Задания заключительного этапа Олимпиады школьников СПбГУ по физике 2021-2022 гг.

Участникам заключительного этапа предлагался к решению вариант, состоящий из 5 задач. Вариант для каждого участника выбирался случайным образом из заранее заготовленных.

10 класс

Вариант 1

Задача 1

Из города А в город В можно добраться по соединяющему их речному каналу за время $t_{\text{пл}}$, если плыть на плоту. Из города А отчаливает катер и направляется в город В. Для наиболее быстрого прохождения маршрута капитан сразу же включает мотом, позволяющей катерку двигаться с постоянным ускорением. Кроме того, капитан знает, что для того, чтобы остановиться с нулевой скоростью у причала рядом с городом В, ему надо единожды поменять направление тяги мотора на противоположное (модуль ускорения катера при этом не меняется) и сделать это около определенного дерева, растущего на берегу канала. Определите время движения катера до этого дерева из города А, если известно, что в стоячей воде мотор разгоняет катер до скорости течения воды в канале за время t_c. Считайте, что при отплытии катер мгновенно приобретает скорость воды в канале.

Решение:

Обозначим расстояние между городами L, скорость течения реки – u. По условию нам дано:

$$\boldsymbol{t}_{\text{пл}} = \frac{L}{u}, \boldsymbol{t}_{\text{с}} = \frac{u}{a}$$

Откуда следует, что:

$$L = a\boldsymbol{t}_{\text{с}}\boldsymbol{t}_{\text{пл}}$$

Обозначим S_1 расстояние от города А до дерева, S_2 – расстояние от дерева до города В, t_1, t_2 – соответствующие времена в пути. Тогда:

$$L = S_1 + S_2$$

$$v(t_1) = u + at_1, S_1(t_1) = ut_1 + \frac{at_1^2}{2}$$

По условию дано, что в город В катер приходит с нулевой скоростью:

$$v(t_2) = u + at_1 - at_2 = 0$$

Откуда:

$$u + at_1 - at_2 = 0 => t_2 - t_1 = \frac{u}{a}$$

Далее, для S_2 и полного расстояния имеем:

$$S_2(t_2) = (u + at_1)t_2 - \frac{at_2^2}{2}$$

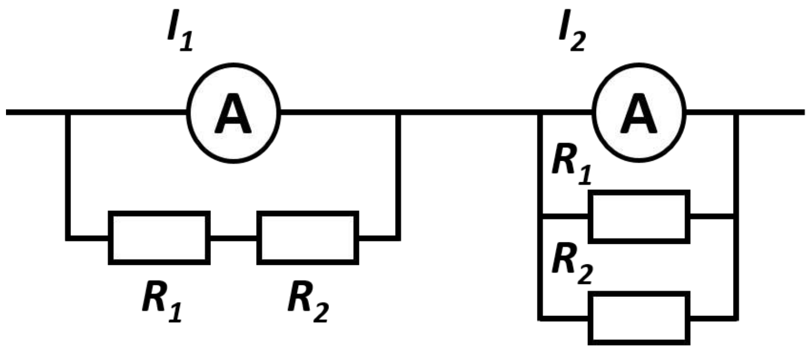
$$\begin{cases} L = ut_1 + \dfrac{at_1^2}{2} + (u + at_1)t_2 - \dfrac{at_2^2}{2} \\ t_2 - t_1 = \dfrac{u}{a} \end{cases}$$

Получаем квадратное уравнение, находим t_1 и t_2:

$$t_2 = \sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} = \sqrt{\mathbf{t}_{с}\mathbf{t}_{пл} + \frac{\mathbf{t}_{с}^2}{2}}, t_1 = \sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} - \frac{u}{a} = \sqrt{\mathbf{t}_{с}\mathbf{t}_{пл} + \frac{\mathbf{t}_{с}^2}{2}} - \mathbf{t}_{с}$$

Задача 2

В участок цепи последовательно подключены два одинаковых неидеальных амперметра с пределом измерения 2А. К каждому из них параллельно подключены по два резистора с сопротивлениями R_1=0.1 Ом и R_2=0.4 Ом. В одном случае резисторы подключены последовательно друг другу, в другом – параллельно друг другу (см. рисунок). Первый амперметр показывает I_1=1.25 А, а второй I_2=0.1 А. Каковы сопротивления амперметров? Какая максимальная сила тока в цепи может быть измерена с помощью такого подключения этих амперметров?



Решение:

Обозначим величины, связанные с левой группой элементов, цифрой 1, с правой – цифрой 2, сопротивление амперметров – R_A, силы тока через группы резисторов I_{1R} и I_{2R}.

Амперметры подсоединены параллельно группам резисторов, поэтому напряжения будут одинаковы внутри каждой группы:

$$I_1 R_A = I_{1R}(R_1 + R_2), \qquad I_2 R_A = I_{2R}\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)$$

При этом, в каждой группе сумма тока, протекающего через амперметр и тока, протекающего через резисторы, равна току во всей цепи I:

$$I = I_1 + I_{1R} = I_1 \frac{R_1 + R_2 + R_A}{R_1 + R_2}, I = I_2 + I_{2R} = I_2\left(1 + \frac{R_A}{R_1} + \frac{R_A}{R_2}\right)$$

Откуда находим сопротивление амперметров:

$$I_1 \frac{R_1 + R_2 + R_A}{R_1 + R_2} = I_2\left(1 + \frac{R_A}{R_1} + \frac{R_A}{R_2}\right) => R_A = \frac{I_2 - I_1}{\frac{I_1}{R_1 + R_2} - I_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} = 0.72 \text{ Ом}$$

Тогда, полагая, что через амперметр идёт максимально возможная для измерения сила тока, получаем, что ток в цепи и есть та наибольшая сила тока, которую можно измерить в данных условиях:

$$I_{1\max} = I_{max}\frac{R_1 + R_2 + R_A}{R_1 + R_2} = 2.44\ \mathrm{A}, \quad I_{2\max} = I_{max}\left(1 + \frac{R_A}{R_1} + \frac{R_A}{R_2}\right) = 20\ \mathrm{A}$$

Соответственно, при токе в 20 А второй амперметр покажет значение в 2 А, в то время как первый будет зашкаливать.

Задача 3

Клава придумала следующую систему автоматического полива. На ее участке у самого края грядки на постаменте стоит бочка для воды. Клава решила просверлить в стенке бочки маленькое отверстие и снабдить его пробкой. По задумке, она будет наполнять бочку водой доверху, а затем открывать отверстие, и струйка воды из него будет литься на грядку. Какова наибольшая длина грядки, которую можно целиком полить таким способом? На каком расстоянии от дна бочки для этого нужно проделать отверстие? Высота постамента a, высота бочки $b>a$. Считайте воду идеальной несжимаемой жидкостью, ее течение ламинарным, а диаметр отверстия много меньше диаметра бочки. Струя воды из бочки вылетает горизонтально. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Примечание. Ламинарным называется течение жидкости, при котором ее слои не перемешиваются. Траектории движения малых элементов жидкости не пересекаются и называются линиями тока. Идеальной называется жидкость с нулевой вязкостью, т.е. при течении между ее слоями не возникает трения. Для установившегося ламинарного течения идеальной несжимаемой жидкости справедлив закон Бернулли: вдоль линии тока сумма давления и объемных плотностей кинетической и потенциальной энергии жидкости остается постоянной: $p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = const$.

Решение.

Рассмотрим линию тока от поверхности воды до отверстия и запишем закон Бернулли. Пусть в некоторый момент высота столба воды над отверстием равна h_1. И у поверхности жидкости, и снаружи у отверстия давление равно атмосферному. Поскольку площадь отверстия много меньше площади поверхности жидкости, то ясно, что скорость у поверхности жидкости пренебрежимо мала по сравнению со скоростью вытекания струи v. Тогда $\rho v^2/2 \ = \rho g h_1$, откуда скорость вытекания равна $v = \sqrt{2gh_1}$.

Обозначим расстояние от основания бочки до отверстия H. Рассчитаем, на каком расстоянии от бочки L малый объем воды, вылетевший из отверстия горизонтально с начальной скоростью v, упадет на землю. Отверстие находится на высоте $H + a$ над землей, поэтому время полета будет равно $t = \sqrt{2(H+a)/g}$. Тогда длина полета $L = vt = 2\sqrt{(H+a)h_1}$.

Учитывая, что когда бочка заполнена доверху, $h_1 = b - H$, получим максимальное расстояние, до которого добьет струя из отверстия:

$$L_{max} = 2\sqrt{(H+a)(b-h)} = 2\sqrt{ab \ + \ H(b-a) - H^2}$$

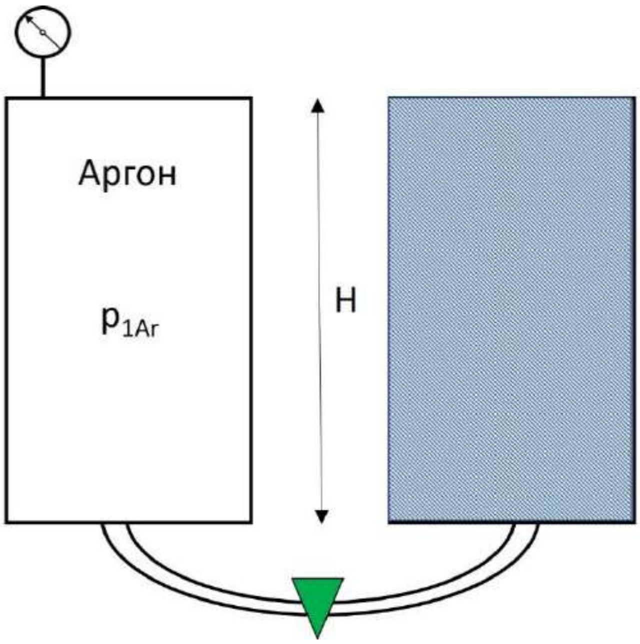
Максимум квадратного трехчлена под корнем достигается при $H = (b - a)/2$. На таком расстоянии от дна бочки нужно сделать отверстие, чтобы длина дорожки полива была максимально возможной. Найдем ее значение, подставив H в выражение для L_{max}:

$$L_{max} = 2\sqrt{ab\ + (b - a)^2/4} = b + a.$$

Ответ: $H = (b - a)/2, L_{max} = b + a.$

Задача 4

Два одинаковых цилиндрических запаянных сосуда герметично соединены у дна тонкой перемычкой. В перемычку встроен кран-натекатель, который изначально закрыт. Один из сосудов полностью заполнен водой, другой – аргоном при давлении p_{Ar}. В заполненном аргоном сосуде установлен манометр, позволяющий измерять давление газа в сосуде. Кран открывают, вода начинает медленно перетекать. После установления равновесия манометр показывал давление, в n раз большее начального. Определите высоту сосудов. Температура в сосудах остается постоянной. Ускорение свободного падения, плотность воды, плотность и давление насыщенных паров воды при данной температуре считайте известными. Растворением аргона в воде пренебречь.



