9 класс Вариант 1

Задача 1

В цилиндрический сосуд с площадью основания **200 см^2** налито некоторое количество жидкости плотностью **1.1 г/см^3**. В жидкости плавает кубик, скреплённый с дном сосуда пружиной жёсткостью **8800 Н/м**. Пружина изначально не деформирована. После того, как в сосуд долили ещё **300 мл** той же жидкости, пружина растянулась на **1.25 см**. Верхняя грань кубика все время выступала над поверхностью жидкости. Определите изменение высоты погруженной части кубика.

Решение:

Обозначим изначальное погружение кубика в жидкость как h. В состоянии равновесия пружина не растянута:

$$\rho g S h = mg$$

Где ρ – плотность жидкости, S – площадь основания кубика, m – масса кубика.

Объем жидкости в сосуде V_0 выражается через длину пружины в нерастянутом состоянии x_0 и глубину погружения кубика:

$$V_0 = h(S_0 - S) + x_0 S_0$$

Где S_0 – площадь основания сосуда.

Далее, в сосуд наливают известное количество жидкости V. Пружинка растягивается на Δx, тело погружается в жидкость на Δh. В состоянии равновесия:

$$\rho g S(h + \Delta h) = mg + k\Delta x$$

$$\rho g S \Delta h = k \Delta x$$

Выразим неизвестную площадь основания через Δh:

$$S = \frac{k\Delta x}{\rho g \Delta h}$$

Вновь выразим объем жидкости в сосуде $V_0{}'$ через длину пружины и глубину погружения:

$$V_0' = (h + \Delta h)(S_0 - S) + (x_0 + \Delta x)S_0$$

С другой стороны, новый объем равен изначальному объему плюс добавленному:

$$V_0' = V_0 + V = h(S_0 - S) + x_0 S_0 + V$$

Приравниваем:

$$(h + \Delta h)(S_0 - S) + (x_0 + \Delta x)S_0 = h(S_0 - S) + x_0 S_0 + V$$

$$\Delta h(S_0 - S) + \Delta x S_0 = V$$

Подставляем S:

$$\Delta h S_0 - \Delta h \frac{k\Delta x}{\rho g \Delta h} + \Delta x S_0 = V$$

$$\Delta h - \frac{k\Delta x}{\rho g S_0} + \Delta x = \frac{V}{S_0}$$

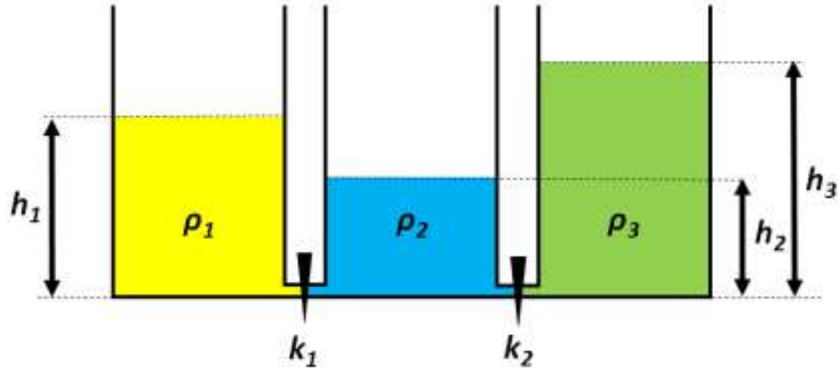
$$\Delta h = \frac{V + \frac{k\Delta x}{\rho g}}{S_0} - \Delta x$$

При подстановке численных значений выясняется, что изменение высоты погруженной части кубика составляет порядка 50 см. Это означает, что сторона кубика превышает 50 см, и площадь его основания уж точно превышает площадь сосуда. Очевидно, что какие-то из значений в условии указаны некорректно.

Ответ: $\frac{V+\frac{k\Delta x}{\rho g}}{S_0} - \Delta x$, численные значения в условии указаны некорректно.

Задача 2

Три одинаковых сосуда соединены тонкими трубками, перекрытыми кранами $\mathbf{k_1}$ и $\mathbf{k_2}$. В сосуды наливают жидкости с плотностями $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$. В левый сосуд наливают жидкость ρ_1 до уровня $\mathbf{h_1 = 14}$ **см**, в центральный — жидкость ρ_2 до уровня $\mathbf{h_2 = 12}$ **см**, в правый — жидкость ρ_3 до уровня $\mathbf{h_3 = 30}$ **см**. Затем открывают кран $\mathbf{k_1}$, дожидаются, когда столбики жидкостей в сосудах придут в равновесие (жидкости не перемешиваются), после чего закрывают. Потом открывают кран $\mathbf{k_2}$, дожидаются равновесия, и закрывают. В результате в центральном и правом сосудах под первоначальной жидкостью образовался слой жидкости из левого сосуда**,** причем его толщина в центральном сосуде оказалась в **2 раза** меньше установившегося уровня жидкости в левом сосуде, а в правом — в **4 раза** меньше. Найдите отношение плотностей $\rho_1:\rho_2:\rho_3$. Жидкости не смешиваются и не выливаются из сосудов.



