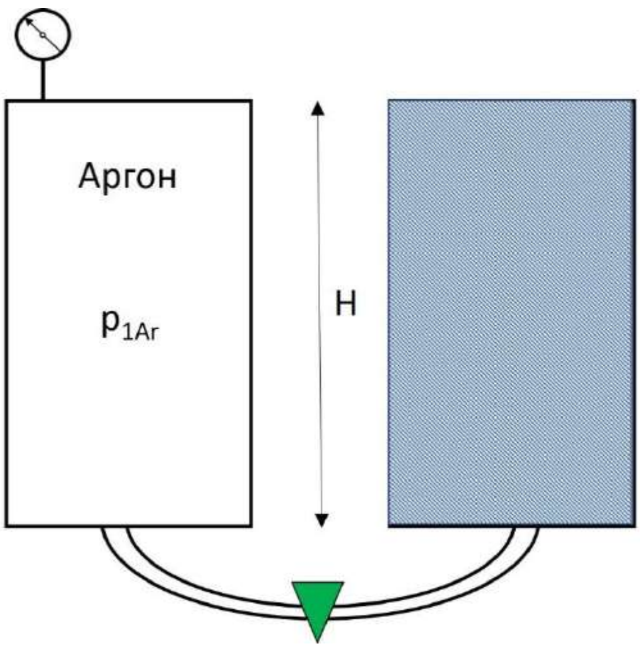
Участникам заключительного этапа предлагался к решению вариант, состоящий из 5 задач. Вариант для каждого участника выбирался случайным образом из заранее заготовленных.

11 класс

Вариант 1

Задача 1

Два одинаковых цилиндрических запаянных сосуда герметично соединены у дна тонкой перемычкой. В перемычку встроен кран-натекатель, который изначально закрыт. Один из сосудов полностью заполнен водой, другой – аргоном при давлении p_{Ar}. В заполненном аргоном сосуде установлен манометр, позволяющий измерять давление газа в сосуде. Кран открывают, вода начинает медленно перетекать. После установления равновесия манометр показывал давление, в n раз большее начального. Определите высоту сосудов. Температура в сосудах остается постоянной. Ускорение свободного падения, плотность воды, плотность и давление насыщенных паров воды при данной температуре считайте известными. Растворением аргона в воде пренебречь.



Решение

После открытия крана вода будет медленно перетекать из правового сосуда в левый, высота столба жидкости в нем будет увеличиваться, объем, предоставляемый аргону, будет уменьшаться, его давление будет увеличиваться. Поскольку перетекание медленное, то со свободной поверхности воды будет происходить испарение, и к давлению аргона будет прибавляться давление паров воды. По той же причине в конце пары будут насыщенными.

В правом же сосуде высота столба жидкости будет уменьшаться, освобождающийся объем будет заполняться насыщенным паром по мере испарения воды. Так как перетекание медленное, пары будут успевать достигать насыщенного состояния. Перетекание прекратится, когда давление в перемычке уравновеситься.

Введем обозначения, характеризующие конечное состояние: h_1', h_2' – новые высоты столбов жидкости в сосудах, p_{Ar1}' – новое парциальное давление аргона в левом сосуде, H – высота сосуда. Поскольку процесс изотермический, то для аргона можно записать:

$$p_{Ar}SH = p_{Ar}'S(H - h_1') => p_{Ar}' = p_{Ar}\frac{H}{H - h_1'}$$

При этом, показания манометра в конце есть сумма нового парциального давления аргона и давления насыщенного водяного пара:

$$\frac{p_{Ar}' + p_{\text{пар}}}{p_{Ar}} = n => p_{Ar}' = np_{Ar} - p_{\text{пар}}$$

Откуда:

$$np_{Ar} - p_{\text{пар}} = p_{Ar}\frac{H}{H - h_1'} => H - h_1' = \frac{H}{n - \frac{p_{\text{пар}}}{p_{Ar}}} => h_1' = H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

Распишем условие равенства давлений в перемычке. В левом сосуде это давление столба жидкости высотой h_1' плюс суммарное давление аргона и насыщенного водяного пара (что есть показания манометра), в правом – давление столба жидкости высотой h_2' и давление насыщенного пара над водой:

$$\rho_{\text{воды}}gh_1' + np_{Ar} = \rho_{\text{воды}}gh_2' + p_{\text{пар}} => \rho_{\text{воды}}g(h_2' - h_1') = np_{Ar} - p_{\text{пар}} => h_2' - h_1' = \frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}}g}$$

Откуда:

$$h_2' = \frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}}g} + H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

Количество молекул воды в сосуде остается постоянным. Изначально вся вода находилась только в жидком состоянии (M – масса молекулы воды):

$$N = \frac{\rho_{\text{воды}}}{M}SH$$

Затем – жидкая вода и пар в каждом из сосудов:

$$N = \frac{\rho_{\text{воды}}}{M}S(h_1' + h_2') + \frac{\rho_{\text{пара}}}{M}S(H - h_1' + H - h_2')$$

Приравняем и получаем:

$$\rho_{\text{воды}}H = \rho_{\text{воды}}(h_1' + h_2') + \rho_{\text{пара}}(2H - h_1' - h_2')$$

$$\rho_{\text{воды}}(H - h_1' - h_2') = \rho_{\text{пара}}(2H - h_1' - h_2')$$

Откуда выражаем высоту сосудов H:

$$\rho_{\text{воды}}H - \rho_{\text{воды}}(h_1' + h_2') = 2\rho_{\text{пара}}H - \rho_{\text{пара}}(h_1' + h_2')$$

$$\rho_{\text{воды}}(h_1' + h_2') - \rho_{\text{пара}}(h_1' + h_2') = H(\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}})$$

$$(h_1' + h_2')(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}) = H(\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}})$$

$$H = \frac{(h_1' + h_2')(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}{\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}}}$$

Далее подставляем ранее полученные выражения для h_1' и h_2':

$$h_1' = H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

$$h_2' = \frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}} g} + H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

$$h_1' + h_2' = \frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}} g} + 2H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

$$H = \frac{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}{\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}}}\left(\frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}} g} + 2H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{p_{Ar}n - p_{\text{пар}}}\right)\right)$$
$$= \frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}} g}\frac{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}{\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}}} + 2H\frac{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}{\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}}}\left(1 - \frac{p_{Ar}}{p_{Ar}n - p_{\text{пар}}}\right)$$

$$H\left(1 - 2\frac{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}{\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}}}\left(1 - \frac{p_{Ar}}{p_{Ar}n - p_{\text{пар}}}\right)\right) = \frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}} g}\frac{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}{\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}}}$$

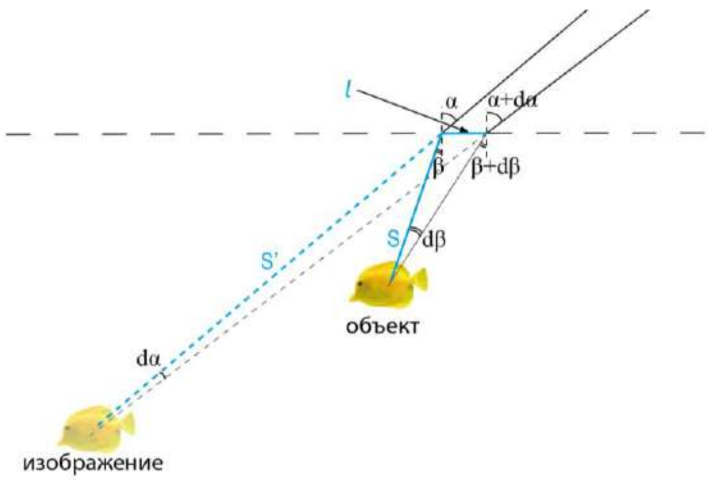
Ответ:

$$H = \frac{\left(\frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}} g}\frac{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}{\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}}}\right)}{\left(1 - 2\frac{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}{\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}}}\left(1 - \frac{p_{Ar}}{p_{Ar}n - p_{\text{пар}}}\right)\right)} \approx \frac{\left(\frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}} g}\right)}{\left(1 - 2\left(1 - \frac{p_{Ar}}{p_{Ar}n - p_{\text{пар}}}\right)\right)}$$

Задача 2

Рыбак, стоящий на берегу водоема, наблюдает под углом α к вертикали рыбу, находящуюся под водой. Ему кажется, что рыба находится на глубине y'. Определите, на какой реальной глубине находится рыба. Коэффициент преломления воды в водоеме примите равным n, коэффициент преломления воздуха – единице. Расстояние от рыбы до рыбака много больше размера рыбы.

Решение:



Рыбу можно рассматривать как точечный источник света, излучающий во все стороны. При этом до рыбака доходит излучение в малом телесном угле. Поскольку для построения изображения необходимо два луча, то в плоской формулировке можно рассмотреть два крайних луча, попадающие в глаза рыбака, угол между которыми много меньше угла наблюдения, данного по условию.

На рисунке выше представлено, как человек наблюдает рыбу под водой, а также реальное положение рыбы. Здесь введены обозначения: α – угол наблюдения, β – угол преломления, dβ – малый угол между рассматриваемыми лучами, S, S' –расстояния до рыбы и до изображения по ходу лучей.

Из закона Снеллиуса найдем угол преломления:

$$\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha)}{n}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}}{n}$$

Также запишем закон Снеллиуса для угла α+dα:

$$\sin(\alpha + d\alpha) = n\sin(\beta + d\beta)$$

Распишем синус суммы:

$$\sin(\alpha + d\alpha) = n\sin(\beta + d\beta)$$

$$\sin(\alpha)\cos(d\alpha) + \cos(\alpha)\sin(d\alpha) = n(\sin(\beta)\cos(d\beta) + \cos(\beta)\sin(d\beta))$$

Учитывая первое выражение и малость углов $d\alpha$ и $d\beta$:

$$\cos(\alpha)\, d\alpha = n\cos(\beta)\, d\beta => \frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{n\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$$

Далее рассмотрим теорему синусов для двух треугольников, образующих основание *l* на границе раздела двух сред (смотри рисунок):

$$\frac{l}{\sin(d\beta)} = \frac{S}{\cos(\beta + d\beta)}$$

$$\frac{l}{\sin(d\alpha)} = \frac{S'}{\cos(\alpha + d\alpha)}$$

Выразим отношение *S/S'*:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\cos(\beta + d\beta)\sin(d\alpha)}{\cos(\alpha + d\alpha)\sin(d\beta)}$$

Преобразуем выражение, воспользовавшись соотношением для косинуса суммы, и учтем малость углов $d\alpha$ и $d\beta$:

$$\frac{S}{S'} = \frac{(\cos(\beta)\cos(d\beta) - \sin(\beta)\sin(d\beta))\sin(d\alpha)}{(\cos(\alpha)\cos(d\alpha) - \sin(\alpha)\sin(d\alpha))\sin(d\beta)} = \frac{\cos(\beta)\, d\alpha}{\cos(\alpha)\, d\beta} = n\left(\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}\right)^2$$

Связь реальной глубины y с кажущейся y':

$$\frac{y}{y'} = \frac{S\cos(\beta)}{S'\cos(\alpha)} = n\left(\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}\right)^3 => y = y'n\left(\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}\right)^3 = y'\frac{(n^2 - \sin^2(\alpha))^{3/2}}{n^2\cos^3(\alpha)}$$

Задача 3

К металлическому кольцу радиуса $\boldsymbol{r}$ в диаметрально противоположных точках подключены электрические контакты, к которым подведено постоянное напряжение $\boldsymbol{V_0}$. Рассмотрите следующие ситуации:

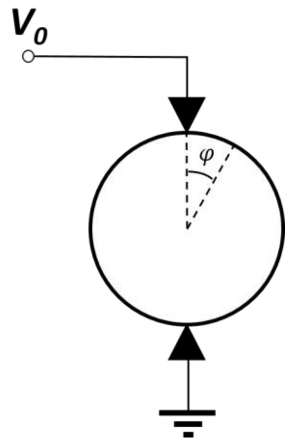
1) Кольцо представляет собой две спаянные на концах металлические проволоки одинаковой длины и толщины, но разных удельных сопротивлений $\boldsymbol{\rho_1}$ и $\boldsymbol{\rho_2}$.

Определите, как нужно ориентировать кольцо относительно контактов, чтобы выделяемая на колесе мощность была минимальной?

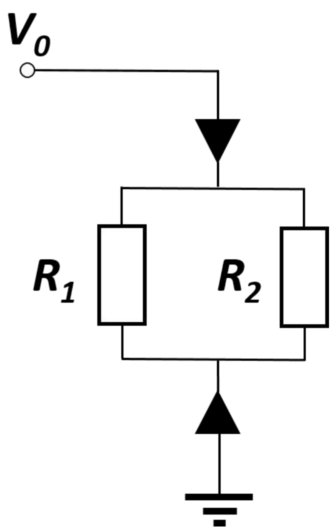
2) Кольцо сделано из проволоки, удельное сопротивление которой изменяется по длине. Кольцо изначально ориентировали относительно электрических контактов таким образом, что его удельное сопротивление меняется с углом $\boldsymbol{\varphi}$ (отсчитываемого от верхнего контакта, см. рисунок) как функция:

$$\rho(\varphi) = \rho_0(2 + (\cos(3\varphi))^2 + \sin(4\varphi)\sin(2\varphi))$$

В неподвижном состоянии при подведении напряжения $\boldsymbol{V_0}$ к контактам на кольце выделялась мощность $\boldsymbol{W_0}$. Определите среднюю за период мощность, выделяемую на кольце, если оно будет вращаться с циклической частотой $\boldsymbol{w}$?



Решение:



Вопрос 1:

В приведенной по условию электрической схеме кольцо представляет собой два параллельно подключенных сопротивления, как показано на рисунке.

Определим угол φ как угол поворота колеса относительно положения, когда контакты попадают ровно в места скрепления двух проволок. Из такого определения следует, что угол меняется в пределах от 0 до π. Тогда для каждого из сопротивлений можно записать:

$$R_1 = \rho_1\frac{\varphi r}{S} + \rho_2\frac{(\pi-\varphi)r}{S} = \frac{r}{S}\big(\rho_1\varphi + \rho_2(\pi-\varphi)\big)$$
$$= \frac{r}{s}(\varphi(\rho_1-\rho_2) + \pi\rho_2)$$

$$R_2 = \rho_2\frac{\varphi r}{S} + \rho_1\frac{(\pi-\varphi)r}{S} = \frac{r}{S}\big(\rho_2\varphi + \rho_1(\pi-\varphi)\big)$$
$$= \frac{r}{s}(\varphi(\rho_2-\rho_1) + \pi\rho_1)$$

Тогда общее сопротивление:

$$R_0 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{\frac{r}{S}(\varphi(\rho_1-\rho_2)+\pi\rho_2)(\varphi(\rho_2-\rho_1)+\pi\rho_1)}{\varphi(\rho_1-\rho_2)+\pi\rho_2+\varphi(\rho_2-\rho_1)+\pi\rho_1}$$

Математические преобразования:

$$R_0 = \frac{\frac{r}{S}(\varphi(\rho_1-\rho_2)+\pi\rho_2)(\varphi(\rho_2-\rho_1)+\pi\rho_1)}{\varphi(\rho_1-\rho_2)+\pi\rho_2+\varphi(\rho_2-\rho_1)+\pi\rho_1} = \frac{r}{S}\frac{(\varphi(\rho_1-\rho_2)+\pi\rho_2)(\varphi(\rho_2-\rho_1)+\pi\rho_1)}{\pi(\rho_1+\rho_2)}$$
$$= \frac{r}{S}\frac{(-\varphi^2(\rho_1-\rho_2)^2+\varphi\pi\rho_2(\rho_2-\rho_1)-\varphi\pi\rho_1(\rho_2-\rho_1)+\pi^2\rho_1\rho_2)}{\pi(\rho_1+\rho_2)}$$
$$= \frac{r}{S}\frac{(-\varphi^2(\rho_1-\rho_2)^2+\varphi\pi(\rho_1-\rho_2)^2+\pi^2\rho_1\rho_2)}{\pi(\rho_1+\rho_2)} = \frac{r}{S}\frac{(\varphi(\rho_1-\rho_2)^2(\pi-\varphi)+\pi^2\rho_1\rho_2)}{\pi(\rho_1+\rho_2)}$$

Таким образом, получаем выражение:

$$R_0 = \frac{r}{\pi S}\left[\varphi(\pi-\varphi)\frac{(\rho_1-\rho_2)^2}{\rho_1+\rho_2}+\frac{\pi^2\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\right]$$

Где первое слагаемое в скобках зависит от угла, а второе не зависит. Мощность, выделяемая на колесе, определяется как:

$$W = \frac{V_0^2}{R}$$

Следовательно, мощность будет минимальна, когда сопротивление будет максимально. Согласно полученному выражению это будет соответствовать положению $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. когда контакты приложены к серединам проволок. Максимальная же мощность будет тогда, когда контакты будут подведены к местам спая проволок.