Решение

После открытия крана вода будет медленно перетекать из правового сосуда в левый, высота столба жидкости в нем будет увеличиваться, объем, предоставляемый аргону, будет уменьшаться, его давление будет увеличиваться. Поскольку перетекание медленное, то со свободной поверхности воды будет происходить испарение, и к давлению аргона будет прибавляться давление паров воды. По той же причине в конце пары будут насыщенными.

В правом же сосуде высота столба жидкости будет уменьшаться, освобождающийся объем будет заполняться насыщенным паром по мере испарения воды. Так как перетекание медленное, пары будут успевать достигать насыщенного состояния. Перетекание прекратится, когда давление в перемычке уравновеситься.

Введем обозначения, характеризующие конечное состояние: h_1', h_2' – новые высоты столбов жидкости в сосудах, p_{Ar1}' – новое парциальное давление аргона в левом сосуде, H – высота сосуда. Поскольку процесс изотермический, то для аргона можно записать:

$$p_{Ar}SH = p_{Ar}'S(H - h_1') => p_{Ar}' = p_{Ar}\frac{H}{H - h_1'}$$

При этом, показания манометра в конце есть сумма нового парциального давления аргона и давления насыщенного водяного пара:

$$\frac{p_{Ar}' + p_{\text{пар}}}{p_{Ar}} = n => p_{Ar}' = np_{Ar} - p_{\text{пар}}$$

Откуда:

$$np_{Ar} - p_{\text{пар}} = p_{Ar}\frac{H}{H - h_1'} => H - h_1' = \frac{H}{n - \frac{p_{\text{пар}}}{p_{Ar}}} => h_1' = H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

Распишем условие равенства давлений в перемычке. В левом сосуде это давление столба жидкости высотой h_1' плюс суммарное давление аргона и насыщенного водяного пара (что есть показания манометра), в правом – давление столба жидкости высотой h_2' и давление насыщенного пара над водой:

$$\rho_{\text{воды}}gh_1' + np_{Ar} = \rho_{\text{воды}}gh_2' + p_{\text{пар}} => \rho_{\text{воды}}g(h_2' - h_1') = np_{Ar} - p_{\text{пар}} => h_2' - h_1' = \frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}}g}$$

Откуда:

$$h_2' = \frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}}g} + H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

Количество молекул воды в сосуде остается постоянным. Изначально вся вода находилась только в жидком состоянии (M – масса молекулы воды):

$$N = \frac{\rho_{\text{воды}}}{M}SH$$

Затем – жидкая вода и пар в каждом из сосудов:

$$N = \frac{\rho_{\text{воды}}}{M}S(h_1' + h_2') + \frac{\rho_{\text{пара}}}{M}S(H - h_1' + H - h_2')$$

Приравняем и получаем:

$$\rho_{\text{воды}}H = \rho_{\text{воды}}(h_1' + h_2') + \rho_{\text{пара}}(2H - h_1' - h_2')$$

$$\rho_{\text{воды}}(H - h_1' - h_2') = \rho_{\text{пара}}(2H - h_1' - h_2')$$

Откуда выражаем высоту сосудов H:

$$\rho_{\text{воды}}H - \rho_{\text{воды}}(h_1' + h_2') = 2\rho_{\text{пара}}H - \rho_{\text{пара}}(h_1' + h_2')$$

$$\rho_{\text{воды}}(h_1' + h_2') - \rho_{\text{пара}}(h_1' + h_2') = H(\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}})$$

$$(h_1' + h_2')(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}) = H(\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}})$$

$$H = \frac{(h_1' + h_2')(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}{\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}}}$$

Далее подставляем ранее полученные выражения для h_1' и h_2':

$$h_1' = H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

$$h_2' = \frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}} g} + H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

$$h_1' + h_2' = \frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}} g} + 2H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

$$H = \frac{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}{\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}}}\left(\frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}} g} + 2H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{p_{Ar}n - p_{\text{пар}}}\right)\right)$$
$$= \frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}} g}\frac{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}{\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}}} + 2H\frac{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}{\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}}}\left(1 - \frac{p_{Ar}}{p_{Ar}n - p_{\text{пар}}}\right)$$

$$H\left(1 - 2\frac{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}{\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}}}\left(1 - \frac{p_{Ar}}{p_{Ar}n - p_{\text{пар}}}\right)\right) = \frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}} g}\frac{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}{\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}}}$$

Ответ:

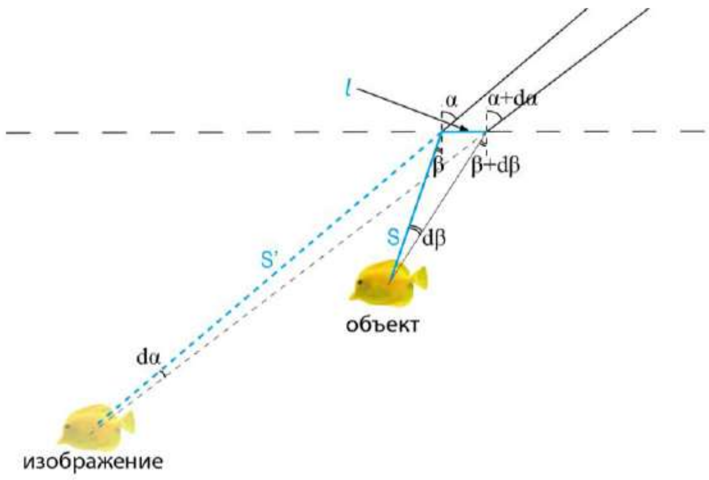
$$H = \frac{\left(\frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}} g}\frac{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}{\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}}}\right)}{\left(1 - 2\frac{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}{\rho_{\text{воды}} - 2\rho_{\text{пара}}}\left(1 - \frac{p_{Ar}}{p_{Ar}n - p_{\text{пар}}}\right)\right)} \approx \frac{\left(\frac{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}{\rho_{\text{воды}} g}\right)}{\left(1 - 2\left(1 - \frac{p_{Ar}}{p_{Ar}n - p_{\text{пар}}}\right)\right)}$$

Задача 5

Рыбак, стоящий на берегу водоема, наблюдает под углом α к вертикали рыбу, находящуюся под водой. Ему кажется, что рыба находится на глубине y'. Определите, на какой реальной глубине находится рыба. Коэффициент преломления воды в водоеме примите равным n, коэффициент преломления воздуха – единице. Расстояние от рыбы до рыбака много больше размера рыбы.

Примечание: синус малого угла приближенно равен самому углу, косинус малого угла – единице.

Решение:



Рыбу можно рассматривать как точечный источник света, излучающий во все стороны. При этом до рыбака доходит излучение в малом телесном угле. Поскольку для построения изображения необходимо два луча, то в плоской формулировке можно рассмотреть два крайних луча, попадающие в глаза рыбака, угол между которыми много меньше угла наблюдения, данного по условию.

На рисунке выше представлено, как человек наблюдает рыбу под водой, а также реальное положение рыбы. Здесь введены обозначения: α – угол наблюдения, β – угол преломления, $\mathrm{d}\beta$ – малый угол между рассматриваемыми лучами, S, S' –расстояния до рыбы и до изображения по ходу лучей.

Из закона Снеллиуса найдем угол преломления:

$$\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha)}{n}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}}{n}$$

Также запишем закон Снеллиуса для угла α+dα:

$$\sin(\alpha + d\alpha) = n\sin(\beta + d\beta)$$

Распишем синус суммы:

$$\sin(\alpha + d\alpha) = n\sin(\beta + d\beta)$$

$$\sin(\alpha)\cos(d\alpha) + \cos(\alpha)\sin(d\alpha) = n(\sin(\beta)\cos(d\beta) + \cos(\beta)\sin(d\beta))$$

Учитывая первое выражение и малость углов $d\alpha$ и $d\beta$:

$$\cos(\alpha)\,d\alpha = n\cos(\beta)\,d\beta \Rightarrow \frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{n\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$$

Далее рассмотрим теорему синусов для двух треугольников, образующих основание *l* на границе раздела двух сред (смотри рисунок):

$$\frac{l}{\sin(d\beta)} = \frac{S}{\cos(\beta + d\beta)}$$

$$\frac{l}{\sin(d\alpha)} = \frac{S'}{\cos(\alpha + d\alpha)}$$

Выразим отношение *S/S'*:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\cos(\beta + d\beta)\sin(d\alpha)}{\cos(\alpha + d\alpha)\sin(d\beta)}$$

Преобразуем выражение, воспользовавшись соотношением для косинуса суммы, и учтем малость углов $d\alpha$ и $d\beta$:

$$\frac{S}{S'} = \frac{(\cos(\beta)\cos(d\beta) - \sin(\beta)\sin(d\beta))\sin(d\alpha)}{(\cos(\alpha)\cos(d\alpha) - \sin(\alpha)\sin(d\alpha))\sin(d\beta)} = \frac{\cos(\beta)\,d\alpha}{\cos(\alpha)\,d\beta} = n\left(\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}\right)^2$$

Связь реальной глубины y с кажущейся y':

$$\frac{y}{y'} = \frac{S\cos(\beta)}{S'\cos(\alpha)} = n\left(\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}\right)^3 \Rightarrow y = y'n\left(\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}\right)^3 = y'\frac{(n^2 - \sin^2(\alpha))^{3/2}}{n^2\cos^3(\alpha)}$$

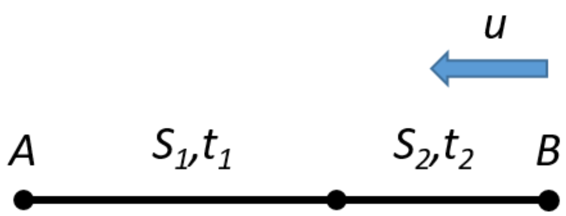
Вариант 2

Задача 1

Конвейерная лента движется с постоянной скоростью u. На ленту в точке A ставят радиоуправляемую машинку (машинка при это неподвижна относительно ленты) и сразу запускают против направления движения ленты в точку B. Машинка сначала движется с постоянным ускорением a, а затем в какой-то момент начинает тормозить с тем же ускорением, и в точку B приезжает с нулевой скоростью относительно неподвижного наблюдателя. Определите расстояние между точками A и B, если за все время движение машинки конвейерная лента прошла расстояние S.