Решение.

По условию жидкость из левого сосуда оказалась в центральном и правом сосудах. Поэтому, когда открыли кран $\mathbf{k_1}$, жидкость перетекла из левого в центральный и образовала у дна слой некоторой толщиной **a**.

Условие равновесия имеет вид (на g поделили в уме)

$$(h_1 - a)\rho_1 = h_2\rho_2 + a\rho_1 \Rightarrow a = \frac{h_1\rho_1 - h_2\rho_2}{2\rho_1}$$

Закрыли k1, открыли k2. По условию, из центрального в правый затечет только жидкость плотностью ρ_1.

Условие равновесия имеет вид

$$h_2\rho_2 + (a - b)\rho_1 = h_3\rho_3 + b\rho_1 \Rightarrow b = \frac{a\rho_1 + h_2\rho_2 - h_3\rho_3}{2\rho_1}$$

По условию,

$$h_1 - a = p(a - b)$$
$$h_1 - a = qb$$

Отсюда

$$\begin{cases} 2(h_1\rho_1 + h_2\rho_2) = p(h_1\rho_1 - 3h_2\rho_2 + 2\,h_3\rho_3) \\ 2(h_1\rho_1 + h_2\rho_2) = q(h_1\rho_1 + h_2\rho_2 - \ 2h_3\rho_3) \end{cases}$$

Подставим числа:

$$\begin{cases} 2(14\rho_1 + 12\rho_2) = 2(14\rho_1 - 36\rho_2 + 60\rho_3) \\ 2(14\rho_1 + 12\rho_2) = 4(14\rho_1 + 12\rho_2 - 60\rho_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 48\rho_2 = 60\rho_3 \\ 14\rho_1 + 12\rho_2 = 60\rho_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\rho_2}{\rho_3} = \dfrac{5}{4} \\ 14\rho_1 + 12\rho_2 = 96\rho_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\rho_2}{\rho_3} = \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = 6 \end{cases}$$

Задача 3

В сосуде находится некоторое количество воды при температуре **0°C**, система находится в тепловом равновесии. Сосуд нагревают, прикладывая постоянную мощность в течение определённого времени. После прекращения нагрева, когда температуры выровнялись, температура воды составила **50°C**. Эту воды вылили из сосуда и налили в него столько же воды при температуре **0°C**. После повторения процедуры нагрева и установления теплового равновесия температура воды оказалась равной **60°C**. Воду сливают вновь, наливают столько же воды при температуре **0°C** и повторяют нагрев. Какова будет температура воды после установления теплового равновесия? Теплопотерями пренебречь.

Решение:

Напишем баланс тепловых энергий для трёх итераций процесса. Когда заменяем воду сосуд остаётся горячим.

$c*m*T0 + C*T0 + Q = c*m*T1 + C*T1$

$c*m*T0 + C*T1 + Q = c*m*T2 + C*T2$

$c*m*T0 + C*T2 + Q = c*m*T3 + C*T3$

Вычтем из второго и третьего уравнений первое:

$C*(T1-T0) = c*m*(T2-T1) + C*(T2-T1)$

$C*(T2-T0) = c*m*(T3-T1) + C*(T3-T1)$

$C*(2*T1-T2-T0) = c*m*(T2-T1)$

$C = c*m*(T2-T1)/ (2*T1-T2-T0)$

$T3 - T1 = C*(T2-T0) / (c*m + C)$

$T3 = T1 + (T2-T1)*(T2-T0) / ((2*T1-T2-T0)* (1 + (T2-T1)/ (2*T1-T2-T0)))$

$T3 = T1 + (T2-T1)*(T2-T0) / ((2*T1-T2-T0) + (T2-T1))$

$T3 = T1 + (T2-T1)*(T2-T0) / (T1-T0)$

Подставляя значения, получаем T3 = 62°C

Задача 4

Плоскость разделена на две части прямой линией. Деревянный брусок ставят на левую часть плоскости на некотором расстоянии от линии раздела. Известно, что коэффициент трения при движении бруска по левой части равен $\mu_1 = 0.1$, по правой – $\mu_2 = 0.2$. Брусок толкают по направлению, перпендикулярному к линии раздела, с начальной скоростью **v**. Пройдя после пересечения линии раздела расстояние **x=25 см**, он останавливается. Весь путь брусок преодолел за время T_1. Затем его ставят на правую часть плоскости и вновь толкают по направлению, перпендикулярному к линии раздела, с начальной скоростью **u**. Через время T_2 после начала движения брусок останавливается, пройдя после пересечения линии расстояние **y=50 см**. Определите разность **v–u**, если известно, что $\mu_1 T_1 = \mu_2 T_2$. Бруски считайте точечными. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