Вопрос 2

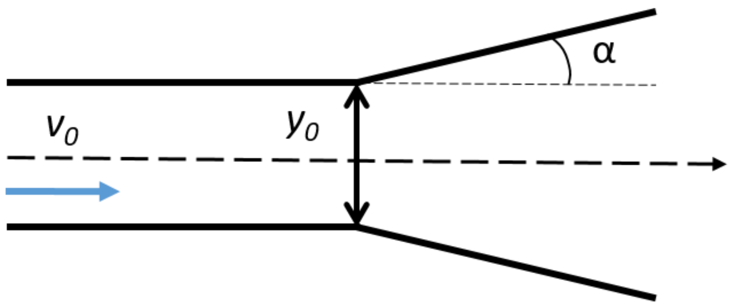
Рассмотрим поворот кольца на малый угол $d\alpha$ по часовой стрелке, такой, что на длине соответствующей дуги удельное сопротивление проволоки меняется незначительно (остается постоянным). Распишем, как с этим поворотом измениться сопротивление R_1:

$$dR_1 = \frac{\rho(-d\alpha)\cdot d\alpha \cdot r}{S} - \frac{\rho(\pi-d\alpha)\cdot d\alpha\cdot r}{S} = \frac{r\cdot d\alpha}{S}\big(\rho(-d\alpha)-\rho(\pi-d\alpha)\big) = 0$$

Соответственно, при повороте общее сопротивление колеса, составленное как два параллельно подключенных сегмента колеса, меняться не будет, и при вращении его с произвольной скоростью выделяемая мощность будет той же, что и при неподвижном колесе.

Задача 4

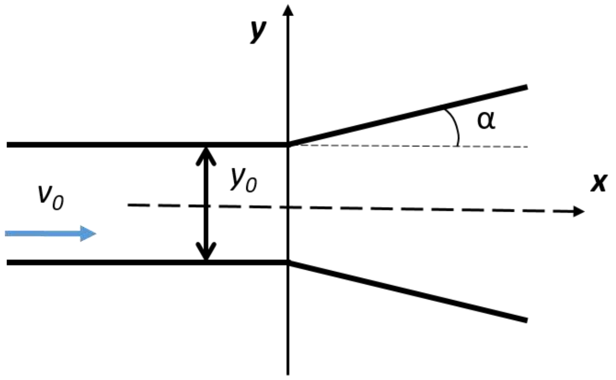
По речному каналу прямоугольного сечения плывет плот. В некоторой точке канал начинает линейно расширяться с расстоянием, угол, образуемый стенками канала с центральной линией равен α, глубина канала при этом остается постоянной. Плот вплывает в расширяющийся участок со скоростью v_0, ширина канала в этой точке составляет y_0.



1. Определите, с каким ускорением будет двигаться плот по расширяющемуся участку канала.
2. За какое время плот преодолеет расстояние L от точки начала расширяющегося участка канала.

Поток воды считайте стационарным и ламинарным, трением воды о стенки канала пренебречь. Плот движется вместе с водой со скоростью, равной скорости воды. Размерами плота по сравнению с шириной канала пренебрегите.

Решение:



Введем для удобства координатные оси, как показано на рисунке. Ширина канала в зависимости от координаты:

$$y(x) = x \cdot tg(\alpha) + \frac{y_0}{2}$$

Постоянство потока воды по каналу для стационарного течения (течение ламинарное, сколько вошло воды, столько и вышло, равенство объемом воды в единицу времени через любое сечение канала):

$$S(x)v(x)\Delta t = S_0 v_0 \Delta t$$

$$S(x)v(x) = S_0 v_0$$

Где $S_0 = y_0 h$ – площадь сечения канала в точке отсчета, $S(x) = 2y(x)h$ – площадь сечения на расстоянии x от начала расширяющегося участка. Тогда:

$$2y(x)v(x) = y_0 v_0$$

Отсюда можно найти распределение скорости воды по длине канала:

$$v(x) = \frac{y_0 v_0}{2y(x)} = \frac{y_0 v_0}{2x \cdot tg(\alpha) + y_0}$$

Плот движется вместе с водой со скоростью, равной скорости воды. Ускорение по определению есть полная производная скорости по времени (с учетом зависимости координаты плота от времени), поэтому для ускорения плота нужно продифференцировать полученное выражение для скорости воды в канале:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Полученное нами выражение для скорости напрямую от времени не зависит, но зависит от координаты x, которая здесь есть координата плота, зависящая от времени. Поэтому берем производную:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{y_0 v_0}{(2x \cdot tg(\alpha) + y_0)^2} 2tg(\alpha) \cdot \frac{dx}{dt}$$

А $\frac{dx}{dt}$ есть ни что иное как скорость, выражение для которого мы получили ранее. Поэтому:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{2y_0 v_0 tg(\alpha)}{(2x \cdot tg(\alpha) + y_0)^2} \cdot v(x) = -\frac{2y_0 v_0 tg(\alpha)}{(2x \cdot tg(\alpha) + y_0)^2} \cdot \frac{y_0 v_0}{2x \cdot tg(\alpha) + y_0} = -\frac{2y_0^2 v_0^2 tg(\alpha)}{(2x \cdot tg(\alpha) + y_0)^3}$$

И ответ на вопрос 1 получается:

$$a = -\frac{2y_0^2 v_0^2 tg(\alpha)}{(2x \cdot tg(\alpha) + y_0)^3}$$

Допустим, что с этой точки он прошел расстояние Δx за время Δt, при этом интервалы столь малые, что изменением скорости можно пренебречь. Тогда можно записать:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v(x)}$$

Полное время движения будет, соответственно, находиться из суммирования этих интервалов. Ввиду малости выбранных интервалов, можно записать:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v(x)}$$

Откуда время от координаты есть первообразная от величины $1/v(x)$:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v(x)} = \frac{2x \cdot tg(\alpha) + y_0}{y_0 v_0} = 2x \cdot \frac{tg(\alpha)}{y_0 v_0} + \frac{1}{v_0}$$

По правилу нахождения первообразных имеем:

$$t = x^2 \frac{tg(\alpha)}{y_0 v_0} + \frac{x}{v_0}$$

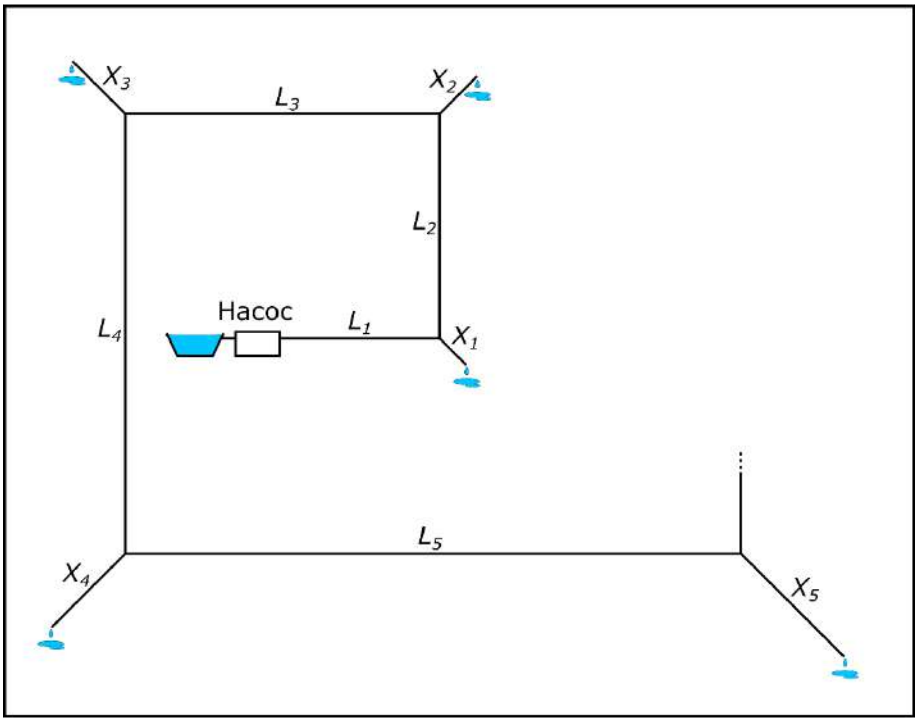
В начальный момент времени плот находится в начале координат, поэтому константа равна нулю. Подставляем данную в условии длину и получаем ответ:

$$t = L^2 \frac{tg(\alpha)}{y_0 v_0} + \frac{L}{v_0}$$

Задача 5

На рисунке представлена бесконечная система капиллярных трубок, заполненная жидкостью с вязкостью $\boldsymbol{\eta}$. В центре расположен насос, который создаёт в начале первой трубки давление, превышающее атмосферное на величину $\boldsymbol{p_0}$. Первая трубка имеет длину $\boldsymbol{L_1}$, и на её конце трубопровод разветвляется: начитается вторая трубка длиной $\boldsymbol{L_2}$, а также ответвляется трубка длиной $\boldsymbol{X_1}$, по которой жидкость вытекает во внешнее пространство. Каждая последующая трубка длиннее аналогичной в $\boldsymbol{k}$ раз: $\boldsymbol{L_{i+1} = k * L_i}, \boldsymbol{X_{i+1} = k * X_i}$. Найдите расход жидкости, выливающейся во внешнее пространство из трубки длиной $\boldsymbol{X_N}$. Диаметр всех трубок одинаковый и равен $\boldsymbol{D}$. Считайте, что потерей давления в точках ветвления трубопровода можно пренебречь по сравнению с потерей давления в отдельной трубке, а для связи расхода жидкости $\boldsymbol{Q_{tube}}$ и изменения давления на концах отдельной трубки $\boldsymbol{\Delta p}$ справедлив закон Пуазёйля:

$$Q_{tube} = \frac{\pi\, D_{tube}^4\, \Delta p}{128\, \eta\, L_{tube}}$$



Решение:

По аналогии с электрическими цепями, можно ввести гидравлическое сопротивление $H = \frac{128\, \eta\, L_{tube}}{\pi\, D_{tube}^4}$. Таким образом, для капиллярных трубок справедлив «гидравлический» закон Ома:

$$\Delta p = HQ$$

где расход жидкости Q – аналог электрического тока, а перепад давления Δp – аналог разности потенциалов. Для гидравлических сопротивлений справедливы формулы последовательного и параллельного соединения. Также справедливо, что суммарный расход жидкости, втекающей в точку ветвления равен суммарному расходу вытекающей из этой точки жидкости.

Гидравлическое сопротивление разных трубок будут вычисляться соответственно как

$$H_i = \frac{128\, \eta\, k^{i-1} L_1}{\pi\, D^4} = k^{i-1} H_1$$

$$h_i = \frac{128\, \eta\, k^{i-1} X_1}{\pi\, D^4} = k^{i-1} h_1$$

Данная аналогия позволяет перейти к эквивалентной задаче о цепочке электрических сопротивлений: $Q \to I, \Delta p \to \Delta U, H_i \to R_i, h_i \to r_i$. Электрическая схема получается следующей:

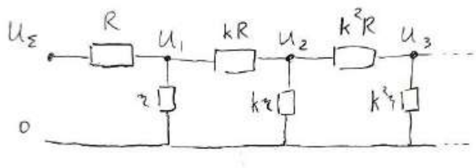


Рис.2 Эквивалентная электрическая схема

Так как все трубки ***X***ᵢ оканчиваются внешним пространством, то можно считать, что все они идут в одну точку с нулевым относительным давлением. Поэтому на электрической схеме они соединены проводником. Найдём токи I_i, текущие через сопротивления r_i (которые есть расход жидкости, уходящий через трубки X_i во внешнее пространство):

$$I_i = \frac{U_i}{k^{i-1}r}$$

$$U_\Sigma - U_1 = I_\Sigma R$$

$$U_1 = U_\Sigma - I_\Sigma R = U_\Sigma\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)$$

$$U_2 - ?$$

Рассмотрим часть схемы правее точки, где наблюдается U_1. Можно заметить, что это такая же электрическая схема как исходная, только номиналы всех резисторов в ***k*** раз больше (рис.3). Сопротивление такой схемы kR_Σ (формально суммарное сопротивление можно искать, используя формулы для последовательного и параллельного соединений резисторов, и общий множитель ***k*** в них всегда можно будет вынести за скобки).

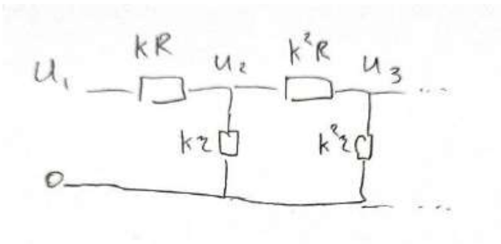


Рис.3 Часть схемы правее первой точки ветвления

Тогда аналогично найдём

$$U_2 = U_1\left(1 - \frac{kR}{kR_\Sigma}\right) = U_1\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)$$

Обобщая, можно написать

$$U_i = U_{i-1}\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right) = U_\Sigma\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)^i$$

$$I_i = \frac{U_i}{k^{i-1}r} = \frac{U_\Sigma}{k^{i-1}r}\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)^i$$

Осталось только выразить R_Σ через известные величины. Схему с рис.2 можно перерисовать следующим образом (рис.4)

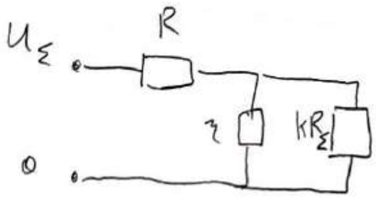


Рис.4 Представление схемы на рис.2, где часть правее первого ветвления объединена в kR_Σ

$$R_\Sigma = R + \frac{krR_\Sigma}{r + kR_\Sigma}$$

$$R_\Sigma r + kR_\Sigma^2 - Rr - kR_\Sigma R - krR = 0$$

$$kR_\Sigma^2 + (r - kR)R_\Sigma - rR(k+1) = 0$$

$$R_\Sigma = \frac{1}{2k}\left(kR - r + \sqrt{(r-kR)^2 + 4k(k+1)rR}\right)$$

(из двух корней выбираем тот, что с плюсом, так как R_Σ – положительная величина).