Решение:

Введем обозначения, как показано на рисунке:



$$L = S_1 + S_2 \qquad v(t_1) = -u + at_1 \qquad S_1(t_1) = -ut_1 + \frac{at_1^2}{2}$$

$$v(t_2) = -u + at_1 - at_2 = 0 \text{ (условие равенства нулю скорости в точке B)}$$

$$-u + at_1 - at_2 = 0 => t_1 - t_2 = \frac{u}{a}$$

$$S_2(t_2) = (-u + at_1)t_2 - \frac{at_2^2}{2}$$

$$\begin{cases} L = -ut_1 + \dfrac{at_1^2}{2} + (-u + at_1)t_2 - \dfrac{at_2^2}{2} \\ t_1 - t_2 = \dfrac{u}{a} \end{cases}$$

Получаем квадратное уравнение на t_2:

$$t_2^2 - \left(\frac{u^2}{2a^2} + \frac{L}{a}\right) = 0$$

Находим t_1 и t_2:

$$t_2 = \sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} + \frac{u}{a}$$

Используем условие задачи:

$$\frac{S}{u} = t_1 + t_2 = 2\sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} + \frac{u}{a}$$

Откуда выражаем L через данные задачи:

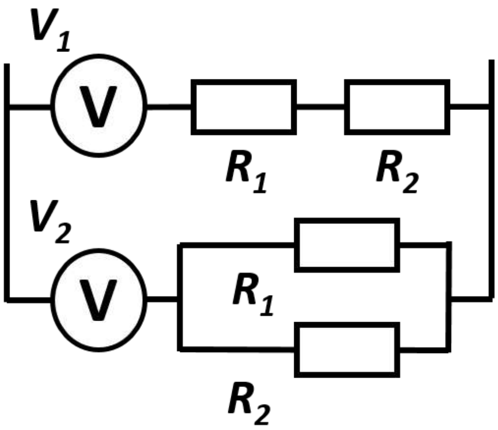
$$\frac{S}{u}-\frac{u}{a}=2\sqrt{\frac{L}{a}+\frac{u^2}{2a^2}}$$

$$\left(\frac{S}{2u}-\frac{u}{2a}\right)^2=\frac{L}{a}+\frac{u^2}{2a^2}$$

$$L=-\frac{S}{2}+\frac{aS^2}{4u^2}-\frac{u^2}{4a}$$

Задача 2

В цепь параллельно подключены два одинаковых неидеальных вольтметра с пределом измерения 12 В. К каждому из них последовательно подключены по два резистора с сопротивлениями R_1=20 кОм и R_2=80 кОм. В одном случае резисторы подключены последовательно друг другу, в другом – параллельно друг другу (см. рисунок). Первый вольтметр показывает U_1=3 В, а второй U_2=10 В. Каковы сопротивления вольтметров? Какое максимальное напряжение в этой цепи может быть измерено с помощью такого подключения этих вольтметров?



Решение:

Обозначим величины, связанные с верхней группой элементов, цифрой 1, с нижней – цифрой 2, сопротивление вольтметров – R_V, напряжения на группах резисторов U_{1R}и U_{2R}.

Вольтметры подсоединены последовательно группам резисторов, поэтому силы тока через вольтметры будут равны току через соответствующие группы резисторов:

$$\frac{U_1}{R_V}=\frac{U_{1R}}{(R_1+R_2)},\qquad \frac{U_2}{R_V}=\frac{U_{1R}(R_1+R_2)}{R_1R_2}$$

При этом, в каждой группе сумма напряжения на вольтметре и напряжения на группе резисторов равна напряжению во всей цепи U:

$$U=U_1+U_{1R}=U_1\left(1+\frac{R_1+R_2}{R_V}\right), U=U_2+U_{2R}=U_2\left(1+\frac{R_1R_2}{R_V(R_1+R_2)}\right)$$

Откуда находим сопротивления вольтметров:

$$U_1\left(1+\frac{R_1+R_2}{R_V}\right)=U_2\left(1+\frac{R_1R_2}{R_V(R_1+R_2)}\right) => R_V=\frac{U_1(R_1+R_2)^2-U_2R_1R_2}{(R_1+R_2)(U_2-U_1)}=20\ \text{кОм}$$

Тогда, полагая, что на вольтметре максимально возможное для измерения напряжение, получаем, что напряжение в цепи и есть то наибольшее напряжение, которое можно измерить в данных условиях:

$$U_{1\max}=U_{max}\left(1+\frac{R_1+R_2}{R_V}\right)=72\ \text{В},\quad U_{2\max}=U_{max}\left(1+\frac{R_1R_2}{R_V(R_1+R_2)}\right)=21.6\ \text{В}$$

Соответственно, при напряжении в 72 В первый вольтметр покажет значение в 12 В, в то время как второй будет зашкаливать.

Задача 3

У Васи на даче есть бочка для сбора дождевой воды, стоящая на постаменте высотой a. Вася просверлил в ее стенке друг под другом два небольших отверстия – верхнее на расстоянии h_1, а нижнее на расстоянии h_2 от дна бочки – и заткнул их пробками. Однажды после дождя, когда оба отверстия оказались под водой, Вася мелком отметил уровень воды в бочке, открыл верхнее отверстие и отметил наиболее удаленное от постамента место, куда попала струя воды. После этого Вася закрыл верхнее отверстие, долил в бочку воды до отметки и открыл нижнее отверстие. Струя упала на землю в ту же точку, что и в предыдущий раз. Какой уровень воды в бочке был после дождя? На каком расстоянии от постамента струи воды падали на землю? Считайте воду идеальной несжимаемой жидкостью, ее течение ламинарным, а диаметр отверстия много меньше диаметра бочки. Струя воды из бочки вылетает горизонтально. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Примечание. Ламинарным называется течение жидкости, при котором ее слои не перемешиваются. Траектории движения малых элементов жидкости не пересекаются и называются линиями тока. Идеальной называется жидкость с нулевой вязкостью, т.е. при течении между ее слоями не возникает трения. Для установившегося ламинарного течения идеальной несжимаемой жидкости справедлив закон Бернулли: вдоль линии тока сумма давления и объемных плотностей кинетической и потенциальной энергии жидкости остается постоянной: $p+\frac{\rho v^2}{2}+\rho gh=const$.

Решение.

Рассмотрим линию тока от поверхности воды до отверстия и запишем закон Бернулли. Пусть в некоторый момент высота столба воды над отверстием равна h. И у поверхности жидкости, и снаружи у отверстия давление равно атмосферному. Поскольку площадь отверстия много меньше площади поверхности жидкости, то ясно, что скорость у поверхности жидкости пренебрежимо мала по сравнению со скоростью вытекания струи v. Тогда $\rho v^2/2\ =\rho gh$, откуда скорость вытекания равна $v=\sqrt{2gh}$.

Обозначим высоту столба воды в бочке после дождя b. Для каждого отверстия рассчитаем расстояние от бочки до места падения малого объема воды, вылетевшего из него горизонтально с начальной скоростью $v_{1,2}$. Отверстия находятся на высоте $h_{1,2}+a$ над землей, поэтому времена полета будут равны $t_{1,2}=\sqrt{2(a+h_{1,2})/g}$. В обоих случаях бочка была заполнена до одного уровня, поэтому $v_{1,2} = \sqrt{2g(b - h_{1,2})}$. Тогда струи из верхнего и нижнего отверстий упали на землю на расстоянии $L_{1,2} = v_{1,2}t_{1,2} = 2\sqrt{(a + h_{1,2})(b - h_{1,2})} = 2\sqrt{ab + h_{1,2}(b - a) - h_{1,2}^2}$ от бочки (индекс 1 соответствует верхнему отверстию, а 2 – нижнему).

По условию эти расстояния равны, $L_1 = L_2$, значит,

$$ab + h_1(b - a) - h_1^2 = ab + h_2(b - a) - h_2^2$$

откуда

$$ {h_1}^2 - {h_2}^2 = (b - a)(h_1 - h_2)$$

По условию отверстия находятся на разной высоте (h_1 не равно h_2). Поэтому, разделив на $h_1 - h_2$, получим

$$h_1 + h_2 = b - a => b = h_1 + h_2 + a$$

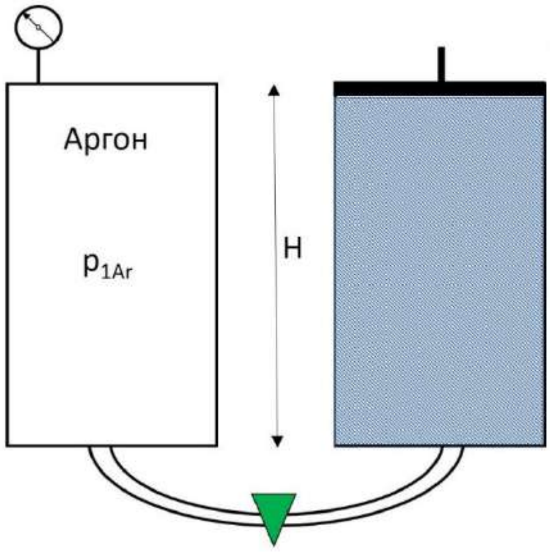
Подставляя найденное значение в выражение для расстояния, получим

$$L = 2\sqrt{(a + h_1)(a + h_2)}$$

Ответ: $b = h_1 + h_2 + a, L = 2\sqrt{(a + h_1)(a + h_2)}$.

Задача 4

Два одинаковых цилиндрических сосуда герметично соединены у дна тонкой перемычкой и расположены в камере, в которой поддерживается постоянное давление p_0. В перемычку встроен кран-натекатель, который изначально закрыт. Один из сосудов запаян и полностью заполнен аргоном, другой заполнен водой и закрыт подвижным невесомым поршнем, двигающимся без трения. В заполненном аргоном сосуде установлен манометр, позволяющий измерять давление газа в сосуде. Кран открывают, вода начинает медленно перетекать. После установления равновесия манометр показывал давление, в n раз большее начального. Определите высоту запаянного сосуда. Температура в сосудах остается постоянной. Ускорение свободного падения, плотность воды, плотность и давление насыщенных паров воды при данной температуре считайте известными. Растворением аргона в воде пренебречь.



Решение

После открытия крана вода будет медленно перетекать из правового сосуда в левый, высота столба жидкости в нем будет увеличиваться, объем, предоставляемый аргону, будет уменьшаться, его давление будет увеличиваться. Поскольку перетекание медленное, то со свободной поверхности воды будет происходить испарение, и к давлению аргона будет прибавляться давление паров воды. По той же причине в конце пары будут насыщенными.

В правом же сосуде высота столба жидкости будет уменьшаться, подвижный поршень будет опускаться вместе с уровнем жидкости. Перетекание прекратится, когда давление в перемычке уравновеситься.