Решение.

Рассмотрим движение бруска слева направо. Обозначим его массу m.

Сила трения, действующая на брусок на левой части поверхности равна $F_л = \mu_1 g m$, а на правой $F_п = \mu_2 g m$. По второму закону Ньютона ускорение бруска слева равно $a_л = \mu_1 g$, справа $a_п = \mu_2 g$.

Работа силы трения на участке пути справа от линии раздела равна изменению кинетической энергии бруска. Отсюда найдем скорость v_1 бруска на линии раздела:

$$xF_п = \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2\mu_2 g x}.$$

Время движения бруска до пересечения линии равно

$$t_1 = \frac{v - v_1}{a_л} = \frac{v}{\mu_1 g} - \frac{1}{\mu_1}\sqrt{\frac{2\mu_2 x}{g}},$$

а после пересечения

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{2x}{\mu_2 g}}.$$

Отсюда выражается $T_1 = t_1 + \tau_1$.

Аналогично рассматривается движение второго бруска справа налево:

$$t_2 = \frac{u}{\mu_2 g} - \frac{1}{\mu_2}\sqrt{\frac{2\mu_1 y}{g}}, \qquad \tau_2 = \sqrt{\frac{2y}{\mu_1 g}}, \qquad T_2 = t_2 + \tau_2.$$

Используем условие $\mu_1 T_1 = \mu_2 T_2$:

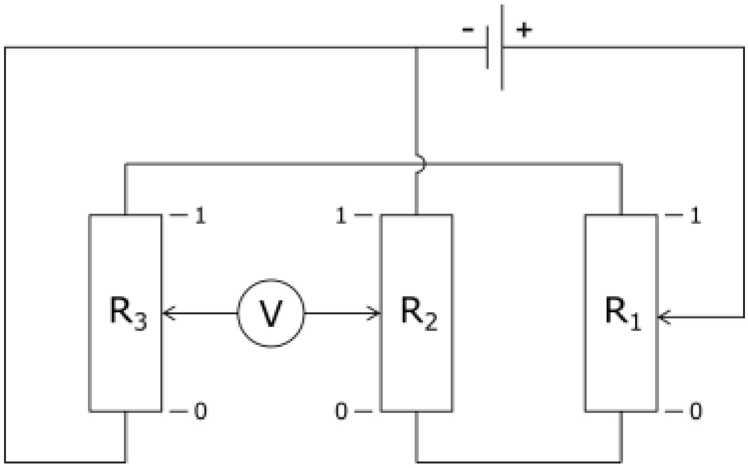
$$0 = \mu_1 T_1 - \mu_2 T_2 = \frac{v - u}{g} + \left(\sqrt{\frac{2x}{\mu_2 g}} + \sqrt{\frac{2y}{\mu_1 g}}\right)(\mu_1 - \mu_2)$$

Отсюда

$$v - u = (\mu_2 - \mu_1)\sqrt{2g}\left(\sqrt{\frac{x}{\mu_2}} + \sqrt{\frac{y}{\mu_1}}\right) = 1{,}5 \text{ м/с}.$$

Задача 5

Три потенциометра подключены в цепь постоянного тока, как показано на рисунке. Варьируя положения подвижных контактов потенциометров, было установлено, что при установленных **посередине** подвижных контактах потенциометров 2 и 3 (положения **0.5**) вольтметр между ними будет показывать **ноль**, если подвижный контакт потенциометра 1 установить в положение **0.1**. Определите отношение $\mathbf{R_3:R_1}$, если известно, что $\mathbf{R_2:R_1 = 3}$.



Примечание: Потенциометр представляет собой резистор с тремя выводами и может быть реализован в виде металлической проволоки, намотанной виток к витку на диэлектрический стержень. Два вывода подключаются к концам проволоки, а третий – к подвижному контакту, скользящему вдоль стержня, обмотанному проволокой.

Решение:

Пусть x и y меняются 0 до 1.