Тогда $I_N = \frac{U_\Sigma}{k^{N-1}r}\left(1 - \frac{2kR}{kR - r + \sqrt{(r-kR)^2+4k(k+1)rR}}\right)^N = \frac{kU_\Sigma}{r}\left(\frac{1}{k} - \frac{2R}{kR-r+\sqrt{(r-kR)^2+4k(k+1)rR}}\right)^N$

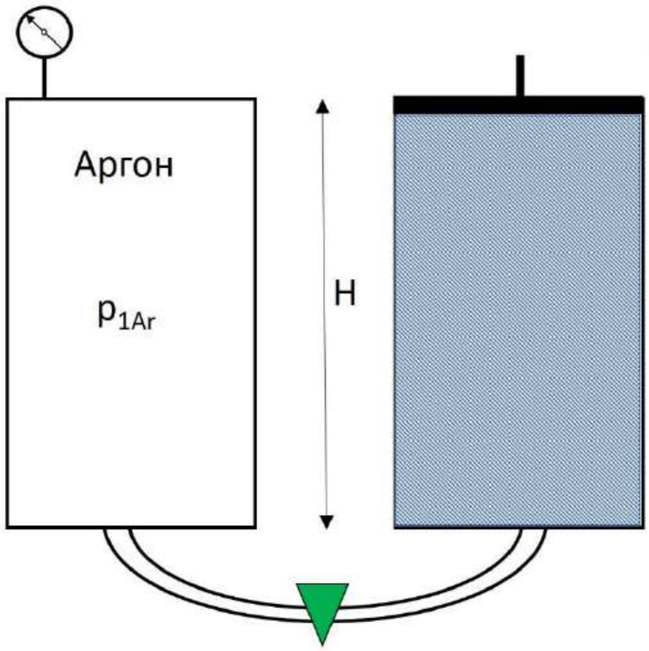
Так как $R \to H \sim L$, $r \to h \sim X$ и $\frac{h}{H} = \frac{X}{L}$, то в скобках остаются только X и L:

$$Q_N = \frac{\pi D^4 k\Delta p}{128\,\eta\,X_1}\left(\frac{1}{k} - \frac{2L_1}{kL_1 - X_1 + \sqrt{(X_1 - kL_1)^2 + 4k(k+1)X_1L_1}}\right)^N$$

Вариант 2

Задача 1

Два одинаковых цилиндрических сосуда герметично соединены у дна тонкой перемычкой и расположены в камере, в которой поддерживается постоянное давление p_0. В перемычку встроен кран-натекатель, который изначально закрыт. Один из сосудов запаян и полностью заполнен аргоном, другой заполнен водой и закрыт подвижным невесомым поршнем, двигающимся без трения. В заполненном аргоном сосуде установлен манометр, позволяющий измерять давление газа в сосуде. Кран открывают, вода начинает медленно перетекать. После установления равновесия манометр показывал давление, в n раз большее начального. Определите высоту запаянного сосуда. Температура в сосудах остается постоянной. Ускорение свободного падения, плотность воды, плотность и давление насыщенных паров воды при данной температуре считайте известными. Растворением аргона в воде пренебречь.



Решение

После открытия крана вода будет медленно перетекать из правового сосуда в левый, высота столба жидкости в нем будет увеличиваться, объем, предоставляемый аргону, будет уменьшаться, его давление будет увеличиваться. Поскольку перетекание медленное, то со свободной поверхности воды будет происходить испарение, и к давлению аргона будет прибавляться давление паров воды. По той же причине в конце пары будут насыщенными.

В правом же сосуде высота столба жидкости будет уменьшаться, подвижный поршень будет опускаться вместе с уровнем жидкости. Перетекание прекратится, когда давление в перемычке уравновеситься.

Введем обозначения, характеризующие конечное состояние: h_1', h_2' – новые высоты столбов жидкости в сосудах, p_{Ar1}' – новое парциальное давление аргона в левом сосуде, H – высота сосуда. Поскольку процесс изотермический, то для аргона можно записать:

$$p_{Ar}SH = p_{Ar}'S(H - h_1') => p_{Ar}' = p_{Ar}\frac{H}{H - h_1'}$$

При этом, показания манометра в конце есть сумма нового парциального давления аргона и давления насыщенного водяного пара:

$$\frac{p_{Ar}' + p_{\text{пар}}}{p_{Ar}} = n => p_{Ar}' = np_{Ar} - p_{\text{пар}}$$

Откуда:

$$np_{Ar} - p_{\text{пар}} = p_{Ar}\frac{H}{H - h_1'} => H - h_1' = \frac{H}{n - \frac{p_{\text{пар}}}{p_{Ar}}} => h_1' = H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

Распишем условие равенства давлений в перемычке. В левом сосуде это давление столба жидкости высотой h_1' плюс суммарное давление аргона и насыщенного водяного пара (что есть показания манометра), в правом – давление столба жидкости высотой h_2'

$$\rho_{\text{воды}}gh_1' + np_{Ar} = \rho_{\text{воды}}gh_2' + p_0 => \rho g(h_2' - h_1') = np_{Ar} - p_0 => h_2' - h_1' = \frac{np_{Ar} - p_0}{\rho_{\text{воды}}g}$$

Откуда:

$$h_2' = \frac{np_{Ar} - p_0}{\rho_{\text{воды}} g} + H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

Количество молекул воды в сосуде остается постоянным. Изначально вся вода находилась только в жидком состоянии (M – масса молекулы воды):

$$N = \frac{\rho_{\text{воды}}}{M} SH$$

Затем – жидкая вода в левом и правом сосуде и пар в левом сосуде:

$$N = \frac{\rho_{\text{воды}}}{M} S(h_1' + h_2') + \frac{\rho_{\text{пара}}}{M} S(H - h_1')$$

Приравняем и получаем:

$$\rho_{\text{воды}} H = \rho_{\text{воды}}(h_1' + h_2') + \rho_{\text{пара}}(H - h_1')$$

$$\rho_{\text{воды}}(H - h_1' - h_2') = \rho_{\text{пара}}(H - h_1')$$

Откуда выражаем высоту сосудов H:

$$\rho_{\text{воды}} H - \rho_{\text{воды}}(h_1' + h_2') = \rho_{\text{пара}} H - \rho_{\text{пара}} h_1'$$

$$\rho_{\text{воды}}(h_1' + h_2') - \rho_{\text{пара}} h_1' = H(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})$$

$$h_1'\left(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}\right) + \rho_{\text{воды}} h_2' = H(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})$$

$$H = \frac{h_1'\left(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}\right) + \rho_{\text{воды}} h_2'}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}} = h_1' + \frac{\rho_{\text{воды}} h_2'}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}$$

Далее подставляем ранее полученные выражения для h_1' и h_2':

$$h_1' = H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

$$h_2' = \frac{np_{Ar} - p_0}{\rho_{\text{воды}} g} + H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

$$H = h_1' + \frac{\rho_{\text{воды}} h_2'}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}} = H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right) + \left(\frac{np_{Ar} - p_0}{\rho_{\text{воды}} g} + H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)\right)\frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}} =$$

$$= H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right) + \frac{np_{Ar} - p_0}{g(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})} + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}} H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

$$= H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)\left(1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\right) + \frac{np_{Ar} - p_0}{g(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}$$

$$H\left(1 - \left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)\left(1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\right)\right) = \frac{np_{Ar} - p_0}{g(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}$$

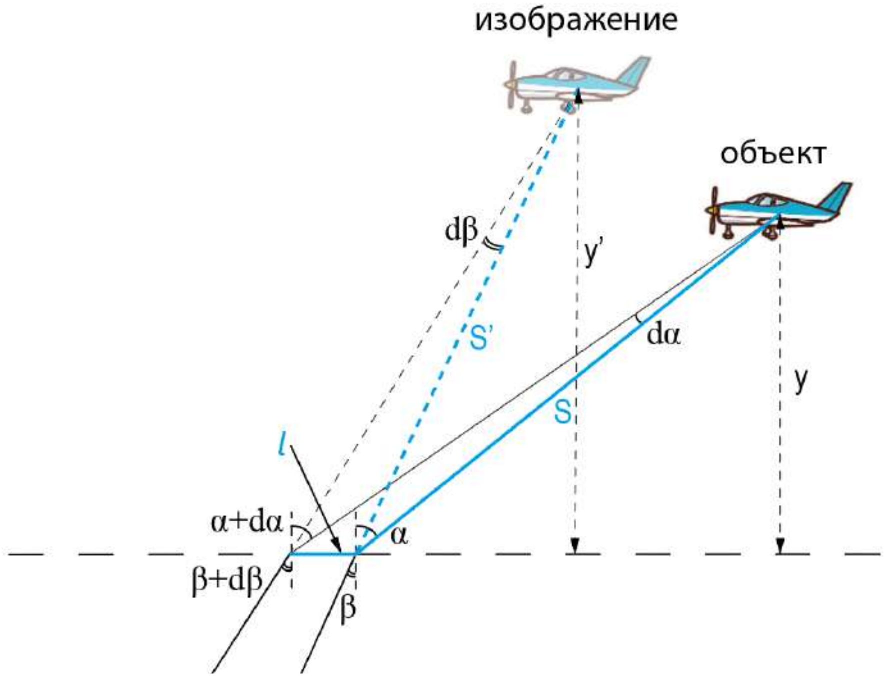
$$H = \frac{np_{Ar} - p_0}{g(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}\left(1 - \left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)\left(1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\right)\right)^{-1}$$

$$H = \frac{np_{Ar} - p_0}{g(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}\left(1 - \left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)\left(1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\right)\right)^{-1}$$
$$\approx \frac{np_{Ar} - p_0}{g(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}\left(1 - 2\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)\right)^{-1}$$

Задача 2

Водолаз, находящийся под водой, наблюдает летящий в небе самолет. Ему кажется, что самолет все время летит на одной и той же высоте y'. Коэффициент преломления воды равен n, коэффициент преломления воздуха считать равным единице. Определите:
1. Как зависит истинная высота самолета от угла наблюдения водолаза (угол наблюдения отсчитывайте от вертикали)?
2. При каких углах наблюдения самолет остается видимым для водолаза?

Решение



Самолет можно рассматривать как точечный источник света, излучающий во все стороны. При этом до водолаза доходит излучение в малом телесном угле. Поскольку для построения изображения необходимо два луча, то в плоской формулировке можно рассмотреть два крайних луча, попадающие в глаза водолаза, угол между которыми много меньше угла наблюдения.

На рисунке выше представлено, как водолаз наблюдает самолет над водой, а также реальное положение самолета. Здесь введены обозначения: α – угол падения, β – угол преломления, dβ – малый угол между рассматриваемыми лучами, S, S' –расстояния до самолета и до изображения по ходу лучей.

Из закона Снеллиуса найдем угол преломления:

$$\sin(\alpha) = n\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - n^2\sin^2(\beta)}$$

Также запишем закон Снеллиуса для угла α+dα:

$$\sin(\alpha + d\alpha) = n\sin(\beta + d\beta)$$

Распишем синус суммы:

$$\sin(\alpha)\cos(d\alpha)+\cos(\alpha)\sin(d\alpha)=n(\sin(\beta)\cos(d\beta)+\cos(\beta)\sin(d\beta))$$

Учитывая первое выражение и малость углов $d\alpha$ и $d\beta$:

$$\cos(\alpha)\,d\alpha=n\cos(\beta)\,d\beta$$

$$\frac{d\alpha}{d\beta}=\frac{n\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$$

Далее рассмотрим теорему синусов для двух треугольников, образующих основание *l* на границе раздела двух сред (смотри рисунок):

$$\frac{l}{\sin(d\beta)}=\frac{S'}{\cos(\beta+d\beta)}$$

$$\frac{l}{\sin(d\alpha)}=\frac{S}{\cos(\alpha+d\alpha)}$$

$$\frac{S}{S'}=\frac{\cos(\alpha+d\alpha)\sin(d\beta)}{\cos(\beta+d\beta)\sin(d\alpha)}$$

Преобразуем выражение, воспользовавшись соотношением для косинуса суммы, и учтем малость углов $d\alpha$ и $d\beta$:

$$\frac{S}{S'}=\frac{(\cos(\alpha)\cos(d\alpha)-\sin(\alpha)\sin(d\alpha))\sin(d\beta)}{(\cos(\beta)\cos(d\beta)-\sin(\beta)\sin(d\beta))\sin(d\alpha)}=\frac{\cos(\alpha)\,d\beta}{\cos(\beta)\,d\alpha}=\frac{1}{n}\left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}\right)^2$$

Отношение истинной высоты y к кажущейся y':

$$\frac{y}{y'}=\frac{S\cos(\alpha)}{S'\cos(\beta)}=\frac{1}{n}\left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}\right)^3$$

$$y=\frac{y'}{n}\left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}\right)^3=\frac{y'}{n}\left(\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2(\beta)}}{\cos(\beta)}\right)^3$$

Предельные углы наблюдения самолета соответствует бесконечному удалению объекта от водолаза, то есть когда угол преломления равен углу полного внутреннего отражения (α=90°). Соответственно, угол наблюдения меняется от 0° до β_{crit} (или от -β_{crit} до β_{crit}).

$$\beta_{crit}=\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$$

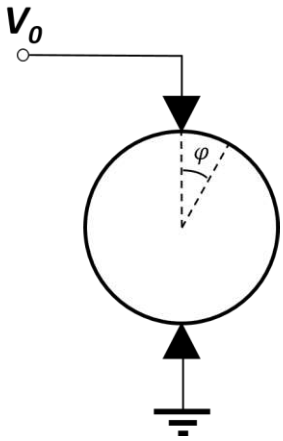
Задача 3

К металлическому кольцу радиуса $\boldsymbol{r}$ в диаметрально противоположных точках подключены электрические контакты, к которым подведено постоянное напряжение $\boldsymbol{V_0}$. Рассмотрите следующие ситуации:

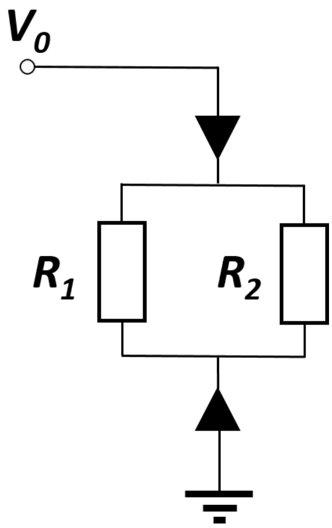
1) Кольцо представляет собой две спаянные на концах металлические проволоки одинаковой длины и толщины, но разных удельных сопротивлений $\boldsymbol{\rho_1}$ и $\boldsymbol{\rho_2}$. Определите, как нужно ориентировать кольцо относительно контактов, чтобы выделяемая на колесе мощность была максимальной?
2) Кольцо сделано из проволоки, удельное сопротивление которой изменяется по длине. Кольцо изначально ориентировали относительно электрических контактов таким образом, что его удельное сопротивление меняется с углом $\boldsymbol{\varphi}$ (отсчитываемого от верхнего контакта, см. рисунок) как функция:

$$\rho(\varphi)=\rho_0(3-(\cos(\varphi))^2\sin(4\varphi)+(\sin(3\varphi))^2)$$

В неподвижном состоянии при подведении напряжения $\boldsymbol{V_0}$ к контактам на кольце выделялась мощность $\boldsymbol{W_0}$. Определите среднюю за период мощность, выделяемую на кольце, если оно будет вращаться с циклической частотой $\boldsymbol{w}$?



Решение:



Вопрос 1:

В приведенной по условию электрической схеме кольцо представляет собой два параллельно подключенных сопротивления, как показано на рисунке.

Определим угол φ как угол поворота колеса относительно положения, когда контакты попадают ровно в места скрепления двух проволок. Из такого определения следует, что угол меняется в пределах от 0 до π. Тогда для каждого из сопротивлений можно записать:

$$R_1 = \rho_1 \frac{\varphi r}{S} + \rho_2 \frac{(\pi - \varphi) r}{S} = \frac{r}{S}\big(\rho_1 \varphi + \rho_2 (\pi - \varphi)\big) = \frac{r}{s}(\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi \rho_2)$$

$$R_2 = \rho_2 \frac{\varphi r}{S} + \rho_1 \frac{(\pi - \varphi) r}{S} = \frac{r}{S}\big(\rho_2 \varphi + \rho_1 (\pi - \varphi)\big) = \frac{r}{s}(\varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi \rho_1)$$

Тогда общее сопротивление:

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\frac{r}{S}(\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi\rho_2)(\varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi\rho_1)}{\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi\rho_2 + \varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi\rho_1}$$

Математические преобразования:

$$R_0 = \frac{\frac{r}{S}(\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi\rho_2)(\varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi\rho_1)}{\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi\rho_2 + \varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi\rho_1} = \frac{r}{S}\frac{(\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi\rho_2)(\varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi\rho_1)}{\pi(\rho_1 + \rho_2)}$$
$$= \frac{r}{S}\frac{(-\varphi^2(\rho_1 - \rho_2)^2 + \varphi\pi\rho_2(\rho_2 - \rho_1) - \varphi\pi\rho_1(\rho_2 - \rho_1) + \pi^2\rho_1\rho_2)}{\pi(\rho_1 + \rho_2)}$$
$$= \frac{r}{S}\frac{(-\varphi^2(\rho_1 - \rho_2)^2 + \varphi\pi(\rho_1 - \rho_2)^2 + \pi^2\rho_1\rho_2)}{\pi(\rho_1 + \rho_2)} = \frac{r}{S}\frac{(\varphi(\rho_1 - \rho_2)^2(\pi - \varphi) + \pi^2\rho_1\rho_2)}{\pi(\rho_1 + \rho_2)}$$

Таким образом, получаем выражение:

$$R_0 = \frac{r}{\pi S}\left[\varphi(\pi-\varphi)\frac{(\rho_1-\rho_2)^2}{\rho_1+\rho_2}+\frac{\pi^2\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\right]$$

Где первое слагаемое в скобках зависит от угла, а второе не зависит. Мощность, выделяемая на колесе, определяется как:

$$W = \frac{V_0^2}{R}$$

Следовательно, мощность будет минимальна, когда сопротивление будет максимально. Согласно полученному выражению это будет соответствовать положению $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. когда контакты приложены к серединам проволок. Максимальная же мощность будет тогда, когда контакты будут подведены к местам спая проволок.