Введем обозначения, характеризующие конечное состояние: h_1', h_2' – новые высоты столбов жидкости в сосудах, p_{Ar1}' – новое парциальное давление аргона в левом сосуде, H – высота сосуда. Поскольку процесс изотермический, то для аргона можно записать:

$$p_{Ar}SH = p_{Ar}'S(H - h_1') => p_{Ar}' = p_{Ar}\frac{H}{H - h_1'}$$

При этом, показания манометра в конце есть сумма нового парциального давления аргона и давления насыщенного водяного пара:

$$\frac{p_{Ar}' + p_{\text{пар}}}{p_{Ar}} = n => p_{Ar}' = np_{Ar} - p_{\text{пар}}$$

Откуда:

$$np_{Ar} - p_{\text{пар}} = p_{Ar}\frac{H}{H - h_1'} => H - h_1' = \frac{H}{n - \frac{p_{\text{пар}}}{p_{Ar}}} => h_1' = H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

Распишем условие равенства давлений в перемычке. В левом сосуде это давление столба жидкости высотой h_1' плюс суммарное давление аргона и насыщенного водяного пара (что есть показания манометра), в правом – давление столба жидкости высотой h_2'

$$\rho_{\text{воды}}gh_1' + np_{Ar} = \rho_{\text{воды}}gh_2' + p_0 => \rho g(h_2' - h_1') = np_{Ar} - p_0 => h_2' - h_1' = \frac{np_{Ar} - p_0}{\rho_{\text{воды}}g}$$

Откуда:

$$h_2' = \frac{np_{Ar} - p_0}{\rho_{\text{воды}} g} + H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

Количество молекул воды в сосуде остается постоянным. Изначально вся вода находилась только в жидком состоянии (M – масса молекулы воды):

$$N = \frac{\rho_{\text{воды}}}{M} SH$$

Затем – жидкая вода в левом и правом сосуде и пар в левом сосуде:

$$N = \frac{\rho_{\text{воды}}}{M} S(h_1' + h_2') + \frac{\rho_{\text{пара}}}{M} S(H - h_1')$$

Приравняем и получаем:

$$\rho_{\text{воды}} H = \rho_{\text{воды}}(h_1' + h_2') + \rho_{\text{пара}}(H - h_1')$$

$$\rho_{\text{воды}}(H - h_1' - h_2') = \rho_{\text{пара}}(H - h_1')$$

Откуда выражаем высоту сосудов H:

$$\rho_{\text{воды}} H - \rho_{\text{воды}}(h_1' + h_2') = \rho_{\text{пара}} H - \rho_{\text{пара}} h_1'$$

$$\rho_{\text{воды}}(h_1' + h_2') - \rho_{\text{пара}} h_1' = H(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})$$

$$h_1'(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}) + \rho_{\text{воды}} h_2' = H(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})$$

$$H = \frac{h_1'(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}) + \rho_{\text{воды}} h_2'}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}} = h_1' + \frac{\rho_{\text{воды}} h_2'}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}$$

Далее подставляем ранее полученные выражения для h_1' и h_2':

$$h_1' = H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

$$h_2' = \frac{np_{Ar} - p_0}{\rho_{\text{воды}} g} + H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

$$H = h_1' + \frac{\rho_{\text{воды}} h_2'}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}} = H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right) + \left(\frac{np_{Ar} - p_0}{\rho_{\text{воды}} g} + H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)\right)\frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}} =$$

$$= H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right) + \frac{np_{Ar} - p_0}{g(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})} + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}} H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)$$

$$= H\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)\left(1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\right) + \frac{np_{Ar} - p_0}{g(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}$$

$$H\left(1 - \left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)\left(1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\right)\right) = \frac{np_{Ar} - p_0}{g(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}$$

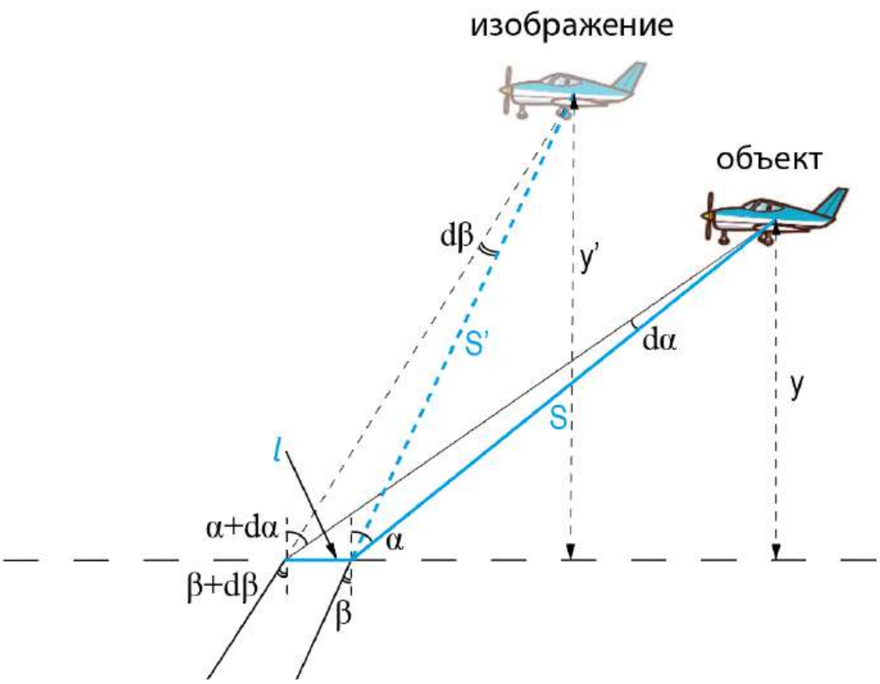
$$H = \frac{np_{Ar} - p_0}{g(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}\left(1 - \left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)\left(1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\right)\right)^{-1}$$

$$H = \frac{np_{Ar} - p_0}{g(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}\left(1 - \left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)\left(1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\right)\right)^{-1}$$
$$\approx \frac{np_{Ar} - p_0}{g(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}\left(1 - 2\left(1 - \frac{p_{Ar}}{np_{Ar} - p_{\text{пар}}}\right)\right)^{-1}$$

Задача 5

Водолаз, находящийся под водой, наблюдает летящий в небе самолет. Ему кажется, что самолет все время летит на одной и той же высоте y'. Коэффициент преломления воды равен n, коэффициент преломления воздуха считать равным единице. Определите:
1. Как зависит истинная высота самолета от угла наблюдения водолаза (угол наблюдения отсчитывайте от вертикали)?
2. При каких углах наблюдения самолет остается видимым для водолаза?
Примечание: синус малого угла приближенно равен самому углу, косинус малого угла – единице.

Решение



Самолет можно рассматривать как точечный источник света, излучающий во все стороны. При этом до водолаза доходит излучение в малом телесном угле. Поскольку для построения изображения необходимо два луча, то в плоской формулировке можно рассмотреть два крайних луча, попадающие в глаза водолаза, угол между которыми много меньше угла наблюдения.

На рисунке выше представлено, как водолаз наблюдает самолет над водой, а также реальное положение самолета. Здесь введены обозначения: α – угол падения, β – угол преломления, $\mathrm{d}\beta$ – малый угол между рассматриваемыми лучами, S, S' –расстояния до самолета и до изображения по ходу лучей.

Из закона Снеллиуса найдем угол преломления:

$$\sin(\alpha) = n\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - n^2\sin^2(\beta)}$$

Также запишем закон Снеллиуса для угла α+dα:

$$\sin(\alpha + d\alpha) = n\sin(\beta + d\beta)$$

Распишем синус суммы:

$$\sin(\alpha)\cos(d\alpha) + \cos(\alpha)\sin(d\alpha) = n(\sin(\beta)\cos(d\beta) + \cos(\beta)\sin(d\beta))$$

Учитывая первое выражение и малость углов $d\alpha$ и $d\beta$:

$$\cos(\alpha)\, d\alpha = n\cos(\beta)\, d\beta$$

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{n\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$$

Далее рассмотрим теорему синусов для двух треугольников, образующих основание *l* на границе раздела двух сред (смотри рисунок):

$$\frac{l}{\sin(d\beta)} = \frac{S'}{\cos(\beta + d\beta)}$$

$$\frac{l}{\sin(d\alpha)} = \frac{S}{\cos(\alpha + d\alpha)}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{\cos(\alpha + d\alpha)\sin(d\beta)}{\cos(\beta + d\beta)\sin(d\alpha)}$$

Преобразуем выражение, воспользовавшись соотношением для косинуса суммы, и учтем малость углов $d\alpha$ и $d\beta$:

$$\frac{S}{S'} = \frac{(\cos(\alpha)\cos(d\alpha) - \sin(\alpha)\sin(d\alpha))\sin(d\beta)}{(\cos(\beta)\cos(d\beta) - \sin(\beta)\sin(d\beta))\sin(d\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)\, d\beta}{\cos(\beta)\, d\alpha} = \frac{1}{n}\left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}\right)^2$$

Отношение истинной высоты y к кажущейся y':

$$\frac{y}{y'} = \frac{S\cos(\alpha)}{S'\cos(\beta)} = \frac{1}{n}\left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}\right)^3$$

$$y = \frac{y'}{n}\left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}\right)^3 = \frac{y'}{n}\left(\frac{\sqrt{1 - n^2\sin^2(\beta)}}{\cos(\beta)}\right)^3$$

Предельные углы наблюдения самолета соответствует бесконечному удалению объекта от водолаза, то есть когда угол преломления равен углу полного внутреннего отражения (α=90°). Соответственно, угол наблюдения меняется от 0° до β_{crit} (или от -β_{crit} до β_{crit}).

$$\beta_{crit} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Вариант 3

Задача 1

Конвейерная лента движется с некоторой постоянной скоростью. У ленты в точках A и B стоят флажки. На ленту у каждого из флажков ставят две одинаковые радиоуправляемые машинки (они при этом неподвижны относительно ленты) и сразу же запускают навстречу друг другу. Каждая из машинок сначала движется с постоянным ускорением, а затем в какой-то момент начинает тормозить с тем же ускорением, и приезжает к противоположному флажку с нулевой скоростью относительно неподвижного наблюдателя. Известно, что та из машинок, которая двигалась против хода ленты, изменила своё ускорение через $\boldsymbol{\tau_1}$ после начала движения. Также известно, что моторчик машинки разгоняет ее до скорости, равной скорости конвейерной ленты, за время $\boldsymbol{\tau_2}$. Определите, сколько времени в пути находилась каждая из машинок.

Решение:

При движении против ленты:

$$L = S_1 + S_2 \qquad v(T_1) = -u + aT_1 \qquad S_1(T_1) = -uT_1 + \frac{aT_1^2}{2}$$

$$v(T_2) = -u + aT_1 - aT_2 = 0 \text{ (условие равенства нулю скорости в точке B)}$$

$$-u + aT_1 - aT_2 = 0 => T_1 - T_2 = \frac{u}{a}$$

$$S_2(T_2) = (-u + aT_1)T_2 - \frac{aT_2^2}{2}$$

$$\begin{cases} L = -uT_1 + \dfrac{aT_1^2}{2} + (-u + aT_1)T_2 - \dfrac{aT_2^2}{2} \\ T_1 - T_2 = \dfrac{u}{a} \end{cases}$$

Получаем квадратное уравнение на T_2: $\qquad T_2^2 - \left(\frac{u^2}{2a^2} + \frac{L}{a}\right) = 0$

Находим T_1 и T_2:

$$T_1 = \sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} + \frac{u}{a} = \boldsymbol{\tau_1}, T_2 = \sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} = \boldsymbol{\tau_1 - \tau_2}$$

$$T = T_1 + T_2 = 2\sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} + \frac{u}{a} = \boldsymbol{2\tau_1 - \tau_2}$$

При движении по ленте:

$$L = s_1 + s_2 \qquad v(t_1) = u + at_1 \qquad s_1(t_1) = ut_1 + \frac{at_1^2}{2}$$

$$v(t_2) = u + at_1 - at_2 = 0 \text{ (условие равенства нулю скорости в точке B)}$$

$$u + at_1 - at_2 = 0 => t_2 - t_1 = \frac{u}{a}$$

$$s_2(t_2) = (u + at_1)t_2 - \frac{at_2^2}{2}$$

$$\begin{cases} L = ut_1 + \dfrac{at_1^2}{2} + (u + at_1)t_2 - \dfrac{at_2^2}{2} \\ t_2 - t_1 = \dfrac{u}{a} \end{cases}$$

Находим t_1 и t_2:

$$t_2 = \sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} = T_2 = \boldsymbol{\tau_1 - \tau_2} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} - \frac{u}{a} = \boldsymbol{\tau_1 - 2\tau_2}$$

$$t = t_1 + t_2 = 2\sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} - \frac{u}{a} = \boldsymbol{2\tau_1 - 3\tau_2}$$

Ответ: Первая машинка в пути $2\tau_1 - 3\tau_2$, вторая машинка в пути $2\tau_1 - \tau_2$.