Сопротивление первой части R1 составит x*R1, а второй части (1-x)*R1

Сопротивление первой части R2 составит y*R2, а второй части (1-y)*R2

Сопротивление первой части R3 составит y*R3, а второй части (1-y)*R3

В системе образуются два делителя напряжения:

Первый из (первых частей R1 и R2) и (второй части R2), а второй – из (вторых частей R1 и R3) и (первой частью R3).

Вольтметр будет показывать 0, если коэффициенты деления одинаковы, то есть если одинаково отношение сопротивлений, образующих плечи этих делителей.

Поэтому равенство коэффициентов деления запишется как

(x*R1+y*R2)/(1-y)*R2)=((1-x)*R1+(1-y)*R3)/(y*R3)

Сократим номиналы резисторов, используя соотношение R1:R2:R3 = 1:n:k. n=3, нужно найти k.

(x+y*n)/((1-y)*n)=((1-x)+(1-y)*k)/(y*k)

x*y*k+y^2*n*k=(1-x)*(1-y)*n+(1-y)^2*n*k

$(x*y+y^2*n-(1-y)^2*n)*k=(1-x)*(1-y)*n$

$k=((1-x)*(1-y)*n)/(x*y+y^2*n-(1-y)^2*n)$

Вычисляя значения, получаем **k = 27**.

9 класс Вариант 2

Задача 1

В цилиндрический сосуд налито некоторое количество жидкости плотностью **0.8 г/см³**. В жидкости плавает кубик, скреплённый с дном сосуда и его крышкой пружинами жёсткостью **2000** и **2400 Н/м**, соответственно. Пружины соединены параллельно и изначально не деформированы. Площадь грани кубика в **2 раза** меньше площади основания сосуда. В сосуд долили ещё **687.5 мл** жидкости плотностью **0.64 г/см³**, после чего высота погруженной в первую жидкость части кубика изменилась на **1 см**. Верхняя грань кубика все время выступала над поверхностью жидкости. Определите площадь основания сосуда.

Решение:

Обозначим изначальное погружение кубика в жидкость как h. В состоянии равновесия пружины не растянуты:

$$\rho_1 gSh = mg$$

Где ρ_1 – плотность первой жидкости, S – площадь основания кубика, m – масса кубика.

Объем жидкости в сосуде V_0 выражается через длину нижней пружины в нерастянутом состоянии x_0 и глубину погружения кубика:

$$V_0 = h(S_0 - S) + x_0 S_0$$

Где S_0 – площадь основания сосуда.

Далее, в сосуд наливают известное количество жидкости V плотностью ρ_2. Нижняя пружинка растягивается на Δx, верхняя сжимается на Δx, тело поднимается из первой жидкости на Δh. В состоянии равновесия:

$$\rho_1 S(h - \Delta h)g + \rho_2 S h_2 g = mg + (k_1 + k_2)\Delta x$$

$$-\rho_1 S \Delta h g + \rho_2 S h_2 g = (k_1 + k_2)\Delta x$$

Где h_2 – толщина слоя второй жидкости, которая связана с данным по условию объемом как:

$$h_2 = \frac{V}{S_0 - S}$$

Вновь выразим объем жидкости в сосуде V_0 через длину пружины и глубину погружения:

$$V_0 = (h - \Delta h)(S_0 - S) + (x_0 + \Delta x)S_0$$

Приравниваем:

$$(h - \Delta h)(S_0 - S) + (x_0 + \Delta x)S_0 = h(S_0 - S) + x_0 S_0$$

$$\Delta x S_0 = \Delta h(S_0 - S)$$

$$\Delta x = \Delta h\left(1 - \frac{S}{S_0}\right)$$

Далее:

$$-\rho_1 S\Delta hg + \rho_2 \frac{S}{S_0}\frac{V}{1-\frac{S}{S_0}}g = (k_1+k_2)\Delta h\left(1-\frac{S}{S_0}\right)$$

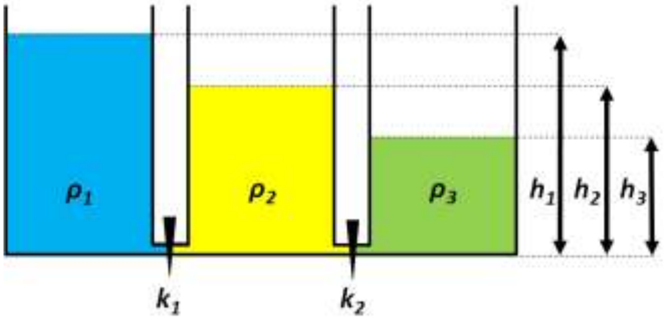
$$S = \frac{\rho_2 \frac{V}{\alpha-1}g - (k_1+k_2)\Delta h\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{\rho_1 \Delta hg}$$

Подставляя данные по условию численные значения, получаем отрицательное значение площади, чего не может быть. Отсюда следует вывод, что описанная в условии ситуация нефизичка.