Вопрос 2

Рассмотрим поворот кольца на малый угол $d\alpha$ по часовой стрелке, такой, что на длине соответствующей дуги удельное сопротивление проволоки меняется незначительно (остается постоянным). Распишем, как с этим поворотом измениться сопротивление R_1:

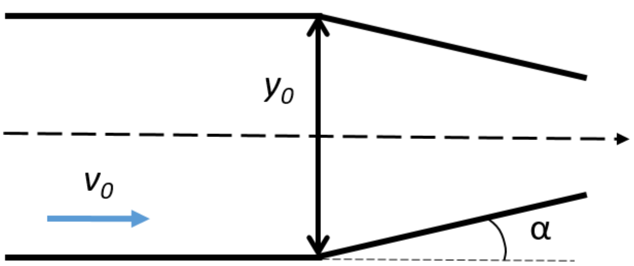
$$dR_1 = \frac{\rho(-d\alpha)\cdot d\alpha\cdot r}{S}-\frac{\rho(\pi-d\alpha)\cdot d\alpha\cdot r}{S} = \frac{r\cdot d\alpha}{S}\big(\rho(-d\alpha)-\rho(\pi-d\alpha)\big) = 0$$

Соответственно, при повороте общее сопротивление колеса, составленное как два параллельно подключенных сегмента колеса, меняться не будет, и при вращении его с произвольной скоростью выделяемая мощность будет той же, что и при неподвижном колесе.

Задача 4

По речному каналу прямоугольного сечения плывет плот. В некоторой точке канал начинает сужаться с расстоянием, глубина канала при этом остается постоянной. Плот вплывает в сужающийся участок со скоростью v_0, ширина канала в этой точке составляет y_0.

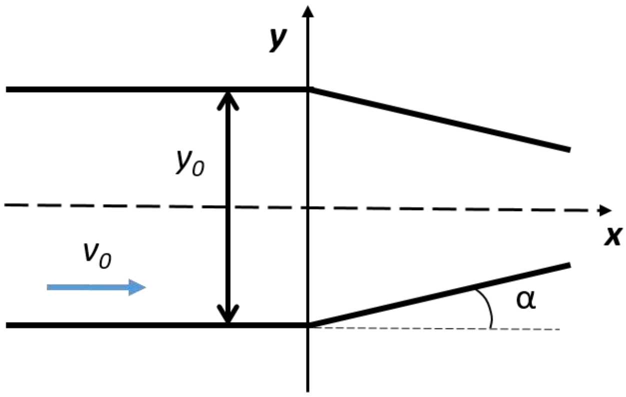
1. Канал сужается линейно с расстоянием, угол, образуемый стенками канала с центральной линией равен α (см. рисунок). Определите, с каким ускорением в этом случае будет двигаться плот по сужающемуся участку канала.



2. Определите, как должен сужаться канал, чтобы ускорение плота, плывущего по сужающемуся участку, было постоянным.

Поток воды считайте стационарным и ламинарным, трением воды о стенки канала пренебречь. Плот движется вместе с водой со скоростью, равной скорости воды. Размерами плота по сравнению с шириной канала пренебрегите.

Решение



Введем для удобства координатные оси, как показано на рисунке. Ширина канала в зависимости от координаты:

$$y(x) = -x \cdot tg(\alpha) + \frac{y_0}{2}$$

Постоянство потока воды по каналу для стационарного течения (течение ламинарное, сколько вошло воды, столько и вышло, равенство объемом воды в единицу времени через любое сечение канала):

$$S(x)v(x)\Delta t = S_0 v_0 \Delta t$$

$$S(x)v(x) = S_0 v_0$$

Где $S_0 = y_0 h$ – площадь сечения канала в точке отсчета, $S(x) = 2y(x)h$ – площадь сечения на расстоянии x от начала сужающегося участка. Тогда:

$$2y(x)v(x) = y_0 v_0$$

Отсюда можно найти распределение скорости воды по длине канала:

$$v(x) = \frac{y_0 v_0}{2y(x)} = \frac{y_0 v_0}{-2x \cdot tg(\alpha) + y_0}$$

Плот движется вместе с водой со скоростью, равной скорости воды. Ускорение по определению есть полная производная скорости по времени (с учетом зависимости координаты плота от времени), поэтому для ускорения плота нужно продифференцировать полученное выражение для скорости воды в канале:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Полученное нами выражение для скорости напрямую от времени не зависит, но зависит от координаты x, которая здесь есть координата плота, зависящая от времени. Поэтому берем производную:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{y_0 v_0}{(-2x \cdot tg(\alpha) + y_0)^2}(-2tg(\alpha)) \cdot \frac{dx}{dt}$$

А $\frac{dx}{dt}$ есть ни что иное как скорость, выражение для которой мы получили ранее. Поэтому:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{2y_0 v_0 tg(\alpha)}{(-2x \cdot tg(\alpha) + y_0)^2} \cdot v(x) = \frac{2y_0 v_0 tg(\alpha)}{(-2x \cdot tg(\alpha) + y_0)^2} \cdot \frac{y_0 v_0}{-2x \cdot tg(\alpha) + y_0} = \frac{y_0^2 v_0^2 tg(\alpha)}{(-2x \cdot tg(\alpha) + y_0)^3}$$

И ответ на вопрос 1 получается:

$$a = \frac{y_0^2 v_0^2 tg(\alpha)}{(-2x \cdot tg(\alpha) + y_0)^3}$$

По условию вопроса 2 нам дано, что плот движется по каналу с постоянным ускорением. Значит, для его скорости и координаты выполняются соотношения:

$$v(t) = v_0 + at, x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Выразим время из соотношения для скорости:

$$t = \frac{v(x) - v_0}{a}$$

Подставим в соотношения для координаты и выполним простые преобразования:

$$x = v_0 \frac{v(x) - v_0}{a} + \frac{a}{2}\left(\frac{v(x) - v_0}{a}\right)^2 = v_0 \frac{v(x) - v_0}{a} + \frac{(v(x) - v_0)^2}{2a} == \frac{v(x)^2 - v_0^2}{2a}$$

Откуда:

$$v(x)^2 = 2ax + v_0^2 => v(x) = \sqrt{2ax + v_0^2}$$

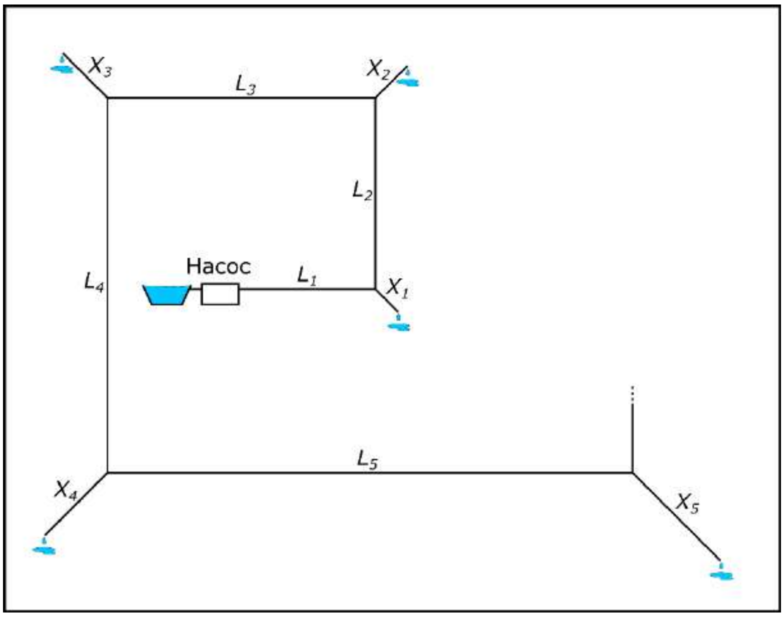
И для формы канала:

$$y(x) = \frac{y_0 v_0}{v(x)} = \frac{y_0 v_0}{\sqrt{2ax + v_0^2}} = \frac{y_0}{\sqrt{\frac{2ax}{v_0^2} + 1}}$$

Задача 5

На рисунке представлена бесконечная система капиллярных трубок, заполненная жидкостью с вязкостью $\boldsymbol{\eta}$. В центре расположен насос, который создаёт в начале первой трубки давление, превышающее атмосферное на величину $\boldsymbol{p}_0$. Первая трубка имеет длину $\boldsymbol{L_1}$, и на её конце трубопровод разветвляется: начитается вторая трубка длиной $\boldsymbol{L_2}$, а также ответвляется трубка длиной $\boldsymbol{X_1}$, по которой жидкость вытекает во внешнее пространство. Каждая последующая трубка длиннее аналогичной в некоторое неизвестное число раз: $\boldsymbol{L_{i+1}} = \boldsymbol{k} * \boldsymbol{L_i}, \boldsymbol{X_{i+1}} = \boldsymbol{k} * \boldsymbol{X_i}$. Известно, что если к насосу вместо рассматриваемой системы подключить одну трубку длиной $\boldsymbol{L_0}$, то общий расход жидкости через насос не изменится. Найдите расход жидкости, выливающейся во внешнее пространство из трубки длиной $\boldsymbol{X_N}$, Диаметр всех трубок одинаковый и равен $\boldsymbol{D}$. Считайте, что потерей давления в точках ветвления трубопровода можно пренебречь по сравнению с потерей давления в отдельной трубке, а для связи расхода жидкости $\boldsymbol{Q_{tube}}$ и изменения давления на концах отдельной трубки $\boldsymbol{\Delta p}$ справедлив закон Пуазёйля:

$$\boldsymbol{Q_{tube}} = \frac{\pi\, \boldsymbol{D_{tube}^4}\, \Delta \boldsymbol{p}}{128\, \boldsymbol{\eta}\, \boldsymbol{L_{tube}}}$$



Решение

По аналогии с электрическими цепями, можно ввести гидравлическое сопротивление $\boldsymbol{H} = \frac{128\, \boldsymbol{\eta}\, \boldsymbol{L_{tube}}}{\pi\, \boldsymbol{D_{tube}^4}}$. Таким образом, для капиллярных трубок справедлив «гидравлический» закон Ома:

$$\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{HQ}$$

где расход жидкости $\boldsymbol{Q}$ – аналог электрического тока, а перепад давления $\boldsymbol{\Delta p}$ – аналог разности потенциалов. Для гидравлических сопротивлений справедливы формулы последовательного и параллельного соединения. Также справедливо, что суммарный расход жидкости, втекающей в точку ветвления равен суммарному расходу вытекающей из этой точки жидкости.

Гидравлическое сопротивление разных трубок будут вычисляться соответственно как

$$\boldsymbol{H_i} = \frac{128\, \boldsymbol{\eta}\, \boldsymbol{k}^{i-1} \boldsymbol{L_1}}{\pi\, \boldsymbol{D}^4} = \boldsymbol{k}^{i-1} \boldsymbol{H}_1$$

$$\boldsymbol{h}_i = \frac{128\, \boldsymbol{\eta}\, \boldsymbol{k}^{i-1} \boldsymbol{X_1}}{\pi\, \boldsymbol{D}^4} = \boldsymbol{k}^{i-1} \boldsymbol{h}_1$$

Данная аналогия позволяет перейти к эквивалентной задаче о цепочке электрических сопротивлений: $\boldsymbol{Q} \to I, \Delta \boldsymbol{p} \to \Delta U, \boldsymbol{H}_i \to R_i, \boldsymbol{h}_i \to r_i$. Электрическая схема получается следующей:

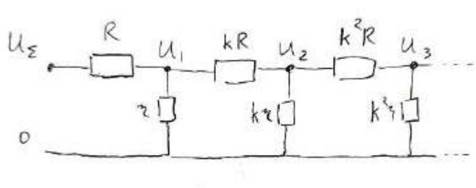


Рис.2 Эквивалентная электрическая схема

Так как все трубки $\boldsymbol{X}_i$ оканчиваются внешним пространством, то можно считать, что все они идут в одну точку с нулевым относительным давлением. Поэтому на электрической схеме они соединены проводником. Найдём токи I_i, текущие через сопротивления r_i (которые есть расход жидкости, уходящий через трубки X_i во внешнее пространство):

$$I_i = \frac{U_i}{k^{i-1} r}$$

$$U_\Sigma - U_1 = I_\Sigma R$$

$$U_1 = U_\Sigma - I_\Sigma R = U_\Sigma \left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)$$

$$U_2 - ?$$

Отметим, что общее сопротивление всей схемы нам надо и равно «сопротивлению» трубки длиной L_0.

Рассмотрим часть схемы правее точки, где наблюдается U_1. Можно заметить, что это такая же электрическая схема как исходная, только номиналы всех резисторов в ***k*** раз больше (рис.3). Сопротивление такой схемы kR_Σ (формально суммарное сопротивление можно искать, используя формулы для последовательного и параллельного соединений резисторов, и общий множитель ***k*** в них всегда можно будет вынести за скобки).

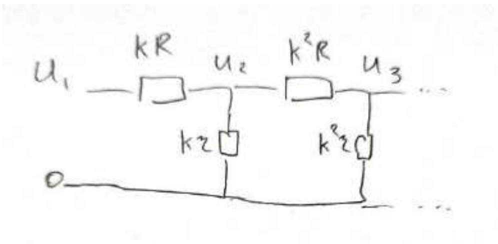


Рис.3 Часть схемы правее первой точки ветвления

Тогда аналогично найдём

$$U_2 = U_1 \left(1 - \frac{kR}{kR_\Sigma}\right) = U_1 \left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)$$

Обобщая, можно написать

$$U_i = U_{i-1} \left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right) = U_\Sigma \left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)^i$$

$$I_i = \frac{U_i}{k^{i-1} r} = \frac{U_\Sigma}{k^{i-1} r} \left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)^i$$

Осталось выразить ***k*** через известные величины. Схему с рис.2 можно перерисовать следующим образом (рис.4)

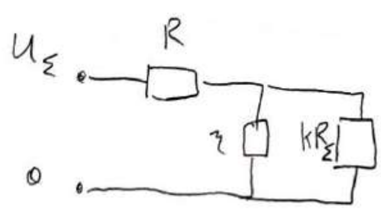


Рис.4 Представление схемы на рис.2, где часть правее первого ветвления объединена в kR_Σ

$$R_\Sigma = R + \frac{krR_\Sigma}{r + kR_\Sigma}$$

$$R_\Sigma r - Rr + kR_\Sigma (R_\Sigma - R - r) = 0$$

$$kR_\Sigma (R_\Sigma - R - r) = r(R - R_\Sigma)$$

$$k = \frac{r(R - R_\Sigma)}{R_\Sigma(R_\Sigma - R - r)}$$

$$k = -\frac{r(R_\Sigma - R)}{R_\Sigma(R_\Sigma - R - r)} = -\frac{r}{R_\Sigma\left(1 - \frac{r}{R_\Sigma - R}\right)}$$

Тогда

$$I_N = \frac{U_\Sigma}{k^{N-1}r}\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)^N = \frac{U_\Sigma}{r}\left(\frac{R_\Sigma(R_\Sigma - R - r)}{r(R - R_\Sigma)}\right)^{N-1}\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)^N$$

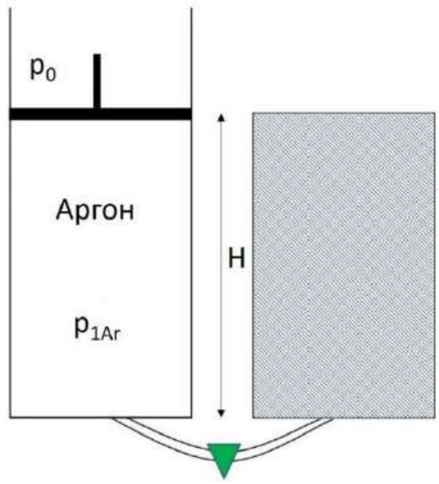
Так как $R \to H \sim L$, $R_\Sigma \to H_\Sigma \sim L_0$, $r \to h \sim X$ и $\frac{h}{H} = \frac{X}{L}$, $\frac{H_\Sigma}{H} = \frac{L_0}{L}$, то в скобках остаются только X, L и L_0.

$$Q_N = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128\,\eta\, X_1}\left(\frac{L_0(L_0 - L_1 - X_1)}{X_1(L_1 - L_0)}\right)^{N-1}\left(1 - \frac{L_1}{L_0}\right)^N$$

Вариант 3

Задача 1

Два сосуда одинакового сечения герметично соединены у дна тонкой перемычкой и расположены в камере, в которой поддерживается постоянное давление p_0. В перемычку встроен кран-натекатель, который изначально закрыт. Один из сосудов запаян и полностью заполнен водой, его высота H. Другой сосуд заполнен аргоном и закрыт тонким невесомым герметичным поршнем, способным двигаться без трения. Изначально поршень находится вровень с высотой запаянного сосуда. Кран открывают, вода начинает медленно перетекать. После установления равновесия разность уровней воды в сосудах составила h_x. Определите, на сколько поднялся поршень относительно первоначального уровня. Температура в сосудах остается постоянной. Ускорение свободного падения, плотность воды и давление насыщенных паров воды при данной температуре считайте известными. Растворением аргона в воде пренебречь.