Задача 2

В ящике лежит множество одинаковых неидеальных амперметров, к каждому из которых припаяны резисторы. Валера перебрал все устройства в ящике и установил:

- К каждому амперметру подключены по два разных резистора, сопротивления которых R_1=0.2 Ом, R_2=0.1 Ом;
- имеются все возможные способы подсоединения этих резисторов к амперметру;
- среди всех конфигураций амперметров и подключенных к ним резисторов минимальный предел измерения тока оказался равным 4 А.

Определите, в какой из конфигураций амперметра и припаянных резисторов будет максимальный предел измерения тока, и рассчитайте его. Внутреннее сопротивление амперметра известно и равно 0.1 Ом.

Пояснение: предел измерения – максимальный ток, протекающий через сегмент цепи, при котором амперметр, подключенный в этот сегмент, не зашкаливает.

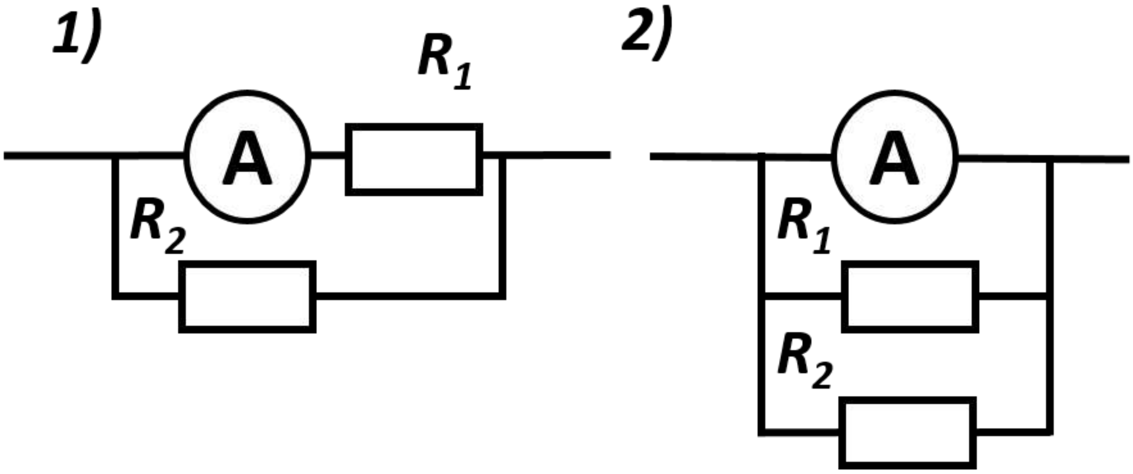
Решение:

Очевидно, что минимальный предел измерения будет достигаться тогда, когда весь ток в цепи будет протекать через амперметр, т. е. тогда, когда параллельно амперметру не подключено никаких сопротивлений (например, все три резистора подключены последовательно амперметру). В этом случае предел измерения конфигурации равен пределу измерения самого амперметра.

При подключении параллельного амперметру сопротивления предел измерения увеличивается, так как часть тока начинает течь через это параллельное сопротивление. Количественно это определяется отношением сопротивления, последовательного амперметру (в том числе внутреннего сопротивления неидеального амперметра), к параллельному сопротивлению. Соответственно, увеличение (уменьшение) предела достигается за счет:

1) Уменьшения (увеличения) параллельного сопротивления;
2) Увеличения (уменьшение) последовательного сопротивления.

С учетом того, что к амперметру подключены 2 резистора, необходимо рассмотреть следующие конфигурации:



Конфигурацию, когда два сопротивления соединены последовательно друг другу и параллельно амперметру не рассматриваем, так как очевидно, что она будет иметь меньший предел по сравнению с конфигурацией 2. Также не рассматриваем конфигурацию, такую же как 1, но в которой резисторы поменяны местами.

Предел измерения тока (обозначим как I_x) для всей конфигурации достигается тогда, когда через амперметр протекает максимально возможный ток (который мы определили ранее). Тогда для конфигурации 1 имеем:

$$I_a(R_a + R_1) = (I_x - I_a)R_2 \Rightarrow I_x = I_a\left(\frac{R_a}{R_2} + \frac{R_1}{R_2} + 1\right) = 4I_a = 16\text{A}$$

Для конфигурации 2:

$$I_aR_2 = (I_x - I_a)\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow I_x = I_a\left(R_a + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\right)\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2} = I_a\left(\frac{R_a}{R_1} + \frac{R_a}{R_2} + 1\right) = \frac{5}{2}I_a = 10\text{A}$$

Получаем, что максимальный предел достигается в конфигурации 1 и равен 16 А.

Задача 3

У Васи на даче есть бочка для сбора дождевой воды, стоящая на постаменте высотой a. Вася просверлил в ее стенке два небольших отверстия – верхнее на расстоянии h_1, а нижнее на расстоянии h_2 от дна бочки – и заткнул их пробками. Однажды после дождя, когда бочка оказалась целиком заполнена, Вася открыл верхнее отверстие. Дождавшись, когда вода перестанет течь, он измерил длину мокрого следа, оставленного на земле струей. После этого Вася открыл нижнее отверстие и так же измерил длину следа. Она оказалась такой же, что и у первого следа. Какой уровень воды в бочке был после дождя? Какова длина мокрых следов? Считайте воду идеальной несжимаемой жидкостью, ее течение ламинарным, а диаметр отверстия много меньше диаметра бочки. Струя воды из бочки вылетает горизонтально. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Примечание. Ламинарным называется течение жидкости, при котором ее слои не перемешиваются. Траектории движения малых элементов жидкости не пересекаются и называются линиями тока. Идеальной называется жидкость с нулевой вязкостью, т.е. при течении между ее слоями не возникает трения. Для установившегося ламинарного течения идеальной несжимаемой жидкости справедлив закон Бернулли: вдоль линии тока сумма давления и объемных плотностей кинетической и потенциальной энергии жидкости остается постоянной: $p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = const$.

Решение.

Рассмотрим линию тока от поверхности воды до отверстия и запишем закон Бернулли. Пусть в некоторый момент высота столба воды над отверстием равна h. И у поверхности жидкости, и снаружи у отверстия давление равно атмосферному. Поскольку площадь отверстия много меньше площади поверхности жидкости, то ясно, что скорость у поверхности жидкости пренебрежимо мала по сравнению со скоростью вытекания струи v. Тогда $\rho v^2/2 \ = \rho g h$, откуда скорость вытекания равна $v = \sqrt{2gh}$.

Обозначим высоту столба воды в бочке после дождя b. Для каждого отверстия рассчитаем расстояние от бочки до места падения малого объема воды, вылетевшего из него горизонтально с начальной скоростью $v_{1,2}$. Отверстия находятся на высоте $h_{1,2} + a$ над землей, поэтому времена полета будут равны $t_{1,2} = \sqrt{2(a + h_{1,2})/g}$. В обоих случаях бочка была заполнена до одного уровня, поэтому $v_{1,2} = \sqrt{2g(b - h_{1,2})}$. Тогда струи из верхнего и нижнего отверстий упали на землю на расстоянии $L_{1,2} = v_{1,2} t_{1,2} = 2\sqrt{(a + h_{1,2})(b - h_{1,2})} = 2\sqrt{ab + h_{1,2}(b - a) - h_{1,2}^2}$ от бочки (индекс 1 соответствует верхнему отверстию, а 2 – нижнему).

По условию эти расстояния равны, $L_1 = L_2$, значит,

$$ab + h_1(b - a) - h_1^2 = ab + h_2(b - a) - h_2^2$$

откуда

$${h_1}^2 - {h_2}^2 = (b - a)(h_1 - h_2)$$

По условию отверстия находятся на разной высоте (h_1 не равно h_2). Поэтому, разделив на $h_1 - h_2$, получим

$$h_1 + h_2 = b - a => b = h_1 + h_2 + a$$

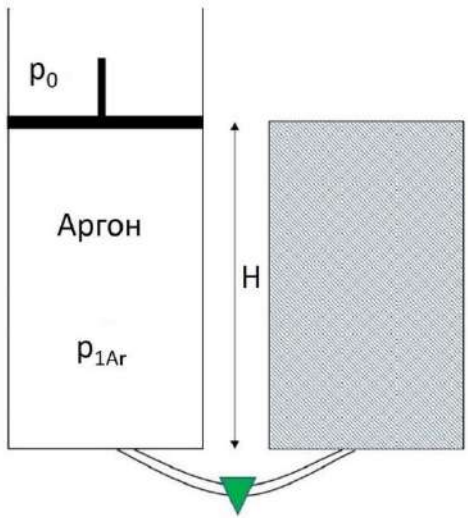
Подставляя найденное значение в выражение для расстояния, получим

$$L = 2\sqrt{(a + h_1)(a + h_2)}$$

Ответ: $b = h_1 + h_2 + a, L = 2\sqrt{(a + h_1)(a + h_2)}$.

Задача 4

Два сосуда одинакового сечения герметично соединены у дна тонкой перемычкой и расположены в камере, в которой поддерживается постоянное давление p_0. В перемычку встроен кран-натекатель, который изначально закрыт. Один из сосудов запаян и полностью заполнен водой, его высота H. Другой сосуд заполнен аргоном и закрыт тонким невесомым герметичным поршнем, способным двигаться без трения. Изначально поршень находится вровень с высотой запаянного сосуда. Кран открывают, вода начинает медленно перетекать. После установления равновесия разность уровней воды в сосудах составила h_x. Определите, на сколько поднялся поршень относительно первоначального уровня. Температура в сосудах остается постоянной. Ускорение свободного падения, плотность воды и давление насыщенных паров воды при данной температуре считайте известными. Растворением аргона в воде пренебречь.



Решение

После открытия крана вода будет медленно перетекать из правового сосуда в левый. Высота столба жидкости в правом сосуде будет уменьшаться, освобождающийся объем будет заполняться насыщенным паром по мере испарения воды. Так как перетекание медленное, пары будут успевать достигать насыщенного состояния.