Ответ: $S = \frac{\rho_2 \frac{V}{\alpha-1}g - (k_1+k_2)\Delta h\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{\rho_1 \Delta hg}$, ситуация нефизична.

Задача 2

Три одинаковых сосуда соединены тонкими трубками, перекрытыми кранами $\mathbf{k_1}$ и $\mathbf{k_2}$. В сосуды наливают жидкости с плотностями $\boldsymbol{\rho_1}$**=1 г/мл**, $\boldsymbol{\rho_2}$**=0.8 г/мл**, $\boldsymbol{\rho_3}$**=0.7 г/мл**. В левый сосуд наливают жидкость $\boldsymbol{\rho_1}$ уровня $\mathbf{h_1}$, в центральный - жидкость $\boldsymbol{\rho_2}$ до уровня $\mathbf{h_2}$, в правый - жидкость $\boldsymbol{\rho_3}$ до уровня $\mathbf{h_3}$. Затем открывают кран $\mathbf{k_2}$, дожидаются, когда столбики жидкостей в сосудах придут в равновесие (жидкости не перемешиваются), после чего закрывают. Потом открывают кран $\mathbf{k_1}$, дожидаются равновесия, и закрывают. В результате высота жидкости в левом сосуде оказалась равна $\mathbf{h_2}$, а толщина слоя жидкости $\boldsymbol{\rho_1}$ в центральном сосуде оказалась равна $\mathbf{h_3}$. Определите отношение начальных высот $\mathbf{h_1{:}h_2{:}h_3}$.



Решение.

Открыли кран k2. Жидкость из центрального сосуда потечет в правый.

Условие равновесия

$$a\rho_2 = (h_2 - a)\rho_2 + h_3\rho_3$$

Высота столба жидкости в центральном сосуде стала равна

$$a = \frac{h_2\rho_2 + h_3\rho_3}{2\rho_2}$$

Закрыли k2, открыли k1. Жидкость из левого сосуда потечет в центральный.

Условие равновесия

$$b\rho_1 = (h_1 - b)\rho_1 + a\rho_2$$

Высота столба жидкости в левом сосуде стала равна

$$b = \frac{h_1\rho_1 + a\rho_2}{2\rho_1} = \frac{2h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + h_3\rho_3}{4\rho_1}$$

Высота слоя жидкости $\boldsymbol{\rho_1}$ в центральном сосуде равна

$$h_1 - b = \frac{2h_1\rho_1 - h_2\rho_2 - h_3\rho_3}{4\rho_1}$$

По условию $b = h_2, h_1 - b = h_3$:

$$\begin{cases} 2h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + h_3\rho_3 = 4\rho_1 h_2 \\ 2h_1\rho_1 - h_2\rho_2 - h_3\rho_3 = 4\rho_1 h_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_2\rho_2 + h_3\rho_3 = 2\rho_1(h_2 - h_3) \\ h_1 = h_3 + h_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{h_2}{h_3} = \frac{2\rho_1 + \rho_3}{2\rho_1 - \rho_2} = 9/4 \\ \frac{h_1}{h_2} = \frac{h_3}{h_2} + 1 = \frac{4\rho_1 + \rho_3 - \rho_2}{2\rho_1 + \rho_3} = 39/27 \end{cases}$$

Задача 3

Имеются три одинаковых термоса. В первом термосе находится лёд при температуре **–20°С**, во втором холодная вода при температуре **0°С**, а в третьем – горячая вода при температуре кипения **100°С**. Массы всех термосов с учётом их содержимого одинаковы. Экспериментатор начинает последовательно измерять температуру веществ в термосах при помощи точного термометра. Изначально термометр находился в термосе со льдом и показывал температуру **–20°С**. После этого экспериментатор перенёс термометр в термос с холодной водой, где после установления теплового равновесия он стал показывать температуру **0°С**. Затем термометр был перенесён в термос с горячей водой, где после установления теплового равновесия он показал температуру **98.2 °С**. Какую температуру покажет термометр после установления теплового равновесия, если его снова поместить в термос с холодной водой? Пренебречь теплообменом с внешней средой и переносом воды или льда вместе с термометром.

Решение:

Пронумеруем термосы: i = 1,2,3.