Решение

После открытия крана вода будет медленно перетекать из правового сосуда в левый. Высота столба жидкости в правом сосуде будет уменьшаться, освобождающийся объем будет заполняться насыщенным паром по мере испарения воды. Так как перетекание медленное, пары будут успевать достигать насыщенного состояния.

В левом сосуде высота столба жидкости будет увеличиваться, при этом поршень будет подниматься, давление газа под ним будет оставаться постоянным. Однако, поскольку перетекание медленное, то вода в левом сосуде также будет испаряться. Перетекание прекратится, когда давление в перемычке будет уравновешено. В этом состоянии под поршнем будут аргон и насыщенный водяной пар.

Запишем условие равновесия поршня в конечном состоянии:

$$p_0 = p'_{Ar} + p_{\text{пар}}$$

Для конечного давления аргона через уравнение Менделеева-Клапейрона с учетом постоянной температуры можно записать (начальное давление аргона равно давлению в камере $p_0 = p_{Ar}$):

$$p_0 H = p'_{Ar}(H + \Delta h) => p'_{Ar}H + p_{\text{пар}}H = p'_{Ar}H + p'_{Ar}\Delta H => p'_{Ar} = p_{\text{пар}}\frac{H}{\Delta h}$$

Здесь $\Delta V = S\Delta h$ – изменение объема газа под поршнем. Отметим, что искомое изменение уровня поршня относительно начального есть сумма Δh и высоты столба жидкости в левом сосуде.

Обозначим новые высоты столбов жидкости в левом и правом сосудах как h'_1, h'_2, соответственно. Запишем условие равенства давлений в перемычке:

$$\rho_{\text{воды}} g h'_1 + p_0 = \rho_{\text{воды}} g h'_2 + p_{\text{пар}} => \rho_{\text{воды}} g h'_1 + p'_{Ar} = \rho_{\text{воды}} g h'_2 =>$$

$$\rho_{\text{воды}} g h'_1 + p_{\text{пар}}\frac{H}{\Delta h} = \rho_{\text{воды}} g h'_2$$

Количество молекул воды в сосуде остается постоянным. Изначально вся вода находилась в жидком состоянии было (M – масса молекулы воды):

$$N = \frac{\rho_{\text{воды}}}{M} SH$$

Потом часть воды осталась в жидком состоянии, а часть испарилась и стала водяным паром:

$$N = \frac{\rho_{\text{воды}}}{M} S(h'_1 + h'_2) + \frac{\rho_{\text{пара}}}{M} S(H + \Delta h + H - h'_2)$$

Приравниваем и получаем:

$$\rho_{\text{воды}}(H - h'_1 - h'_2) = \rho_{\text{пара}}(2H + \Delta h - h'_2)$$

Вспомним ранее полученное и учтем, что разность уровней воды дана пол условию:

$$p_{\text{пар}}\frac{H}{\Delta h} = \rho_{\text{воды}} g(h'_2 - h'_1) => \frac{p_{\text{пар}}H}{\rho_{\text{воды}} g h_x} = \Delta h$$

$$h'_2 - h'_1 = h_x => h'_2 = h_x + h_1{}'$$

Подставляем:

$$\rho_{\text{воды}}(H - 2h'_1 - h_x) = \rho_{\text{пара}}\left(2H + \frac{p_{\text{пар}}H}{\rho_{\text{воды}} g h_x} - h_x - h_1{}'\right)$$

$$\rho_{\text{воды}}(H-h_x)-\rho_{\text{пара}}\left(2H+\frac{p_{\text{пар}}H}{\rho_{\text{воды}}gh_x}-h_x\right)=h_1'\left(2\rho_{\text{воды}}-\rho_{\text{пара}}\right)$$

$$\frac{\rho_{\text{воды}}(H-h_x)-\rho_{\text{пара}}\left(2H+\frac{p_{\text{пар}}H}{\rho_{\text{воды}}gh_x}-h_x\right)}{2\rho_{\text{воды}}-\rho_{\text{пара}}}=h_1'$$

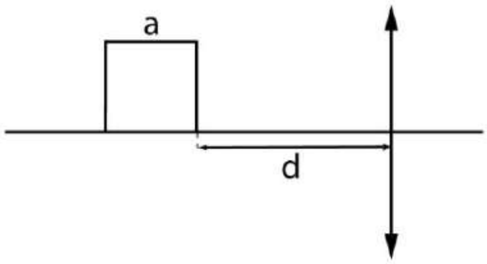
И изменение уровня поршня:

$$\Delta h+h_1'=\frac{p_{\text{пар}}H}{\rho_{\text{воды}}gh_x}+\frac{\rho_{\text{воды}}(H-h_x)-\rho_{\text{пара}}\left(2H+\frac{p_{\text{пар}}H}{\rho_{\text{воды}}gh_x}-h_x\right)}{2\rho_{\text{воды}}-\rho_{\text{пара}}}$$

Итого по условию даем: высоту сосудов, плотность воды, разность уровней, плотность насыщенных паров (давление паров можно выразить через плотность), температуру.

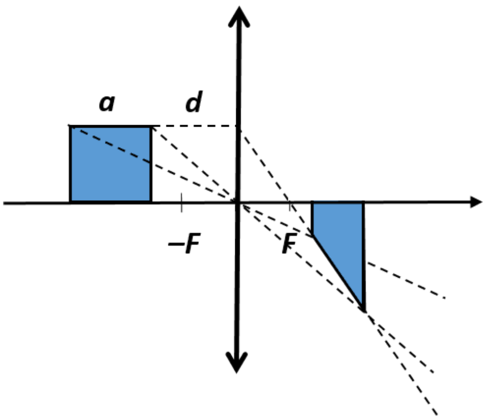
Задача 2

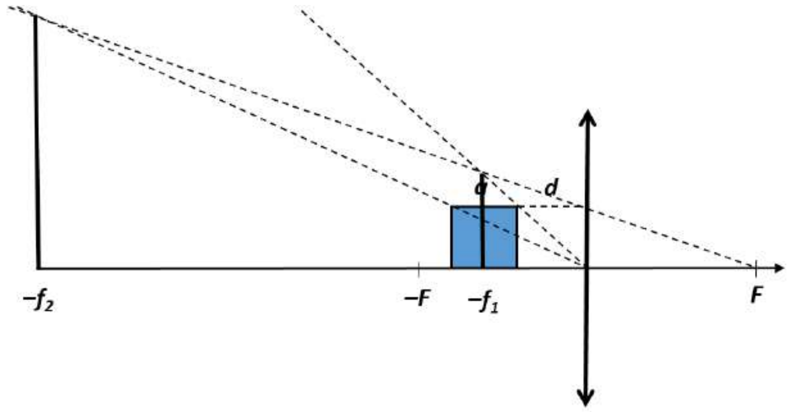
Квадрат со стороной a расположен перед тонкой собирающей линзой с фокусным расстоянием F. Как будет зависеть площадь изображения квадрата в зависимости от расстояния d до поверхности линзы? Приведите примерный график этой зависимости и объясните его вид.



Решение:

Построение изображение приведено на рисунках ниже. Если квадрат находится дальше фокусного расстояния, изображение будет действительным перевернутым. В обратном случае будет наблюдаться прямое мнимое изображение. Если квадрат расположен на фокусе, то изображение будет «разорвано» - часть квадрата будет давать мнимое изображение, часть – действительное.





. Сперва рассмотрим случай, когда объект располагается дальше фокусного расстояния линзы.

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}$$

F – фокусное расстояние линзы, *d* – расстояние от объекта до линзы, *f* – расстояние от линзы до изображения.

Строим изображение квадрата, начиная с ближней к линзе грани. По построению на рисунке видно, что изображение ближней грани будет находится дальше от линзы, чем изображение дальней грани.

Обозначим за f_1 координату дальнего изображения, f_2 – ближнего. Имеем:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f_1} => f_1=\frac{Fd}{d-F}$$

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d+a}+\frac{1}{f_2} => f_2=\frac{F(d+a)}{d+a-F}$$

Откуда можем найти высоту трапеции:

$$h=f_1-f_2=\frac{Fd}{d-F}-\frac{F(d+a)}{d+a-F}=\frac{F^2a}{(d-F)(d+a-F)}$$

Обозначим за y_2 высоту ближнего к линзе изображения. Из треугольников имеем:

$$\frac{a}{y_2}=\frac{a+d}{f_2}=\frac{(d+a)(d+a-F)}{F(d+a)}=\frac{d+a-F}{F} => y_2=\frac{Fa}{d+a-F}$$

По аналогии для y_1:

$$\frac{a}{y_1}=\frac{d}{f_1}=\frac{d(d-F)}{Fd}=\frac{d-F}{F} => y_1=\frac{Fa}{d-F}$$

Выражение для площади трапеции – полусумма оснований на высоту:

$$S=\frac{y_1+y_2}{2}h=\frac{1}{2}\left(\frac{Fa}{d+a-F}+\frac{Fa}{d-F}\right)\frac{F^2a}{(d-F)(d+a-F)}=\frac{1}{2}\frac{F^3a^2(2d+a-2F)}{(d-F)^2(d+a-F)^2}$$

Рассмотрим случай, когда объект расположен ближе фокуса.

Выражение для высоты в точности то же.

Обозначим за y_1 высоту ближнего к линзе изображения. Из треугольников имеем:

$$\frac{a}{y_1}=\frac{d}{f_1}=\frac{d(F-d)}{Fd}=\frac{F-d}{F} => y_1=\frac{Fa}{F-d}$$

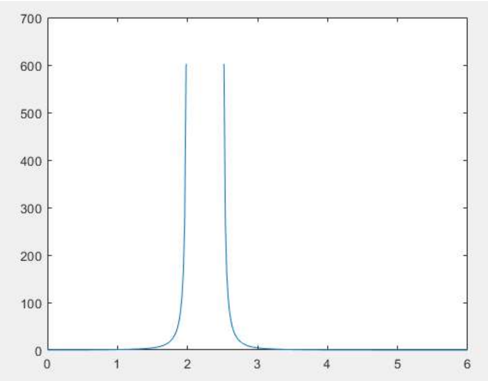
По аналогии для y_2:

$$\frac{a}{y_2} = \frac{a+d}{f_2} = \frac{(d+a)(F-d-a)}{F(d+a)} = \frac{F-d-a}{F} => y_2 = \frac{Fa}{F-d-a}$$

И для площади:

$$S = \frac{y_1 + y_2}{2} h = \frac{1}{2}\left(\frac{Fa}{F-d-a} + \frac{Fa}{F-d}\right)\frac{F^2 a}{(F-d)(F-d-a)} = \frac{1}{2}\frac{F^3 a^2 (2F - 2d - a)}{(F-d)^2 (F-d-a)^2}$$

Вид графика, если построить его полностью:

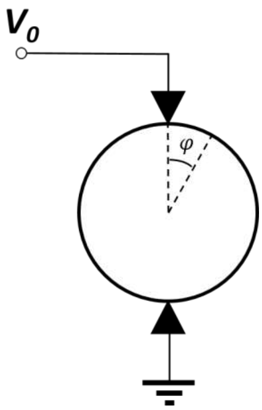


Нужно заметить, что, когда объект находится какой-то своей частью в фокусе (область между пиками на графике), будет получаться два изображения, площадь каждого из которых будет бесконечна (часть в фокусе будет давать параллельный пучок лучей), поэтому применять ранее приведенные выкладки для площади здесь будет некорректным, и определить площадь как таковую в этой ситуации нельзя.

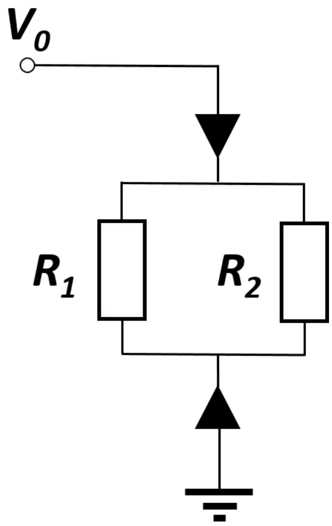
Задача 3

К металлическому кольцу радиуса $\boldsymbol{r}$ в диаметрально противоположных точках подключены электрические контакты, к которым подведено постоянное напряжение $\boldsymbol{V_0}$. Рассмотрите следующие ситуации:

1) Кольцо представляет собой две спаянные на концах металлические проволоки одинаковой длины и толщины, но разных удельных сопротивлений $\boldsymbol{\rho_1}$ и $\boldsymbol{\rho_2}$. Определите, как нужно ориентировать кольцо относительно контактов, чтобы выделяемая на колесе мощность была минимальной?
2) Кольцо сделано из проволоки, удельное сопротивление которой изменяется по длине. Кольцо изначально ориентировали относительно электрических контактов таким образом, что его удельное сопротивление меняется с углом $\boldsymbol{\varphi}$ (отсчитываемого от верхнего контакта, см. рисунок) как функция:
$$\rho(\varphi) = \rho_0(1 + \cos(2\varphi)\,(\sin(\varphi))^4 + (\cos(3\varphi))^2)$$
В неподвижном состоянии при подведении напряжения $\boldsymbol{V_0}$ к контактам на кольце выделялась мощность $\boldsymbol{W_0}$. Определите среднюю за период мощность, выделяемую на кольце, если оно будет вращаться с циклической частотой $\boldsymbol{w}$?



Решение:



Вопрос 1:

В приведенной по условию электрической схеме кольцо представляет собой два параллельно подключенных сопротивления, как показано на рисунке.

Определим угол φ как угол поворота колеса относительно положения, когда контакты попадают ровно в места скрепления двух проволок. Из такого определения следует, что угол меняется в пределах от 0 до π. Тогда для каждого из сопротивлений можно записать:

$$R_1 = \rho_1 \frac{\varphi r}{S} + \rho_2 \frac{(\pi - \varphi) r}{S} = \frac{r}{S}\big(\rho_1 \varphi + \rho_2(\pi - \varphi)\big) = \frac{r}{s}(\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi\rho_2)$$

$$R_2 = \rho_2 \frac{\varphi r}{S} + \rho_1 \frac{(\pi - \varphi) r}{S} = \frac{r}{S}\big(\rho_2 \varphi + \rho_1(\pi - \varphi)\big) = \frac{r}{s}(\varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi\rho_1)$$

Тогда общее сопротивление:

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\frac{r}{S}(\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi\rho_2)(\varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi\rho_1)}{\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi\rho_2 + \varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi\rho_1}$$

Математические преобразования:

$$R_0 = \frac{\frac{r}{S}(\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi\rho_2)(\varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi\rho_1)}{\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi\rho_2 + \varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi\rho_1} = \frac{r}{S}\frac{(\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi\rho_2)(\varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi\rho_1)}{\pi(\rho_1 + \rho_2)}$$
$$= \frac{r}{S}\frac{(-\varphi^2(\rho_1 - \rho_2)^2 + \varphi\pi\rho_2(\rho_2 - \rho_1) - \varphi\pi\rho_1(\rho_2 - \rho_1) + \pi^2\rho_1\rho_2)}{\pi(\rho_1 + \rho_2)}$$
$$= \frac{r}{S}\frac{(-\varphi^2(\rho_1 - \rho_2)^2 + \varphi\pi(\rho_1 - \rho_2)^2 + \pi^2\rho_1\rho_2)}{\pi(\rho_1 + \rho_2)} = \frac{r}{S}\frac{(\varphi(\rho_1 - \rho_2)^2(\pi - \varphi) + \pi^2\rho_1\rho_2)}{\pi(\rho_1 + \rho_2)}$$

Таким образом, получаем выражение:

$$R_0 = \frac{r}{\pi S}\left[\varphi(\pi - \varphi)\frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{\pi^2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right]$$

Где первое слагаемое в скобках зависит от угла, а второе не зависит. Мощность, выделяемая на колесе, определяется как:

$$W = \frac{V_0^2}{R}$$

Следовательно, мощность будет минимальна, когда сопротивление будет максимально. Согласно полученному выражению это будет соответствовать положению $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. когда контакты приложены к серединам проволок. Максимальная же мощность будет тогда, когда контакты будут подведены к местам спая проволок.