В левом сосуде высота столба жидкости будет увеличиваться, при этом поршень будет подниматься, давление газа под ним будет оставаться постоянным. Однако, поскольку перетекание медленное, то вода в левом сосуде также будет испаряться. Перетекание прекратится, когда давление в перемычке будет уравновешено. В этом состоянии под поршнем будут аргон и насыщенный водяной пар.

Запишем условие равновесия поршня в конечном состоянии:

$$p_0 = p'_{Ar} + p_{\text{пар}}$$

Для конечного давления аргона через уравнение Менделеева-Клапейрона с учетом постоянной температуры можно записать (начальное давление аргона равно давлению в камере $p_0 = p_{Ar}$):

$$p_0 H = p'_{Ar}(H + \Delta h) => p'_{Ar}H + p_{\text{пар}}H = p'_{Ar}H + p'_{Ar}\Delta H => p'_{Ar} = p_{\text{пар}}\frac{H}{\Delta h}$$

Здесь $\Delta V = S\Delta h$ – изменение объема газа под поршнем. Отметим, что искомое изменение уровня поршня относительно начального есть сумма Δh и высоты столба жидкости в левом сосуде.

Обозначим новые высоты столбов жидкости в левом и правом сосудах как h'_1, h'_2, соответственно. Запишем условие равенства давлений в перемычке:

$$\rho_{\text{воды}} g h'_1 + p_0 = \rho_{\text{воды}} g h'_2 + p_{\text{пар}} => \rho_{\text{воды}} g h'_1 + p'_{Ar} = \rho_{\text{воды}} g h'_2 =>$$

$$\rho_{\text{воды}} g h'_1 + p_{\text{пар}}\frac{H}{\Delta h} = \rho_{\text{воды}} g h'_2$$

Количество молекул воды в сосуде остается постоянным. Изначально вся вода находилась в жидком состоянии было (M – масса молекулы воды):

$$N = \frac{\rho_{\text{воды}}}{M} SH$$

Потом часть воды осталась в жидком состоянии, а часть испарилась и стала водяным паром:

$$N = \frac{\rho_{\text{воды}}}{M} S(h_1' + h_2') + \frac{\rho_{\text{пара}}}{M} S(H + \Delta h + H - h_2')$$

Приравниваем и получаем:

$$\rho_{\text{воды}}(H - h_1' - h_2') = \rho_{\text{пара}}(2H + \Delta h - h_2')$$

Вспомним ранее полученное и учтем, что разность уровней воды дана пол условию:

$$p_{\text{пар}} \frac{H}{\Delta h} = \rho_{\text{воды}} g(h_2' - h_1') => \frac{p_{\text{пар}} H}{\rho_{\text{воды}} g h_x} = \Delta h$$

$$h_2' - h_1' = h_x => h_2' = h_x + h_1{}'$$

Подставляем:

$$\rho_{\text{воды}}(H - 2h_1' - h_x) = \rho_{\text{пара}} \left(2H + \frac{p_{\text{пар}} H}{\rho_{\text{воды}} g h_x} - h_x - h_1{}' \right)$$

$$\rho_{\text{воды}}(H - h_x) - \rho_{\text{пара}} \left(2H + \frac{p_{\text{пар}} H}{\rho_{\text{воды}} g h_x} - h_x \right) = h_1' \left(2\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}} \right)$$

$$\frac{\rho_{\text{воды}}(H - h_x) - \rho_{\text{пара}} \left(2H + \frac{p_{\text{пар}} H}{\rho_{\text{воды}} g h_x} - h_x \right)}{2\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}} = h_1'$$

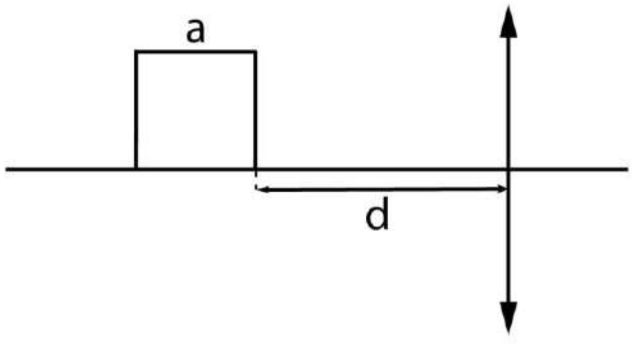
И изменение уровня поршня:

$$\Delta h + h_1' = \frac{p_{\text{пар}} H}{\rho_{\text{воды}} g h_x} + \frac{\rho_{\text{воды}}(H - h_x) - \rho_{\text{пара}} \left(2H + \frac{p_{\text{пар}} H}{\rho_{\text{воды}} g h_x} - h_x \right)}{2\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}$$

Итого по условию даем: высоту сосудов, плотность воды, разность уровней, плотность насыщенных паров (давление паров можно выразить через плотность), температуру.

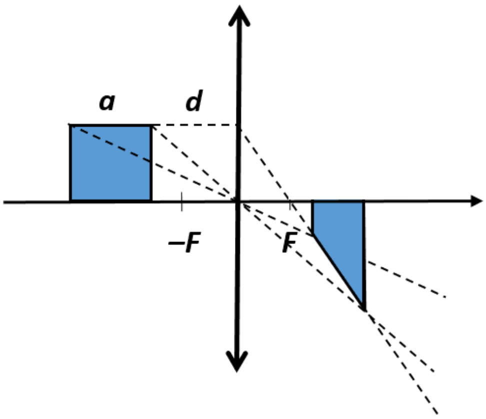
Задача 5

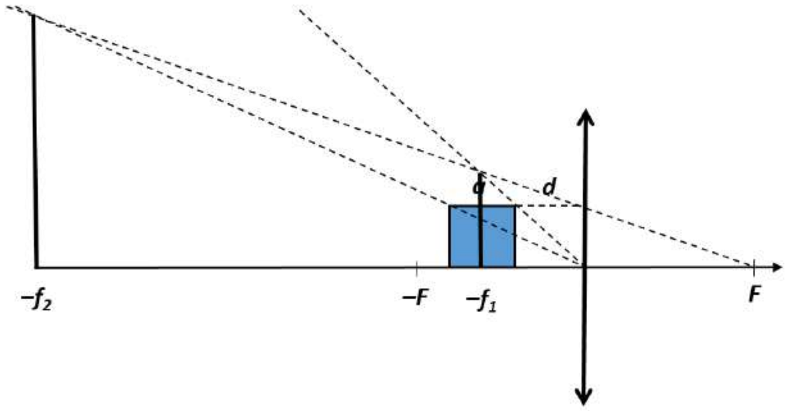
Квадрат со стороной a расположен перед тонкой собирающей линзой с фокусным расстоянием F. Как будет зависеть площадь изображения квадрата в зависимости от расстояния d до поверхности линзы? Приведите примерный график этой зависимости и объясните его вид.



Решение:

Построение изображение приведено на рисунках ниже. Если квадрат находится дальше фокусного расстояния, изображение будет действительным перевернутым. В обратном случае будет наблюдаться прямое мнимое изображение. Если квадрат расположен на фокусе, то изображение будет «разорвано» - часть квадрата будет давать мнимое изображение, часть – действительное.





. Сперва рассмотрим случай, когда объект располагается дальше фокусного расстояния линзы.

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$$

F – фокусное расстояние линзы, *d* – расстояние от объекта до линзы, *f* – расстояние от линзы до изображения.

Строим изображение квадрата, начиная с ближней к линзе грани. По построению на рисунке видно, что изображение ближней грани будет находится дальше от линзы, чем изображение дальней грани.

Обозначим за f_1 координату дальнего изображения, f_2 – ближнего. Имеем:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} => f_1 = \frac{Fd}{d-F}$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d+a} + \frac{1}{f_2} => f_2 = \frac{F(d+a)}{d+a-F}$$

Откуда можем найти высоту трапеции:

$$h = f_1 - f_2 = \frac{Fd}{d-F} - \frac{F(d+a)}{d+a-F} = \frac{F^2 a}{(d-F)(d+a-F)}$$

Обозначим за y_2 высоту ближнего к линзе изображения. Из треугольников имеем:

$$\frac{a}{y_2}=\frac{a+d}{f_2}=\frac{(d+a)(d+a-F)}{F(d+a)}=\frac{d+a-F}{F}=>y_2=\frac{Fa}{d+a-F}$$

По аналогии для y_1:

$$\frac{a}{y_1}=\frac{d}{f_1}=\frac{d(d-F)}{Fd}=\frac{d-F}{F}=>y_1=\frac{Fa}{d-F}$$

Выражение для площади трапеции – полусумма оснований на высоту:

$$S=\frac{y_1+y_2}{2}h=\frac{1}{2}\left(\frac{Fa}{d+a-F}+\frac{Fa}{d-F}\right)\frac{F^2a}{(d-F)(d+a-F)}=\frac{1}{2}\frac{F^3a^2(2d+a-2F)}{(d-F)^2(d+a-F)^2}$$

Рассмотрим случай, когда объект расположен ближе фокуса.

Выражение для высоты в точности то же.

Обозначим за y_1 высоту ближнего к линзе изображения. Из треугольников имеем:

$$\frac{a}{y_1}=\frac{d}{f_1}=\frac{d(F-d)}{Fd}=\frac{F-d}{F}=>y_1=\frac{Fa}{F-d}$$

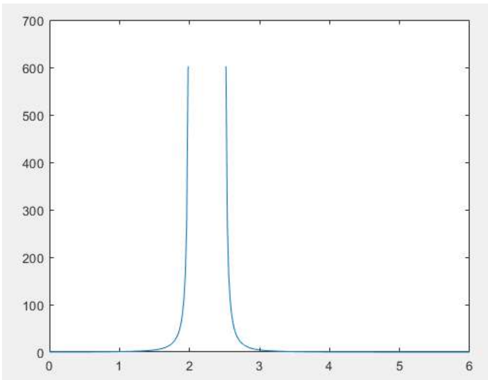
По аналогии для y_2:

$$\frac{a}{y_2}=\frac{a+d}{f_2}=\frac{(d+a)(F-d-a)}{F(d+a)}=\frac{F-d-a}{F}=>y_2=\frac{Fa}{F-d-a}$$

И для площади:

$$S=\frac{y_1+y_2}{2}h=\frac{1}{2}\left(\frac{Fa}{F-d-a}+\frac{Fa}{F-d}\right)\frac{F^2a}{(F-d)(F-d-a)}=\frac{1}{2}\frac{F^3a^2(2F-2d-a)}{(F-d)^2(F-d-a)^2}$$

Вид графика, если построить его полностью:



Нужно заметить, что, когда объект находится какой-то своей частью в фокусе (область между пиками на графике), будет получаться два изображения, площадь каждого из которых будет бесконечна (часть в фокусе будет давать параллельный пучок лучей), поэтому применять ранее приведенные выкладки для площади здесь будет некорректным, и определить площадь как таковую в этой ситуации нельзя.