C – теплоёмкость термоса и вещества в нём. Знаем, что $C_2 = C_3 = C$.

C_t – теплоёмкость термометра.

T_i – температура при первом погружении термометра.

T_i' – температура при втором погружении термометра.

Когда переместили термометр из 1 и 2, то термометр нагрелся, а в воде появилось немного льда:

$Q = M_{ice}*\lambda = C_t*(T_2-T_1)$

Когда переместили из 2 в 3, термометр снова нагрелся, а вода остыла:

$C_t*(T_3'-T_2) = C*(T_3-T_3')$

Когда перенесли из 3 в 2, то термометр остыл, лёд растаял и вода нагрелась

$C_t*(T_3'-T_2') = Q + C*(T_2'-T_2) = C_t*(T_2-T_1) + C*(T_2'-T_2)$

Надо найти T_2'. Выразим его из последнего уравнения

$(C+C_t)*T_2' = C_t*(T_3'-T_2+T_1) + C*T_2$

$T_2' = (C_t*(T_3'-T_2+T_1) + C*T_2\ ) / (C+C_t)$

Теперь выразим C_t через C из второго уравнения:

$C_t = C*(T_3-T_3') / (T_3'-T_2)$

И подставим

$T_2' = ((T_3'-T_2+T_1)*(T_3-T_3') / (T_3'-T_2) + T_2) / (1 + (T_3-T_3') / (T_3'-T_2))$

Упростим

$T_2' = ((T_3' - T_2 + T_1)*(T_3 - T_3') + T_2*(T_3' - T_2)) / (T_2 + T_3)$

Подставляя числа, получаем $T_2' = 1.4$ °C.

Задача 4

Плоскость разделена на две части прямой линией. Деревянный брусок ставят на левую часть плоскости на некотором расстоянии от линии раздела. Известно, что коэффициент трения при движении бруска по левой и правой частям плоскости отличаются. Брусок толкают по направлению, перпендикулярному к линии раздела, с некоторой начальной скоростью. При пересечении линии раздела скорость бруска составила **v_1 = 3 м/с**. Второй такой же брусок ставят на правую часть плоскости и также толкают по направлению, перпендикулярному к линии раздела, с той же начальной скоростью, что и первый. Его скорость при пересечении линии раздела составила **v_2 = 4 м/с**. Известно, что до остановки оба бруска преодолели одинаковое расстояние, и что время движения брусков после пересечения линии раздела также было одинаковым. Во сколько раз дольше двигался первый брусок по сравнению со вторым? Бруски считайте точечными.

Решение.

Обозначим ускорение свободного падения g, начальную скорость брусков v, пройденное каждым бруском расстояние s. Коэффициенты трения слева и справа обозначим μ_1 и μ_2.

Рассмотрим движение первого бруска. Сила трения, действующая на брусок на левой части поверхности, равна $F_л = \mu_1 gm$, а на правой $F_п = \mu_2 gm$. По второму закону Ньютона ускорение бруска слева равно $a_л = \mu_1 g$, справа $a_п = \mu_2 g$.

Работа силы трения на участке пути слева и справа от линии раздела равна соответствующему изменению кинетической энергии бруска:

$$s_л F_л = \frac{m(v^2 - v_1^2)}{2}, s_п F_п = \frac{m v_1^2}{2} \Rightarrow s = s_л + s_п = \frac{v^2 - v_1^2}{2\mu_1 g} + \frac{v_1^2}{2\mu_2 g}.$$

Тоже самое можно записать и для второго бруска:

$$s = \frac{v^2 - v_2^2}{2\mu_2 g} + \frac{v_2^2}{2\mu_1 g}$$

Приравнивая полученные выражения для s, получим

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Время движения первого бруска до и после пересечения линии равны соответственно

$$t_1 = \frac{v - v_1}{a_л} = \frac{v - v_1}{\mu_1 g}, \qquad \tau_1 = \frac{v_1}{a_п} = \frac{v_1}{\mu_2 g}.$$

Аналогично для второго бруска

$$t_2 = \frac{v - v_2}{a_п} = \frac{v - v_2}{\mu_2 g}, \qquad \tau_2 = \frac{v_2}{a_л} = \frac{v_2}{\mu_1 g}.$$