Вопрос 2

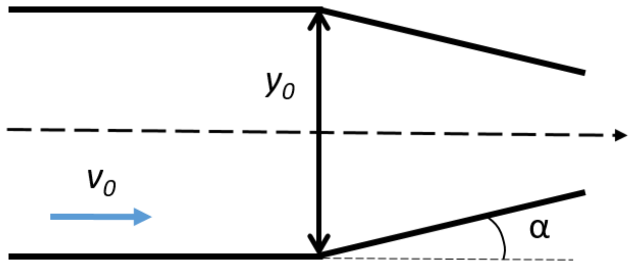
Рассмотрим поворот кольца на малый угол $d\alpha$ по часовой стрелке, такой, что на длине соответствующей дуги удельное сопротивление проволоки меняется незначительно (остается постоянным). Распишем, как с этим поворотом измениться сопротивление R_1:

$$dR_1 = \frac{\rho(-d\alpha)\cdot d\alpha \cdot r}{S} - \frac{\rho(\pi - d\alpha)\cdot d\alpha \cdot r}{S} = \frac{r\cdot d\alpha}{S}\big(\rho(-d\alpha) - \rho(\pi - d\alpha)\big) = 0$$

Соответственно, при повороте общее сопротивление колеса, составленное как два параллельно подключенных сегмента колеса, меняться не будет, и при вращении его с произвольной скоростью выделяемая мощность будет той же, что и при неподвижном колесе.

Задача 4

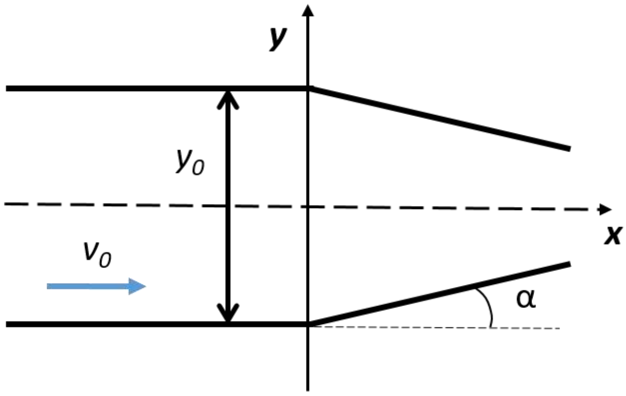
По речному каналу прямоугольного сечения плывет плот. В некоторой точке канал начинает линейно сужаться с расстоянием, угол, образуемый стенками канала с центральной линией равен α, глубина канала при этом остается постоянной. Плот вплывает в сужающийся участок со скоростью v_0, ширина канала в этой точке составляет y_0.



1. Определите, с каким ускорением будет двигаться плот по сужающемуся участку канала.
2. Определите скорость плота через время t после начала движения по сужающемуся участку канала.

Поток воды считайте стационарным и ламинарным, трением воды о стенки канала пренебречь. Плот движется вместе с водой со скоростью, равной скорости воды. Размерами плота по сравнению с шириной канала пренебрегите.

Решение



Введем для удобства координатные оси, как показано на рисунке. Ширина канала в зависимости от координаты:

$$y(x) = -x \cdot tg(\alpha) + \frac{y_0}{2}$$

Постоянство потока воды по каналу для стационарного течения (течение ламинарное, сколько вошло воды, столько и вышло, равенство объемом воды в единицу времени через любое сечение канала):

$$S(x)v(x)\Delta t = S_0 v_0 \Delta t$$

$$S(x)v(x) = S_0 v_0$$

Где $S_0 = y_0 h$ – площадь сечения канала в точке отсчета, $S(x) = 2y(x)h$ – площадь сечения на расстоянии x от начала сужающегося участка. Тогда:

$$2y(x)v(x) = y_0 v_0$$

Отсюда можно найти распределение скорости воды по длине канала:

$$v(x) = \frac{y_0 v_0}{2y(x)} = \frac{y_0 v_0}{-2x \cdot tg(\alpha) + y_0}$$

Плот движется вместе с водой со скоростью, равной скорости воды. Ускорение по определению есть полная производная скорости по времени (с учетом зависимости координаты плота от времени), поэтому для ускорения плота нужно продифференцировать полученное выражение для скорости воды в канале:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Полученное нами выражение для скорости напрямую от времени не зависит, но зависит от координаты x, которая здесь есть координата плота, зависящая от времени. Поэтому берем производную:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{y_0 v_0}{(-2x \cdot tg(\alpha) + y_0)^2}(-2tg(\alpha)) \cdot \frac{dx}{dt}$$

А $\frac{dx}{dt}$ есть ни что иное как скорость, выражение для которого мы получили ранее. Поэтому:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{2y_0 v_0 tg(\alpha)}{(-2x \cdot tg(\alpha) + y_0)^2} \cdot v(x) = \frac{2y_0 v_0 tg(\alpha)}{(-2x \cdot tg(\alpha) + y_0)^2} \cdot \frac{y_0 v_0}{-2x \cdot tg(\alpha) + y_0} = \frac{y_0^2 v_0^2 tg(\alpha)}{(-2x \cdot tg(\alpha) + y_0)^3}$$

И ответ на вопрос 1 получается:

$$a = \frac{y_0^2 v_0^2 tg(\alpha)}{(-2x \cdot tg(\alpha) + y_0)^3}$$

Для ответа на второй вопрос снова распишем основные выражения для случая произвольной формы канала:

Скорость плота от координаты:

$$v(x) = \frac{y_0 v_0}{y(x)}$$

Ускорение:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{y_0 v_0}{y(x)^2} \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Вспоминаем, что

$$\frac{dx}{dt} = v(x) = \frac{y_0 v_0}{y(x)}$$

Выражаем ускорение плота через скорость:

$$a = -\frac{y_0 v_0}{y(x)^2} \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{v}{y(x)} v \frac{dy}{dx} = -\frac{v^2}{y_0 v_0} \frac{y_0 v_0}{y(x)} \frac{dy}{dx} = -\frac{v^3}{y_0 v_0} \frac{dy}{dx}$$

По условию канал сужается линейно, и

$$\frac{dy}{dx} = const = -tg(\alpha)$$

Мы получили выражение для ускорения плота как исключительно функцию скорости воды в данной точке канала:

$$a(x) = \frac{tg(\alpha)(v(x))^3}{y_0 v_0}$$

Пусть плот находится в канале и имеет какую-то скорость. За интервал времени Δt его скорость изменится на Δv, причем:

$$\Delta v = a(v)\Delta t => \frac{1}{a(v)} = \frac{\Delta t}{\Delta v}$$

Тогда полное изменение скорости от начальной будет определяться суммированием всех интервалов времени, и полное время будет первообразной выражения, обратного зависимости ускорения от скорости:

$$t = \frac{y_0 v_0}{tg(\alpha)} \int \frac{dv}{v^3} = -\frac{y_0 v_0}{tg(\alpha)} \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2}\right)$$

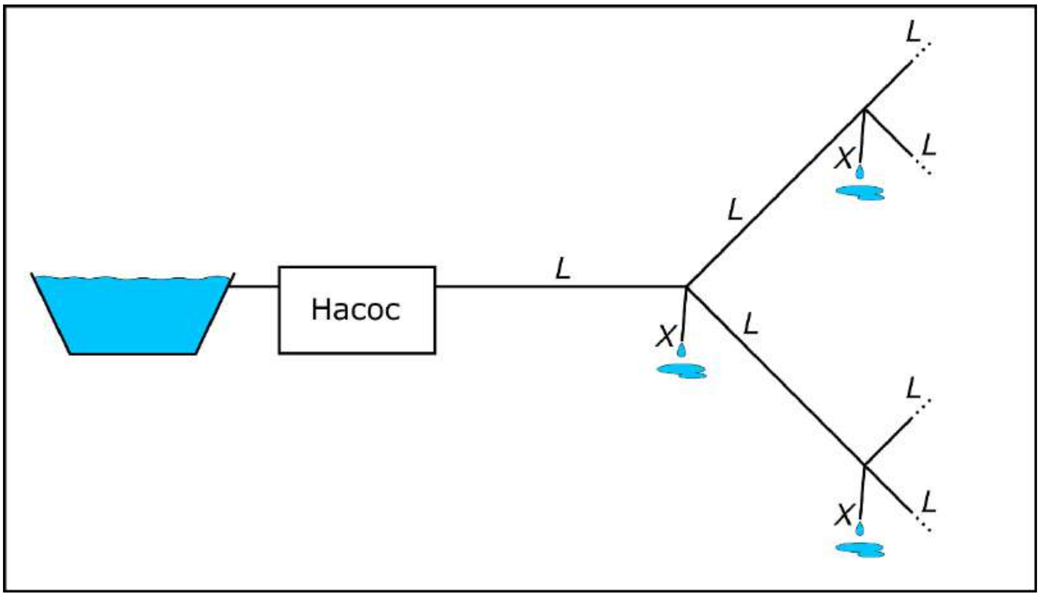
Откуда находим скорость в момент времени t:

$$-\frac{tg(\alpha)t}{y_0 v_0} + \frac{1}{v_0^2} = \frac{1}{v^2} => v(t) = \frac{1}{\sqrt{-\frac{tg(\alpha)t}{y_0 v_0} + \frac{1}{v_0^2}}}$$

Задача 5

На рисунке представлена бесконечная система капиллярных трубок, заполненная жидкостью с вязкостью $\boldsymbol{\eta}$. Слева расположен насос, который создаёт в начале первой трубки давление, превышающее атмосферное на величину $\boldsymbol{p}_0$. Первая трубка имеет длину $\boldsymbol{L}$, и на её конце трубопровод разветвляется : ответвляются две трубки такой же длины, а также трубка длиной $\boldsymbol{X}$, по которой жидкость вытекает во внешнее пространство. Каждая из последующих L-трубок разветвляется аналогичным образом. Найдите суммарный расход жидкости, которые выливается во внешнее пространство из всех X-трубок, отдаленных от насоса на $\boldsymbol{N}$ L-трубок. Диаметр всех трубок одинаковый и равен $\boldsymbol{D}$. Считайте, что потерей давления в точках ветвления трубопровода можно пренебречь по сравнению с потерей давления в отдельной трубке, а для связи расхода жидкости $\boldsymbol{Q_{tube}}$ и изменения давления на концах отдельной трубки $\boldsymbol{\Delta p}$ справедлив закон Пуазёйля:

$$\boldsymbol{Q_{tube}} = \frac{\pi\, \boldsymbol{D_{tube}^4}\, \Delta \boldsymbol{p}}{128\, \boldsymbol{\eta}\, \boldsymbol{L_{tube}}}$$



Решение

По аналогии с электрическими цепями, можно ввести гидравлическое сопротивление $\boldsymbol{H} = \frac{128\, \boldsymbol{\eta}\, \boldsymbol{L_{tube}}}{\pi\, \boldsymbol{D_{tube}^4}}$. Таким образом, для капиллярных трубок справедлив «гидравлический» закон Ома:

$$\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{HQ}$$

где расход жидкости $\boldsymbol{Q}$ – аналог электрического тока, а перепад давления $\boldsymbol{\Delta p}$ – аналог разности потенциалов. Для гидравлических сопротивлений справедливы формулы последовательного и параллельного соединения. Также справедливо, что суммарный расход жидкости, втекающей в точку ветвления равен суммарному расходу вытекающей из этой точки жидкости.

Гидравлическое сопротивление разных трубок будут вычисляться соответственно как

$$\boldsymbol{H_i} = \frac{128\, \boldsymbol{\eta}\, \boldsymbol{k}^{i-1} \boldsymbol{L_1}}{\pi\, \boldsymbol{D}^4} = \boldsymbol{k}^{i-1} \boldsymbol{H}_1$$

$$\boldsymbol{h}_i = \frac{128\,\boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{k}^{i-1}\boldsymbol{X_1}}{\pi\,\boldsymbol{D}^4} = \boldsymbol{k}^{i-1}\boldsymbol{h}_1$$

Данная аналогия позволяет перейти к эквивалентной задаче о цепочке электрических сопротивлений: $\boldsymbol{Q} \to I, \Delta\boldsymbol{p} \to \Delta U, \boldsymbol{H}_i \to R_i, \boldsymbol{h}_i \to r_i$. Электрическая схема получается следующей:

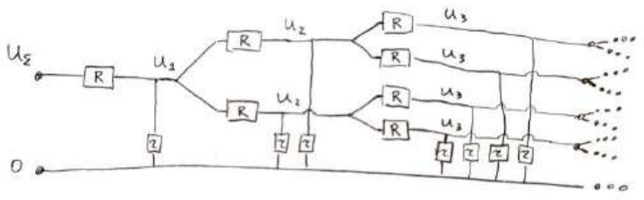


Рис.2 Эквивалентная электрическая схема

Так как все трубки $\boldsymbol{X}$ оканчиваются внешним пространством, то можно считать, что все они идут в одну точку с нулевым относительным давлением. Поэтому на электрической схеме они соединены проводником.