Вариант 4

Задача 1

У конвейерной ленты в точках A и B на расстоянии L друг от друга стоят флажки. Лента движется с постоянной скоростью u в направлении из A в B. На ленту у каждого из флажков ставят две одинаковые радиоуправляемые машинки (они при этом неподвижны относительно ленты) и сразу же запускают навстречу друг другу. Машинка из точки B движется с постоянным ускорением a. Машинка из точки А сначала также движется с постоянным ускорением a, но затем в какой-то момент начинает тормозить с тем же ускорением и подъезжает к флажку В с нулевой скоростью относительно неподвижного наблюдателя. Определите длину отрезка конвейерной ленты, который преодолеет машинка из точки В за время от начала движения до момента приезда первой машинки к флажку В?

Решение:

Для машинки, движущейся по направлению движения ленты (t_1 – время от начала движения машинки А до момента переключения ускорения на противоположное, S_1 – расстояние, которое она прошла за это время, S_2 – расстояние от S_1 до флажка В, t_2 – время, за которое машинка А проедет это расстояние):

$$L = S_1 + S_2 \qquad v(t_1) = u + at_1 \qquad s_1(t_1) = ut_1 + \frac{at_1^2}{2}$$

$$v(t_2) = u + at_1 - at_2 = 0 \text{ (условие равенства нулю скорости в точке В)}$$

$$u + at_1 - at_2 = 0 => t_2 - t_1 = \frac{u}{a}$$

$$s_2(t_2) = (u + at_1)t_2 - \frac{at_2^2}{2}$$

$$\begin{cases} L = ut_1 + \frac{at_1^2}{2} + (u + at_1)t_2 - \frac{at_2^2}{2} \\ t_2 - t_1 = \frac{u}{a} \end{cases}$$

Находим t_1 и t_2:

$$t_1 = \sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} - \frac{u}{a}, t_2 = \sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}}$$

Суммарное время:

$$t = 2\sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} - \frac{u}{a}$$

И искомое расстояние:

$$S = \frac{at^2}{2} = \frac{a}{2}\left(2\sqrt{\frac{L}{a} + \frac{u^2}{2a^2}} - \frac{u}{a}\right)^2$$

Задача 2

В ящике лежит множество одинаковых неидеальных вольтметров, к каждому из которых припаяны резисторы. Валера перебрал все устройства в ящике и установил:

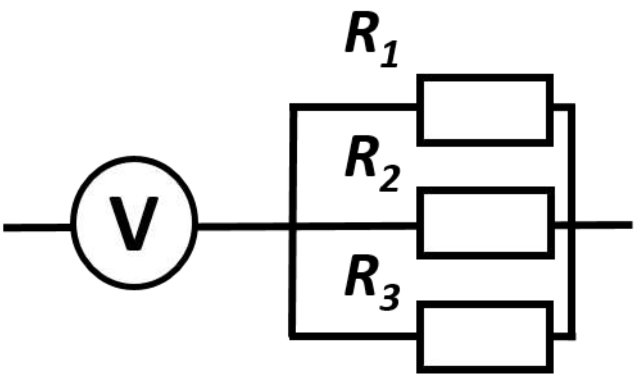
- К каждому вольтметру припаяны по три разных резистора R, $2R$, $3R$;
- имеются все возможные способы подсоединения этих трех резисторов к вольтметру, в которых по крайней мере один резистор подключен последовательно с вольтметром;

- Среди всех конфигураций минимальный предел измерения напряжения оказался равным U_{min}, а максимальный – U_{max}.

Определите внутреннее сопротивление и предел измерения одиночного вольтметра.

Решение

При подключении последовательно вольтметру сопротивления предел измерения увеличивается, так как часть напряжения начинает падать на этом сопротивлении. Подключение сопротивления параллельно вольтметру при этом ничего не меняет. Поэтому очевидно, что, учитывая ограничения по условию задачи, минимальный предел измерения будет при последовательном подключении к вольтметру одного наименьшего сопротивления, которое может быть составлено параллельным подключением всех трех:



Тогда, если напряжение на вольтметре равно U_V, то

$$I_V = I' => \frac{U_V}{R_V} = \frac{U'}{R'}$$

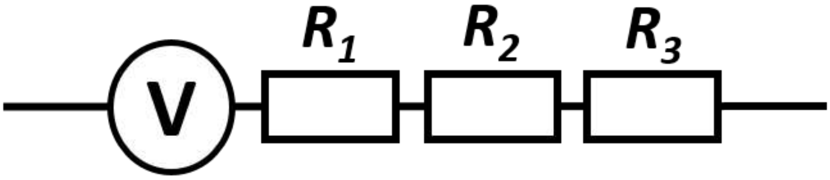
Где R' - общее сопротивление трех параллельно соединенных резисторов:

$$R' = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{6R^3}{2R^2 + 3R^2 + 6R^2} = \frac{6}{11} R$$

И полное напряжение в цепи, при котором на вольтметре будет подать напряжение, равное его номинальному пределу измерения, будет:

$$U_{min} = U_V + U' = U_V \left(1 + \frac{6}{11} \frac{R}{R_V}\right)$$

Максимальный предел измерения тогда будет в конфигурации:



$$U_{max} = U_V + U_1 + U_2 + U_3 = U_V \left(1 + 6 \frac{R}{R_V}\right) => R_V = \frac{6R}{\frac{U_{max}}{U_V} - 1}$$

$$U_{min} = U_V\left(1+\frac{6}{11}\frac{R}{R_V}\right) => R_V = \frac{6}{11}\frac{R}{\left(\frac{U_{min}}{U_V}-1\right)}$$

Приравниваем:

$$\frac{6R}{\frac{U_{max}}{U_V}-1} = \frac{6}{11}\frac{R}{\left(\frac{U_{min}}{U_V}-1\right)}$$

$$11(U_{min}-U_V) = U_{max}-U_V$$

$$U_V = \frac{11U_{min}-U_{max}}{10}$$

$$R_V = \frac{6R}{\frac{10U_{max}}{11U_{min}-U_{max}}-1} = \frac{6R(11U_{min}-U_{max})}{10U_{max}-11U_{min}+U_{max}} = \frac{6R}{11}\frac{11U_{min}-U_{max}}{U_{max}-U_{min}}$$

Задача 3

Для полива грядки Клава использует следующую систему автоматического полива. У самого края грядки на постаменте стоит бочка для воды. Клава взяла бочку, поставила ее на постамент у самого края грядки, просверлила в ее стенке одно под другим два отверстия, и закрыла их пробками. При поливе Клава доверху наполняет бочку, в умеренно дождливый сезон открывает верхнюю пробку, а в засушливый – нижнюю. При этом в обоих случаях струя воды проходится по всей длине грядки. Определите, на каком расстоянии от земли расположены отверстия, если известно, что расстояние между ними H. Высота постамента a, высота бочки b. Считайте воду идеальной несжимаемой жидкостью, ее течение ламинарным, а диаметр отверстия много меньше диаметра бочки. Струя воды из бочки вылетает горизонтально. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Примечание. Ламинарным называется течение жидкости, при котором ее слои не перемешиваются. Траектории движения малых элементов жидкости не пересекаются и называются линиями тока. Идеальной называется жидкость с нулевой вязкостью, т.е. при течении между ее слоями не возникает трения. Для установившегося ламинарного течения идеальной несжимаемой жидкости справедлив закон Бернулли: вдоль линии тока сумма давления и объемных плотностей кинетической и потенциальной энергии жидкости остается постоянной: $p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = const$.

Решение

Рассмотрим линию тока от поверхности воды до отверстия и запишем закон Бернулли. Пусть в некоторый момент высота столба воды над отверстием равна h. И у поверхности жидкости, и снаружи у отверстия давление равно атмосферному. Поскольку площадь отверстия много меньше площади поверхности жидкости, то ясно, что скорость у поверхности жидкости пренебрежимо мала по сравнению со скоростью вытекания струи v. Тогда $\rho v^2/2 \ = \rho g h$, откуда скорость вытекания равна $v = \sqrt{2gh}$.

Обозначим положения отверстий над дном бочки как h_1 и h_2. Для каждого отверстия рассчитаем расстояние от бочки до места падения малого объема воды, вылетевшего из него горизонтально с начальной скоростью $v_{1,2}$. Отверстия находятся на высоте $h_{1,2} + a$ над землей, поэтому времена полета будут равны $t_{1,2} = \sqrt{2(a + h_{1,2})/g}$. В обоих случаях бочка была заполнена до верха, поэтому $v_{1,2} = \sqrt{2g(b - h_{1,2})}$. Тогда струи из верхнего и нижнего отверстий упали на землю на расстоянии $L_{1,2} = v_{1,2}t_{1,2} = 2\sqrt{(a + h_{1,2})(b - h_{1,2})} = 2\sqrt{ab + h_{1,2}(b - a) - h_{1,2}^2}$ от бочки (индекс 1 соответствует верхнему отверстию, а 2 – нижнему).

По условию эти расстояния равны, $L_1 = L_2$, значит,

$$ab + h_1(b - a) - h_1^2 = ab + h_2(b - a) - h_2^2$$

откуда

$${h_1}^2 - {h_2}^2 = (b - a)(h_1 - h_2)$$

По условию отверстия находятся на разной высоте (h_1 не равно h_2). Поэтому, разделив на $h_1 - h_2$, получим

$$h_1 + h_2 = b - a => h_1 = b - a - h_2$$

По условию имеем:

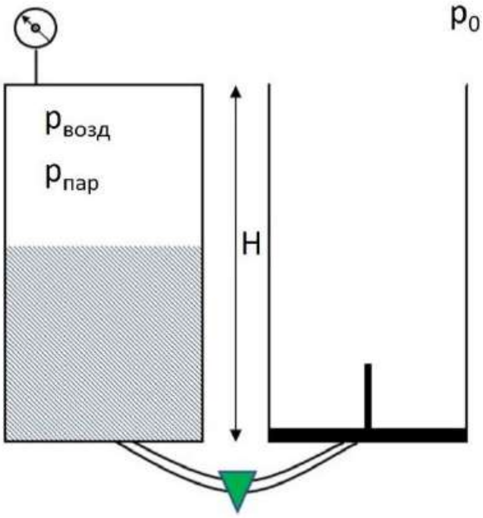
$$h_1 - h_2 = H$$

Тогда

$$h_1 = \frac{b + H - a}{2}, h_2 = \frac{b - H - a}{2}$$

Задача 4

Два одинаковых сосуда высотой H герметично соединены у дна тонкой перемычкой и расположены в камере, в которой поддерживается постоянное давление p_0. В перемычку встроен кран-натекатель, который изначально закрыт. Один из сосудов запаян, в нем находится вода и влажный воздух, на дне другого расположен невесомый герметичный поршень, способный двигаться без трения. В запаянном сосуде установлен манометр, позволяющий измерять давление газа в сосуде. Кран открывают, вода начинает медленно перетекать. После установления равновесия манометр показывал давление, в n раз меньшее первоначального. Определите установившийся уровень воды в запаянном сосуде. Температура в сосудах остается постоянной. Ускорение свободного падения, плотность воды, плотность и давление насыщенных паров воды при данной температуре, а также первоначальные показания манометра считайте известными.