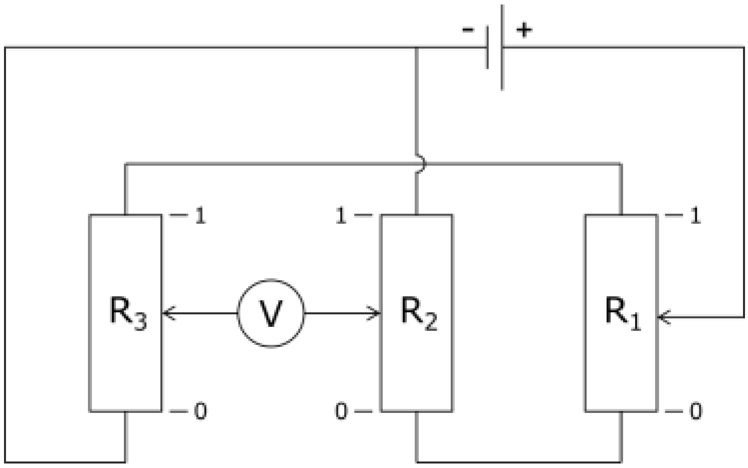
По условию $\tau_1 = \tau_2$, следовательно, $\mu_1 v_1 = \mu_2 v_2$.

Выразим отношение полного времени движения первого бруска к времени движения второго:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{t_1 + \tau_1}{t_2 + \tau_2} = \frac{v + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) v_1}{\frac{\mu_1}{\mu_2} v - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) v_2} = \frac{v_1 v + (v_2 - v_1) v_1}{v_2 v - (v_2 - v_1) v_2} = \frac{v_1 \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2} + v_2 - v_1\right)}{v_2 \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2} - v_2 + v_1\right)} = \frac{9}{8}$$

Задача 5

Три потенциометра подключены в цепь постоянного тока, как показано на рисунке. В каком положении надо установить подвижный контакт потенциометра 1, чтобы при установленных посередине контактах потенциометров 2 и 3 (положение **0.5**) вольтметр показывал нулевое напряжение? Известно, что полные сопротивления потенциометров соотносятся как **R1:R2:R3** = **1:2:6**.



Примечание: Потенциометр представляет собой резистор с тремя выводами и может быть реализован в виде металлической проволоки, намотанной виток к витку на диэлектрический стержень. Два вывода подключаются к концам проволоки, а третий – к подвижному контакту, скользящему вдоль стержня, обмотанному проволокой.

Решение:

Пусть x и y меняются 0 до 1.

Сопротивление первой части R1 составит x*R1, а второй части (1-x)*R1

Сопротивление первой части R2 составит y*R2, а второй части (1-y)*R2

Сопротивление первой части R3 составит y*R3, а второй части (1-y)*R3

В системе образуются два делителя напряжения:

Первый из (первых частей R1 и R2) и (второй части R2), а второй – из (вторых частей R1 и R3) и (первой частью R3).

Вольтметр будет показывать 0, если коэффициенты деления одинаковы, то есть если одинаково отношение сопротивлений, образующих плечи этих делителей.

Поэтому равенство коэффициентов деления запишется как

(x*R1+y*R2)/((1-y)*R2)=((1-x)*R1+(1-y)*R3)/(y*R3)

Необходимо найти x. Сократим номиналы резисторов, используя соотношение R1:R2:R3 = 1:n:k.

(x+y*n)/((1-y)*n)=((1-x)+(1-y)*k)/(y*k)

x*y*k+y^2*n*k=(1-y)*n-(1-y)*n*x+(1-y)^2*n*k

$x*(y*k+(1-y)*n)=(1-y)*n+(1-2*y)*n*k$

$x=((1-y)*n+(1-2*y)*n*k)/(y*k+(1-y)*n)$

Вычисляя значения, получаем **x = 0.25**

9 класс Вариант 3

Задача 1

В цилиндрический сосуд с площадью основания **450 см^2** налито некоторое количество жидкости плотностью **0,72 г/см^3**. В жидкости плавает кубик с длиной ребра **15 см**, скреплённый с дном сосуда двумя параллельно соединенными одинаковыми пружинами жёсткостью **90 Н/м**. Пружины изначально растянуты. На кубик поставили гирьку. В результате модуль упругой силы, действующей на кубик со стороны пружин, не изменился, а объём погруженной части кубика удвоился и стал равен объёму непогруженной части до того, как поставили гирьку. Определите массу гирьки.

Решение:

Обозначим изначальное погружение кубика в жидкость как h. В состоянии равновесия пружины растянуты:

$$\rho g S h = m_1 g + 2k\Delta x$$

Где ρ – плотность жидкости, S – площадь основания кубика, m_1 – масса кубика, k – жесткость пружин, Δx – растяжение пружин.