Найдём токи I_i, текущие через все сопротивления r уровня i (всего таких 2^{i-1}).

$$I_i = 2^{i-1}\frac{U_i}{r}$$

$$U_\Sigma - U_1 = I_\Sigma R$$

$$U_1 = U_\Sigma - I_\Sigma R = U_\Sigma\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)$$

$$U_2 - ?$$

Рассмотрим часть схемы правее точки, где наблюдается U_1. Можно заметить, что это, по сути, две параллельно подключённые исходные схемы. Тогда аналогично найдём

$$U_2 = U_1\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)$$

Обобщая, можно написать:

$$U_i = U_{i-1}\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right) = U_\Sigma\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)^i$$

$$I_i = 2^{i-1}\frac{U_i}{r} = 2^{i-1}\frac{U_\Sigma}{r}\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)^i$$

Осталось только выразить R_Σ через известные величины. Схему с рис.2 можно перерисовать следующим образом (рис.3)

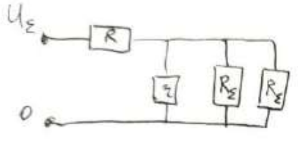


Рис.3 Представление схемы на рис.2, где часть правее первого ветвления представлена в виде параллельного соединения сопротивлений R_Σ

Из схемы следует, что

$$R_\Sigma = R + \frac{krR_\Sigma/2}{r + kR_\Sigma/2}$$

$$2R_\Sigma r + R_\Sigma^2 - 2Rr - R_\Sigma R - rR = 0$$

$$R_\Sigma^2 + (2r - R)R_\Sigma - 3rR = 0$$

$$R_\Sigma = \frac{1}{2}\left(R - 2r + \sqrt{(2r-R)^2 + 12rR}\right)$$

Тогда

$$I_N = \frac{U_\Sigma}{k^{i-1}r}\left(1 - \frac{2kR}{kR - r + \sqrt{(r-kR)^2 + 4k(k+1)rR}}\right)^i$$
$$= \frac{kU_\Sigma}{r}\left(\frac{1}{k} - \frac{2R}{kR - r + \sqrt{(r-kR)^2 + 4k(k+1)rR}}\right)^i$$

$$I_N = 2^{N-1}\frac{U_\Sigma}{r}\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)^N = 2^{N-1}\frac{U_\Sigma}{r}\left(1 - \frac{2R}{R - 2r + \sqrt{(2r-R)^2 + 12rR}}\right)^N$$

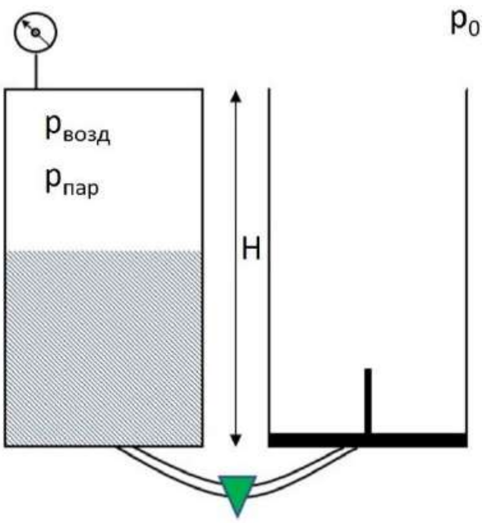
Так как $R \to H \sim L$, $r \to h \sim X$ и $\frac{h}{H} = \frac{X}{L}$, то в скобках остаются только X и L.

$$Q_N = \frac{2^{N-8}\pi D^4 \Delta p}{\eta\, X_1}\left(1 - \frac{2L}{L - 2X + \sqrt{(2X-L)^2 + 12XL}}\right)^N$$

Вариант 4

Задача 1

Два одинаковых сосуда высотой H герметично соединены у дна тонкой перемычкой и расположены в камере, в которой поддерживается постоянное давление p_0. В перемычку встроен кран-натекатель, который изначально закрыт. Один из сосудов запаян, в нем находится вода и влажный воздух, на дне другого расположен невесомый герметичный поршень, способный двигаться без трения. В запаянном сосуде установлен манометр, позволяющий измерять давление газа в сосуде. Кран открывают, вода начинает медленно перетекать. После установления равновесия манометр показывал давление, в n раз меньшее первоначального. Определите установившийся уровень воды в запаянном сосуде. Температура в сосудах остается постоянной. Ускорение свободного падения, плотность воды, плотность и давление насыщенных паров воды при данной температуре, а также первоначальные показания манометра считайте известными.



Решение

После открытия крана вода будет медленно перетекать из левого сосуда в правый. Высота столба жидкости в нем будет уменьшаться, объем, предоставляемый влажному воздуху, будет увеличиваться. Поскольку перетекание медленное, то со свободной поверхности воды будет происходить испарение. В правом сосуде высота столба жидкости будет увеличиваться, при этом поршень будет подниматься вместе с подъемом уровня жидкости. Перетекание прекратится, когда давление в перемычке будет уравновешено. В стационарном состоянии в запаянном сосуде будет также находится смесь воздуха и насыщенного пара. Поскольку температура по условию остается постоянной, парциальной давление насыщенных паров в нем не изменится, в то время как парциальное давление воздуха уменьшится.

Введем обозначения: h_1 – начальной уровень воды в запаянном сосуде; h_1', h_2' – конечные высоты столбов жидкости в запаянном и закрытом поршнем сосудах, соответственно; $p_{\text{возд}}$ – начальное парциальное давление воздуха в запаянном сосуде; $p'_{\text{возд}}$ – конечное парциальное давление воздуха в нем; H – высота запаянного сосуда. Поскольку процесс изотермический, то для воздуха можно записать:

$$p_{\text{возд}}S(H-h_1) = p'_{\text{возд}}S(H-h_1') => p'_{\text{возд}} = p_{\text{возд}}\frac{(H-h_1)}{(H-h_1')}$$

Манометр показывает суммарное давление, и по условию нам дано:

$$p_0 = p_{\text{пар}} + p_{\text{возд}}, p_1 = p_{\text{пар}} + p'_{\text{возд}} = p_0/n$$

$$\frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{p'_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}} = n => p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}} = n\left(p_{\text{возд}}\frac{(H-h_1)}{(H-h_1')} + p_{\text{пар}}\right) =>$$

$$=> \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{n} - p_{\text{пар}} = p_{\text{возд}}\frac{(H-h_1)}{(H-h_1')} => \left(\frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{n} - p_{\text{пар}}\right)\frac{(H-h_1')}{p_{\text{возд}}} = H - h_1$$

Распишем условие равенства давлений в перемычке. В левом сосуде это давление столба жидкости высотой h_1' и давление влажного воздуха над водой (что есть показания манометра), в правом – давление столба жидкости высотой h_2':

$$\rho_{\text{воды}}gh_2' = \rho_{\text{воды}}gh_1' + \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{n} => \rho_{\text{воды}}g(h_2' - h_1') = \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{n} => h_2' - h_1' = \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{n\rho_{\text{воды}}g}$$

Откуда:

$$h_2' = h_1' - \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{n\rho_{\text{воды}} g}$$

Количество молекул воды в сосуде остается постоянным. Изначально вся вода была только в левом правом сосуде в жидком и парообразном состояниях (M – масса молекулы воды):

$$N = \frac{\rho_{\text{воды}}}{M} S h_1 + \frac{\rho_{\text{пара}}}{M} S(H - h_1)$$

Затем – жидкая вода в каждом сосуде и насыщенный пар в запаянном сосуде:

$$N = \frac{\rho_{\text{воды}}}{M} S(h_1' + h_2') + \frac{\rho_{\text{пара}}}{M} S(H - h_1')$$

Приравняем и получаем:

$$\rho_{\text{воды}} h_1 + \rho_{\text{пара}}(H - h_1) = \rho_{\text{воды}}(h_1' + h_2') + \rho_{\text{пара}}(H - h_1')$$

$$h_1(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}) = h_1'(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}) + \rho_{\text{воды}} h_2'$$

$$h_1 = h_1' + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}} h_2'$$

Подставляем ранее полученное соотношение между h_1' и h_2':

$$h_1 = h_1' + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\left(h_1' - \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{n\rho_{\text{воды}} g}\right) = h_1'\left(1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\right) - \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{ng(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}$$

Подставляем в ранее полученное:

$$\left(\frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{n} - p_{\text{пар}}\right)\frac{(H - h_1')}{p_{\text{возд}}} = H - h_1'\left(1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\right) + \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{ng(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}$$

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{p_{\text{пар}}}{p_{\text{возд}}}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\right)(H - h_1') = H - h_1'\left(1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\right) + \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{ng(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}$$

$$h_1'\left(\left(1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{p_{\text{пар}}}{p_{\text{возд}}}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\right)\right)$$
$$= H\left(1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{p_{\text{пар}}}{p_{\text{возд}}}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\right)\right) + \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{ng(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}$$

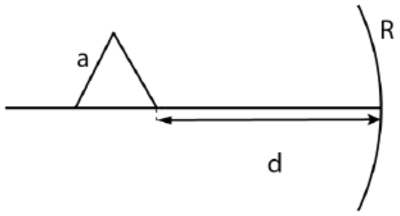
$$h_1' = \frac{H\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{p_{\text{пар}}}{p_{\text{возд}}}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\right) + \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{ng(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}}{1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}} - \frac{1}{n} + \frac{p_{\text{пар}}}{p_{\text{возд}}}\left(\frac{1}{n} - 1\right)}$$
$$\approx \frac{H\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{p_{\text{пар}}}{p_{\text{возд}}}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\right) + \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{ng(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{p_{\text{пар}}}{p_{\text{возд}}}\left(\frac{1}{n} - 1\right)}$$

Задача 2

Равносторонний треугольник со стороной a расположен перед вогнутым сферическим зеркалом радиуса R (см. рисунок), при этом $R = 10a$. Как будет зависеть площадь изображения треугольника в зависимости от расстояния d до поверхности линзы?

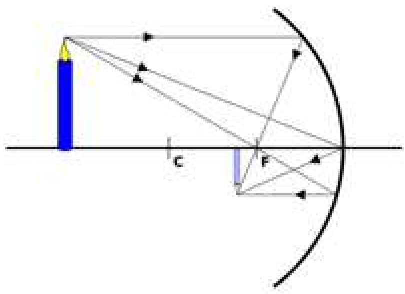
Приведите примерный график этой зависимости и объясните его вид. Считать радиус зеркала много больше грани треугольника.

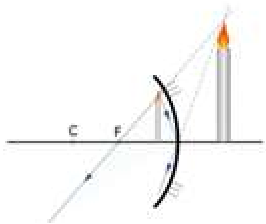
Примечание: фокус вогнутого сферического зеркала расположен перед зеркалом на расстоянии, равном половине радиуса кривизны зеркала.



Решение

Фокусное расстояние сферического зеркала равняется половине радиуса кривизны $F = R/2$. Нужно найти положение трех вершин треугольника в изображении фигуры и определить высоту от вершины, находящейся на расстоянии $d + a/2$. Пример построение изображений в сферическом зеркале:





Сперва рассмотрим случай, когда объект располагается дальше фокусного расстояния линзы ($d > R/2$):

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} => f = \frac{dR}{2d - R}$$

Обозначим за f_1 координату по оси x точки в изображении от ближней к зеркалу вершины треугольника, f_2 – от средней вершины, f_3 – от дальней вершины треугольника. Имеем:

$$f_1 = \frac{dR}{2d - R}$$

$$f_2 = \frac{(d + a/2)R}{2(d + a/2) - R}$$

$$f_3 = \frac{(d + a)R}{2(d + a) - R}$$

Обозначим за h_2 координату по оси y в изображении от средней вершины треугольника. Получим:

$$h_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}(d + a/2)R}{\left(2\left(d + \frac{a}{2}\right) - R\right)(d + a/2)} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}R}{2\left(d + \frac{a}{2}\right) - R}$$

В итоге площадь изображения треугольника будет равна:

$$S = \frac{1}{2}(f_1 - f_3)h_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{dR}{2d - R} - \frac{(d + a)R}{2(d + a) - R}\right)\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}R}{2\left(d + \frac{a}{2}\right) - R}$$

Рассмотрим второй случай, когда треугольник находится ближе фокусного расстояния зеркала:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} => f = \frac{dR}{R - 2d}$$

Вновь обозначим за f_1 координату по оси x точки в изображении от ближней к зеркалу вершины треугольника, f_2 – от средней вершины, f_3 – от дальней вершины треугольника. Имеем:

$$f_1 = \frac{dR}{R - 2d}$$

$$f_2 = \frac{(d + a/2)R}{R - 2(d + a/2)}$$

$$f_3 = \frac{(d + a)R}{R - 2(d + a)}$$

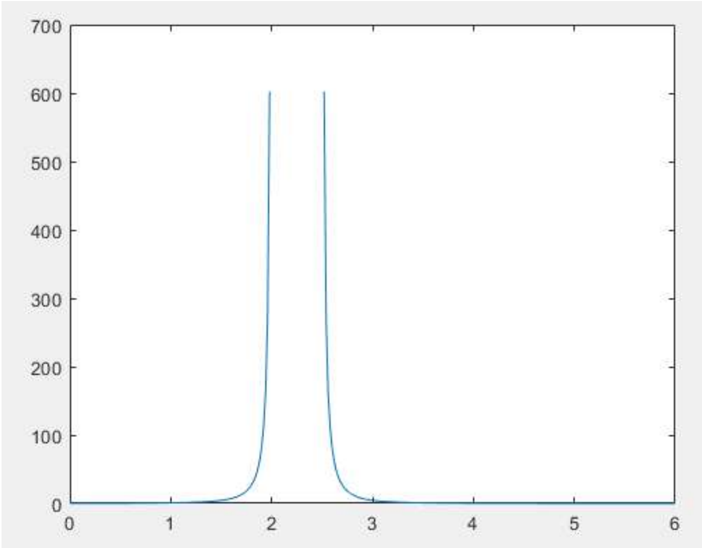
Обозначим за h_2 координату по оси y в изображении от средней вершины треугольника. Получим:

$$h_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}(d + a/2)R}{\left(R - 2\left(d + \frac{a}{2}\right)\right)(d + a/2)} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}R}{R - 2\left(d + \frac{a}{2}\right)}$$

Площадь изображения треугольника будет равна:

$$S = \frac{1}{2}(f_3 - f_1)h_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{(d + a)R}{2(d + a) - R} - \frac{dR}{2d - R}\right)\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}R}{R - 2\left(d + \frac{a}{2}\right)}$$

Получили в точности такое же выражение. Примерный график функции. Изображен для случая R=5 см, a=0.5 см:

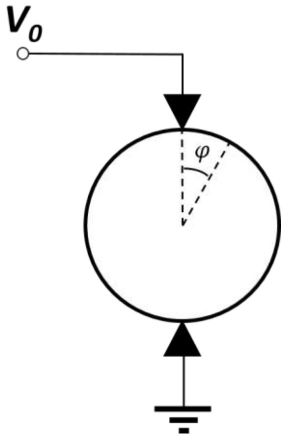


Когда объект находится какой-то своей частью в фокусе (часть между пиками на графике), будет получаться два изображения, площадь каждого из которых будет бесконечна (часть в фокусе будет давать параллельный пучок лучей), поэтому применять ранее приведенные выкладки для площади будет некорректным, и определить площадь как таковую в этой ситуации нельзя.

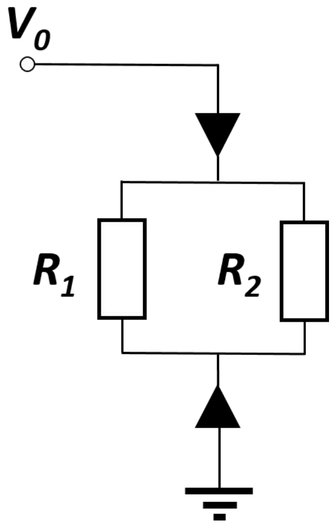
Задача 3

К металлическому кольцу радиуса $\boldsymbol{r}$ в диаметрально противоположных точках подключены электрические контакты, к которым подведено постоянное напряжение $\boldsymbol{V_0}$. Рассмотрите следующие ситуации:

1) Кольцо представляет собой две спаянные на концах металлические проволоки одинаковой длины и толщины, но разных удельных сопротивлений $\boldsymbol{\rho_1}$ и $\boldsymbol{\rho_2}$. Определите, как нужно ориентировать кольцо относительно контактов, чтобы выделяемая на колесе мощность была максимальной?
2) Кольцо сделано из проволоки, удельное сопротивление которой изменяется по длине. Кольцо изначально ориентировали относительно электрических контактов таким образом, что его удельное сопротивление меняется с углом $\boldsymbol{\varphi}$ (отсчитываемого от верхнего контакта, см. рисунок) как функция:
$$\rho(\varphi) = \rho_0 \left(1 + \frac{\sin(2\varphi) + (\cos(\varphi))^2}{2 + (\cos(3\varphi))^2}\right)$$
В неподвижном состоянии при подведении напряжения $\boldsymbol{V_0}$ к контактам на кольце выделялась мощность $\boldsymbol{W_0}$. Определите среднюю за период мощность, выделяемую на кольце, если оно будет вращаться с циклической частотой $\boldsymbol{w}$?



Решение:



Вопрос 1:

В приведенной по условию электрической схеме кольцо представляет собой два параллельно подключенных сопротивления, как показано на рисунке.