Решение

После открытия крана вода будет медленно перетекать из левого сосуда в правый. Высота столба жидкости в нем будет уменьшаться, объем, предоставляемый влажному воздуху, будет увеличиваться. Поскольку перетекание медленное, то со свободной поверхности воды будет происходить испарение. В правом сосуде высота столба жидкости будет увеличиваться, при этом поршень будет подниматься вместе с подъемом уровня жидкости. Перетекание прекратится, когда давление в перемычке будет уравновешено. В стационарном состоянии в запаянном сосуде будет также находится смесь воздуха и насыщенного пара. Поскольку температура по условию остается постоянной, парциальной давление насыщенных паров в нем не изменится, в то время как парциальное давление воздуха уменьшится.

Введем обозначения: h_1 – начальной уровень воды в запаянном сосуде; h_1', h_2' – конечные высоты столбов жидкости в запаянном и закрытом поршнем сосудах, соответственно; $p_{\text{возд}}$ – начальное парциальное давление воздуха в запаянном сосуде; $p'_{\text{возд}}$ – конечное парциальное давление воздуха в нем; H – высота запаянного сосуда. Поскольку процесс изотермический, то для воздуха можно записать:

$$p_{\text{возд}}S(H-h_1) = p'_{\text{возд}}S(H-h_1') => p'_{\text{возд}} = p_{\text{возд}}\frac{(H-h_1)}{(H-h_1')}$$

Манометр показывает суммарное давление, и по условию нам дано:

$$p_0 = p_{\text{пар}} + p_{\text{возд}}, p_1 = p_{\text{пар}} + p'_{\text{возд}} = p_0/n$$

$$\frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{p'_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}} = n => p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}} = n\left(p_{\text{возд}}\frac{(H-h_1)}{(H-h_1')} + p_{\text{пар}}\right) =>$$

$$=> \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{n} - p_{\text{пар}} = p_{\text{возд}}\frac{(H-h_1)}{(H-h_1')} => \left(\frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{n} - p_{\text{пар}}\right)\frac{(H-h_1')}{p_{\text{возд}}} = H - h_1$$

Распишем условие равенства давлений в перемычке. В левом сосуде это давление столба жидкости высотой h_1' и давление влажного воздуха над водой (что есть показания манометра), в правом – давление столба жидкости высотой h_2':

$$\rho_{\text{воды}}gh_2' = \rho_{\text{воды}}gh_1' + \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{n} => \rho_{\text{воды}}g(h_2' - h_1') = \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{n} => h_2' - h_1' = \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{n\rho_{\text{воды}}g}$$

Откуда:

$$h_2' = h_1' - \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{n\rho_{\text{воды}}g}$$

Количество молекул воды в сосуде остается постоянным. Изначально вся вода была только в левом правом сосуде в жидком и парообразном состояниях (M – масса молекулы воды):

$$N = \frac{\rho_{\text{воды}}}{M}Sh_1 + \frac{\rho_{\text{пара}}}{M}S(H - h_1)$$

Затем – жидкая вода в каждом сосуде и насыщенный пар в запаянном сосуде:

$$N = \frac{\rho_{\text{воды}}}{M}S(h_1' + h_2') + \frac{\rho_{\text{пара}}}{M}S(H - h_1')$$

Приравняем и получаем:

$$\rho_{\text{воды}}h_1 + \rho_{\text{пара}}(H - h_1) = \rho_{\text{воды}}(h_1' + h_2') + \rho_{\text{пара}}(H - h_1')$$

$$h_1(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}) = h_1'(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}) + \rho_{\text{воды}}h_2'$$

$$h_1 = h_1' + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}h_2'$$

Подставляем ранее полученное соотношение между h_1' и h_2':

$$h_1 = h_1' + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\left(h_1' - \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{n\rho_{\text{воды}}g}\right) = h_1'\left(1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\right) - \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{ng(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}$$

Подставляем в ранее полученное:

$$\left(\frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{n} - p_{\text{пар}}\right)\frac{(H - h_1')}{p_{\text{возд}}} = H - h_1'\left(1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\right) + \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{ng(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}$$

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{p_{\text{пар}}}{p_{\text{возд}}}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\right)(H - h_1') = H - h_1'\left(1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\right) + \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{ng(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}$$

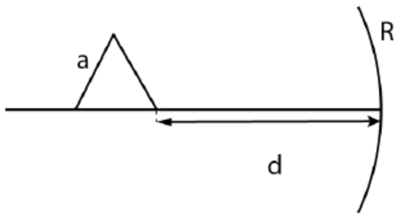
$$h_1'\left(\left(1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{p_{\text{пар}}}{p_{\text{возд}}}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\right)\right)$$
$$= H\left(1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{p_{\text{пар}}}{p_{\text{возд}}}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\right)\right) + \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{ng(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}$$

$$h_1' = \frac{H\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{p_{\text{пар}}}{p_{\text{возд}}}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\right) + \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{ng(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}}{1 + \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}}} - \frac{1}{n} + \frac{p_{\text{пар}}}{p_{\text{возд}}}\left(\frac{1}{n} - 1\right)}$$
$$\approx \frac{H\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{p_{\text{пар}}}{p_{\text{возд}}}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\right) + \frac{p_{\text{возд}} + p_{\text{пар}}}{ng(\rho_{\text{воды}} - \rho_{\text{пара}})}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{p_{\text{пар}}}{p_{\text{возд}}}\left(\frac{1}{n} - 1\right)}$$

Задача 5

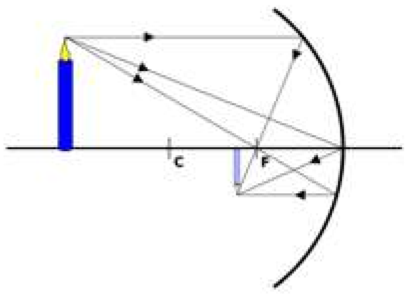
Равносторонний треугольник со стороной a расположен перед вогнутым сферическим зеркалом радиуса R (см. рисунок), при этом $R = 10a$. Как будет зависеть площадь изображения треугольника в зависимости от расстояния d до поверхности линзы? Приведите примерный график этой зависимости и объясните его вид. Считать радиус зеркала много больше грани треугольника.

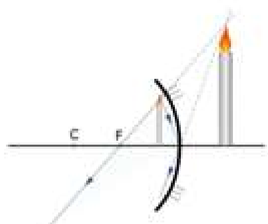
Примечание: фокус вогнутого сферического зеркала расположен перед зеркалом на расстоянии, равном половине радиуса кривизны зеркала.



Решение

Фокусное расстояние сферического зеркала равняется половине радиуса кривизны $F = R/2$. Нужно найти положение трех вершин треугольника в изображении фигуры и определить высоту от вершины, находящейся на расстоянии $d + a/2$. Пример построение изображений в сферическом зеркале:





Сперва рассмотрим случай, когда объект располагается дальше фокусного расстояния линзы ($d > R/2$):

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} => f = \frac{dR}{2d - R}$$

Обозначим за f_1 координату по оси x точки в изображении от ближней к зеркалу вершины треугольника, f_2 – от средней вершины, f_3 – от дальней вершины треугольника. Имеем:

$$f_1 = \frac{dR}{2d - R}$$

$$f_2 = \frac{(d + a/2)R}{2(d + a/2) - R}$$

$$f_3 = \frac{(d+a)R}{2(d+a)-R}$$

Обозначим за h_2 координату по оси y в изображении от средней вершины треугольника. Получим:

$$h_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}(d+a/2)R}{\left(2\left(d+\frac{a}{2}\right)-R\right)(d+a/2)} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}R}{2\left(d+\frac{a}{2}\right)-R}$$

В итоге площадь изображения треугольника будет равна:

$$S = \frac{1}{2}(f_1 - f_3)h_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{dR}{2d-R} - \frac{(d+a)R}{2(d+a)-R}\right)\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}R}{2\left(d+\frac{a}{2}\right)-R}$$

Рассмотрим второй случай, когда треугольник находится ближе фокусного расстояния зеркала:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} => f = \frac{dR}{R-2d}$$

Вновь обозначим за f_1 координату по оси x точки в изображении от ближней к зеркалу вершины треугольника, f_2 – от средней вершины, f_3 – от дальней вершины треугольника. Имеем:

$$f_1 = \frac{dR}{R-2d}$$

$$f_2 = \frac{(d+a/2)R}{R-2(d+a/2)}$$

$$f_3 = \frac{(d+a)R}{R-2(d+a)}$$

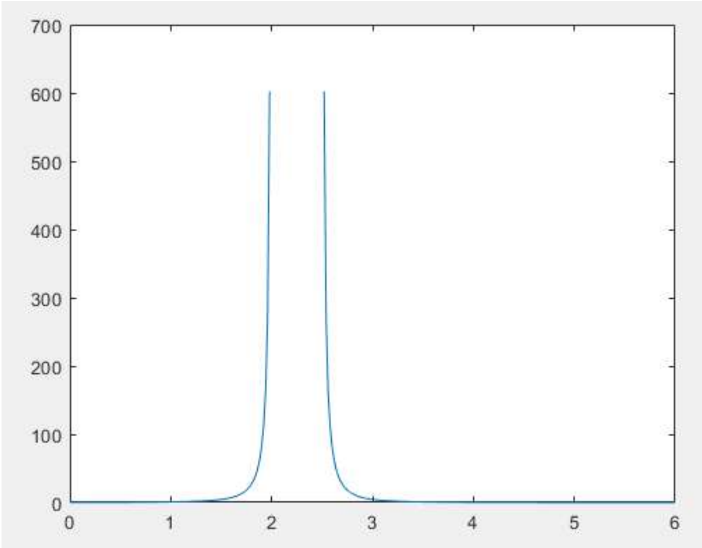
Обозначим за h_2 координату по оси y в изображении от средней вершины треугольника. Получим:

$$h_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}(d+a/2)R}{\left(R-2\left(d+\frac{a}{2}\right)\right)(d+a/2)} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}R}{R-2\left(d+\frac{a}{2}\right)}$$

Площадь изображения треугольника будет равна:

$$S = \frac{1}{2}(f_3 - f_1)h_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{(d+a)R}{2(d+a)-R} - \frac{dR}{2d-R}\right)\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}R}{R-2\left(d+\frac{a}{2}\right)}$$

Получили в точности такое же выражение. Примерный график функции. Изображен для случая R=5 см, a=0.5 см:



Когда объект находится какой-то своей частью в фокусе (часть между пиками на графике), будет получаться два изображения, площадь каждого из которых будет бесконечна (часть в фокусе будет давать параллельный пучок лучей), поэтому применять ранее приведенные выкладки для площади будет некорректным, и определить площадь как таковую в этой ситуации нельзя.