Определим угол φ как угол поворота колеса относительно положения, когда контакты попадают ровно в места скрепления двух проволок. Из такого определения следует, что угол меняется в пределах от 0 до π. Тогда для каждого из сопротивлений можно записать:

$$R_1 = \rho_1 \frac{\varphi r}{S} + \rho_2 \frac{(\pi - \varphi) r}{S} = \frac{r}{S}\big(\rho_1 \varphi + \rho_2 (\pi - \varphi)\big) = \frac{r}{s}(\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi \rho_2)$$

$$R_2 = \rho_2 \frac{\varphi r}{S} + \rho_1 \frac{(\pi - \varphi) r}{S} = \frac{r}{S}\big(\rho_2 \varphi + \rho_1 (\pi - \varphi)\big) = \frac{r}{s}(\varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi \rho_1)$$

Тогда общее сопротивление:

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\frac{r}{S}(\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi\rho_2)(\varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi\rho_1)}{\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi\rho_2 + \varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi\rho_1}$$

Математические преобразования:

$$R_0 = \frac{\frac{r}{S}(\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi\rho_2)(\varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi\rho_1)}{\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi\rho_2 + \varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi\rho_1} = \frac{r}{S}\frac{(\varphi(\rho_1 - \rho_2) + \pi\rho_2)(\varphi(\rho_2 - \rho_1) + \pi\rho_1)}{\pi(\rho_1 + \rho_2)}$$
$$= \frac{r}{S}\frac{(-\varphi^2(\rho_1 - \rho_2)^2 + \varphi\pi\rho_2(\rho_2 - \rho_1) - \varphi\pi\rho_1(\rho_2 - \rho_1) + \pi^2\rho_1\rho_2)}{\pi(\rho_1 + \rho_2)}$$
$$= \frac{r}{S}\frac{(-\varphi^2(\rho_1 - \rho_2)^2 + \varphi\pi(\rho_1 - \rho_2)^2 + \pi^2\rho_1\rho_2)}{\pi(\rho_1 + \rho_2)} = \frac{r}{S}\frac{(\varphi(\rho_1 - \rho_2)^2(\pi - \varphi) + \pi^2\rho_1\rho_2)}{\pi(\rho_1 + \rho_2)}$$

Таким образом, получаем выражение:

$$R_0 = \frac{r}{\pi S}\left[\varphi(\pi - \varphi)\frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{\pi^2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right]$$

Где первое слагаемое в скобках зависит от угла, а второе не зависит. Мощность, выделяемая на колесе, определяется как:

$$W = \frac{V_0^2}{R}$$

Следовательно, мощность будет минимальна, когда сопротивление будет максимально. Согласно полученному выражению это будет соответствовать положению $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. когда контакты приложены к серединам проволок. Максимальная же мощность будет тогда, когда контакты будут подведены к местам спая проволок.

Вопрос 2

Рассмотрим поворот кольца на малый угол $d\alpha$ по часовой стрелке, такой, что на длине соответствующей дуги удельное сопротивление проволоки меняется незначительно (остается постоянным). Распишем, как с этим поворотом измениться сопротивление R_1:

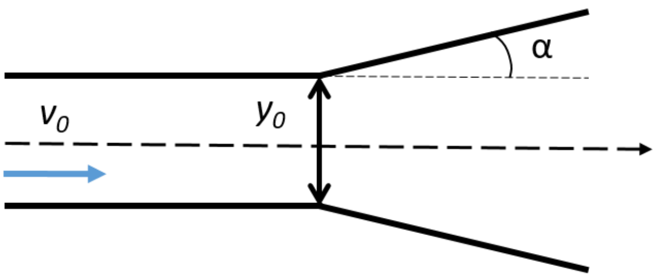
$$dR_1 = \frac{\rho(-d\alpha)\cdot d\alpha\cdot r}{S} - \frac{\rho(\pi - d\alpha)\cdot d\alpha\cdot r}{S} = \frac{r\cdot d\alpha}{S}\big(\rho(-d\alpha) - \rho(\pi - d\alpha)\big) = 0$$

Соответственно, при повороте общее сопротивление колеса, составленное как два параллельно подключенных сегмента колеса, меняться не будет, и при вращении его с произвольной скоростью выделяемая мощность будет той же, что и при неподвижном колесе.

Задача 4

По речному каналу прямоугольного сечения плывет плот. В некоторой точке канал начинает расширяться с расстоянием, глубина канала при этом остается постоянной. Плот вплывает в расширяющийся участок со скоростью v_0, ширина канала в этой точке составляет y_0.

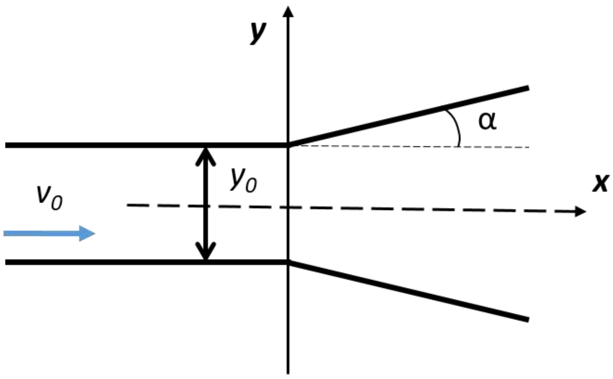
1. Канал расширяется линейно с расстоянием, угол, образуемый стенками канала с центральной линией равен α (см. рисунок). За какое время плот преодолеет расстояние L с точки начала расширяющегося участка канала?



2. Определите, как должна меняться ширина канала, чтобы ускорение плота, плывущего по нему, было постоянным.

Поток воды считайте стационарным и ламинарным, трением воды о стенки канала пренебречь. Плот движется вместе с водой со скоростью, равной скорости воды. Размерами плота по сравнению с шириной канала пренебрегите.

Решение



Введем для удобства координатные оси, как показано на рисунке. Ширина канала в зависимости от координаты:

$$y(x) = x \cdot tg(\alpha) + \frac{y_0}{2}$$

Постоянство потока воды по каналу для стационарного течения (течение ламинарное, сколько вошло воды, столько и вышло, равенство объемом воды в единицу времени через любое сечение канала):

$$S(x)v(x)\Delta t = S_0 v_0 \Delta t$$

$$S(x)v(x) = S_0 v_0$$

Где $S_0 = y_0 h$ – площадь сечения канала в точке отсчета, $S(x) = 2y(x)h$ – площадь сечения на расстоянии x от начала расширяющегося участка. Тогда:

$$2y(x)v(x) = y_0 v_0$$

Отсюда можно найти распределение скорости воды по длине канала:

$$v(x) = \frac{y_0 v_0}{2y(x)} = \frac{y_0 v_0}{2x \cdot tg(\alpha) + y_0}$$

Допустим, что с этой точки он прошел расстояние Δx за время Δt, при этом интервалы столь малые, что изменением скорости можно пренебречь. Тогда можно записать:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v(x)}$$

Полное время движения будет, соответственно, находиться из суммирования этих интервалов. Ввиду малости выбранных интервалов, можно записать:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v(x)}$$

Откуда время от координаты есть первообразная от величины $1/v(x)$:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v(x)} = \frac{2x \cdot tg(\alpha) + y_0}{y_0 v_0} = 2x \cdot \frac{tg(\alpha)}{y_0 v_0} + \frac{1}{v_0}$$

По правилу нахождения первообразных имеем:

$$t = x^2 \frac{tg(\alpha)}{y_0 v_0} + \frac{x}{v_0}$$

В начальный момент времени плот находится в начале координат, поэтому константа равна нулю. Подставляем данную в условии длину и получаем ответ:

$$t = L^2 \frac{tg(\alpha)}{y_0 v_0} + \frac{L}{v_0}$$

По условию вопроса 2 нам дано, что плот движется по каналу с постоянным ускорением. Значит, для его скорости и координаты выполняются соотношения:

$$v(t) = v_0 + at, x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Выразим время из соотношения для скорости:

$$t = \frac{v(x) - v_0}{a}$$

Подставим в соотношения для координаты и выполним простые преобразования:

$$x = v_0 \frac{v(x) - v_0}{a} + \frac{a}{2}\left(\frac{v(x) - v_0}{a}\right)^2 = v_0 \frac{v(x) - v_0}{a} + \frac{(v(x) - v_0)^2}{2a} = \frac{v(x)^2 - v_0^2}{2a}$$

Откуда:

$$v(x)^2 = 2ax + v_0^2 => v(x) = \sqrt{2ax + v_0^2}$$

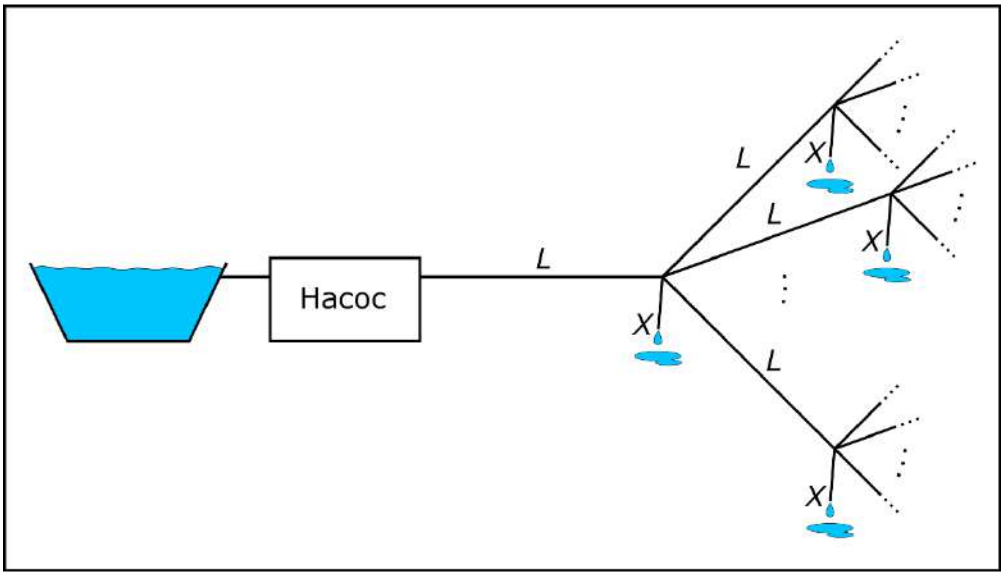
И для формы канала:

$$y(x) = \frac{y_0 v_0}{2v(x)} = \frac{y_0 v_0}{2\sqrt{2ax + v_0^2}} = \frac{y_0}{2\sqrt{\frac{2ax}{v_0^2} + 1}}$$

Задача 5

На рисунке представлена бесконечная система капиллярных трубок, заполненная жидкостью с вязкостью $\boldsymbol{\eta}$. Слева расположен насос, который создаёт в начале первой трубки давление, превышающее атмосферное на величину $\boldsymbol{p}_0$. Первая трубка имеет длину $\boldsymbol{L}$, и на её конце трубопровод разветвляется : ответвляются какое-то фиксированное, но неизвестное число трубок такой же длины, а также одна трубка длиной $\boldsymbol{X}$, по которой жидкость вытекает во внешнее пространство. Каждая из последующих L-трубок разветвляется аналогичным образом. Известно, что если к насосу вместо рассматриваемой системы подключить одну трубку длиной $\boldsymbol{L_0}$, то общий расход жидкости через насос не изменится. Найдите суммарный расход жидкости, который выливается во внешнее пространство из всех X-трубок, отдаленных от насоса на $\boldsymbol{N}$ L-трубок. Диаметр всех трубок одинаковый и равен $\boldsymbol{D}$. Считайте, что потерей давления в точках ветвления трубопровода можно пренебречь по сравнению с потерей давления в отдельной трубке, а для связи расхода жидкости $\boldsymbol{Q_{tube}}$ и изменения давления на концах отдельной трубки $\boldsymbol{\Delta p}$ справедлив закон Пуазёйля:

$$\boldsymbol{Q_{tube}} = \frac{\pi\, \boldsymbol{D_{tube}^4}\, \Delta \boldsymbol{p}}{128\, \boldsymbol{\eta}\, \boldsymbol{L_{tube}}}$$



Решение

По аналогии с электрическими цепями, можно ввести гидравлическое сопротивление $\boldsymbol{H} = \frac{128\,\boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{L_{tube}}}{\pi\,\boldsymbol{D_{tube}^4}}$. Таким образом, для капиллярных трубок справедлив «гидравлический» закон Ома:

$$\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{HQ}$$

где расход жидкости $\boldsymbol{Q}$ – аналог электрического тока, а перепад давления $\boldsymbol{\Delta p}$ – аналог разности потенциалов. Для гидравлических сопротивлений справедливы формулы последовательного и параллельного соединения. Также справедливо, что суммарный расход жидкости, втекающей в точку ветвления равен суммарному расходу вытекающей из этой точки жидкости.

Гидравлическое сопротивление разных трубок будут вычисляться соответственно как

$$\boldsymbol{H_i} = \frac{128\,\boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{k}^{i-1}\boldsymbol{L_1}}{\pi\,\boldsymbol{D}^4} = \boldsymbol{k}^{i-1}\boldsymbol{H}_1$$

$$\boldsymbol{h}_i = \frac{128\,\boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{k}^{i-1}\boldsymbol{X_1}}{\pi\,\boldsymbol{D}^4} = \boldsymbol{k}^{i-1}\boldsymbol{h_1}$$

Данная аналогия позволяет перейти к эквивалентной задаче о цепочке электрических сопротивлений: $\boldsymbol{Q} \to I, \Delta\boldsymbol{p} \to \Delta U, \boldsymbol{H}_i \to R_i, \boldsymbol{h}_i \to r_i$. Электрическая схема получается следующей:

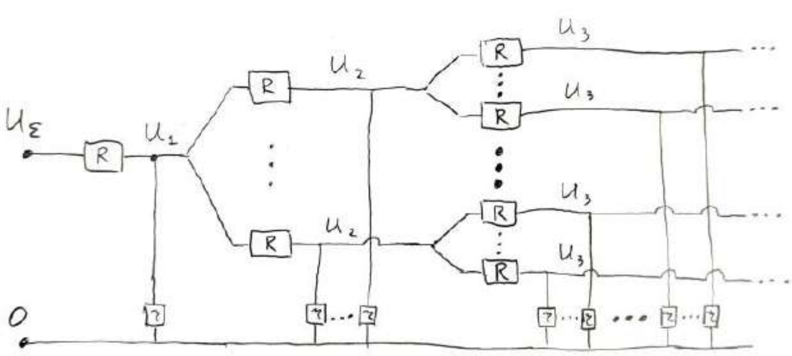


Рис.2 Эквивалентная электрическая схема

Так как все трубки ***X*** оканчиваются внешним пространством, то можно считать, что все они идут в одну точку с нулевым относительным давлением. Поэтому на электрической схеме они соединены проводником.

Найдём токи I_i, текущие через все сопротивления r уровня i (всего таких M^{i-1}).

$$I_i = M^{i-1}\frac{U_i}{r}$$

$$U_\Sigma - U_1 = I_\Sigma R$$

$$U_1 = U_\Sigma - I_\Sigma R = U_\Sigma\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)$$

$$U_2 - ?$$

Рассмотрим часть схемы правее точки, где наблюдается U_1. Можно заметить, что это, по сути, M параллельно подключённые исходные схемы. Тогда аналогично найдём

$$U_2 = U_1\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)$$

Обобщая, можно написать:

$$U_i = U_{i-1}\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right) = U_\Sigma\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)^i$$

$$I_i = M^{i-1}\frac{U_i}{r} = M^{i-1}\frac{U_\Sigma}{r}\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)^i$$

Осталось только выразить M через известные величины. Схему с рис.2 можно перерисовать следующим образом (рис.3)

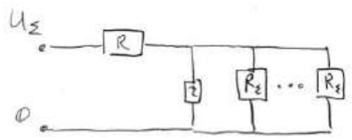


Рис.3 Представление схемы на рис.2, где часть правее первого ветвления представлена в виде параллельного соединения сопротивлений R_Σ

Из схемы следует, что

$$R_\Sigma = R + \frac{krR_\Sigma/M}{r + kR_\Sigma/M}$$

$$MR_\Sigma r + R_\Sigma^2 - MRr - R_\Sigma R - rR = 0$$

$$M = \frac{R_\Sigma(R_\Sigma - R - r)}{r(R - R_\Sigma)}$$

Тогда

$$I_N = M^{N-1}\frac{U_\Sigma}{r}\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)^N = \frac{U_\Sigma}{r}\left(\frac{R_\Sigma(R_\Sigma - R - r)}{r(R - R_\Sigma)}\right)^{N-1}\left(1 - \frac{R}{R_\Sigma}\right)^N$$

Так как $R \to H \sim L$, $R_\Sigma \to H_\Sigma \sim L_0$, $r \to h \sim X$ и $\frac{h}{H} = \frac{X}{L}$, $\frac{H_\Sigma}{H} = \frac{L_0}{L}$, то в скобках остаются только X, L и L_0.

$$Q_N = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128\, \eta\, X_1} \left(\frac{L_0 (L_0 - L_1 - X_1)}{X_1 (L_1 - L_0)} \right)^{N-1} \left(1 - \frac{L_1}{L_0} \right)^N$$