Объем жидкости в сосуде V_0 выражается через длину пружинки в растянутом состоянии $x_0 + \Delta x$ и глубину погружения кубика:

$$V_0 = h(S_0 - S) + (x_0 + \Delta x)S_0$$

Где S_0 – площадь основания сосуда.

Далее, на кубик ставят гирьку. Пружины теперь сжаты:

$$\rho g S(h + \Delta h) = m_1 g + m_2 g - 2k\Delta x$$

$$\rho g S \Delta h = m_2 g - 4k\Delta x$$

Объём погруженной части кубика удвоился и стал равен объёму непогруженной части до того, как поставили гирьку:

$$h + \Delta h = 2h, \Delta h = h$$

$$h + \Delta h = a - h, h = \frac{a}{3}$$

Вновь выразим объем жидкости в сосуде V_0 через длину пружины и глубину погружения:

$$V_0 = (h + \Delta h)(S_0 - S) + (x_0 - \Delta x)S_0$$

Приравниваем:

$$(h + \Delta h)(S_0 - S) + (x_0 - \Delta x)S_0 = h(S_0 - S) + (x_0 + \Delta x)S_0$$

$$2\Delta x S_0 = \Delta h(S_0 - S)$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}\Delta h\left(1 - \frac{S}{S_0}\right)$$

Далее:

$$m_2 g = \rho g S \Delta h + 2k\Delta h\left(1 - \frac{S}{S_0}\right)$$

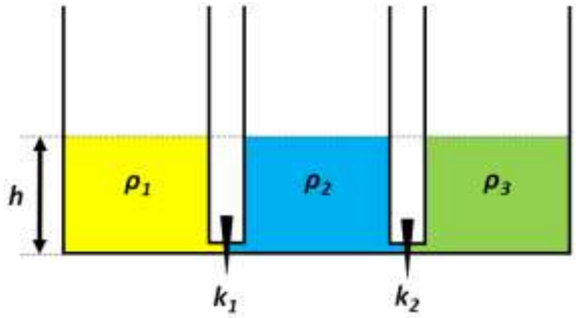
$$m_2 = \frac{a}{3}\left(\rho S + \frac{2k}{g}\left(1 - \frac{a^2}{S_0}\right)\right)$$

$$m_2 = \frac{a}{3}\left(\rho S + \frac{2k}{g}\left(1 - \frac{a^2}{S_0}\right)\right)$$

Ответ: 2070 г.

Задача 2

Три одинаковых сосуда соединены тонкими трубками, перекрытыми кранами $\mathbf{k_1}$ и $\mathbf{k_2}$. В сосуды налиты жидкости с плотностями $\boldsymbol{\rho_1>\rho_3>\rho_2}$. Начальная высота столбиков жидкости в сосудах одинакова и равна **h**. Сначала открывают кран $\mathbf{k_2}$, дожидаются, когда столбики жидкостей в сосудах придут в равновесие, после чего закрывают. Затем открывают кран $\mathbf{k_1}$, дожидаются равновесия, и закрывают. В результате в среднем сосуде образовался столбик из трех жидкостей, причем толщина нижнего слоя оказалась в **10** раз меньше начальной высоты **h**, а среднего – в **9** раз меньше **h**. Найдите отношение плотностей $\boldsymbol{\rho_1 : \rho_3}$ и $\boldsymbol{\rho_3 : \rho_2}$. Жидкости не смешиваются.



Решение.

Открываем кран **k2**. Поскольку по условию $\boldsymbol{\rho_3>\rho_2}$, жидкость из правого сосуда будет затекать в центральный. В равновесии в центральном сосуде будет два слоя жидкости: верхний слой — изначально находившаяся в сосуде жидкость 2 высотой **h**, нижний слой — жидкость 3 высотой h/p (по условию).

В правом сосуде останется столбик высотой $h(1-1/p)$.

Условие равновесия жидкости в центральном и правом сосудах имеет вид

$$\rho_2 gh + \rho_3 gh/p = \rho_3 gh(1-1/p)$$

Отсюда

$$\frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{p}{p-2} = \frac{9}{7}.$$

Закрываем кран **k2**, открываем кран **k1**. По условию жидкость из левого сосуда затекает в центральный, и в равновесии в нем получается три слоя жидкости. Верхний слой - жидкость 2 высотой h, средний слой - жидкость 3 высотой h/p, нижний слой - жидкость 1 высотой h/q (по условию).

В левом сосуде останется столбик высотой $h(1-1/q)$.

Условие равновесия жидкости в центральном и левом сосудах имеет вид

$$\rho_2 gh + \rho_3 gh/p + \rho_1 gh/q = \rho_1 gh(1-1/q)$$

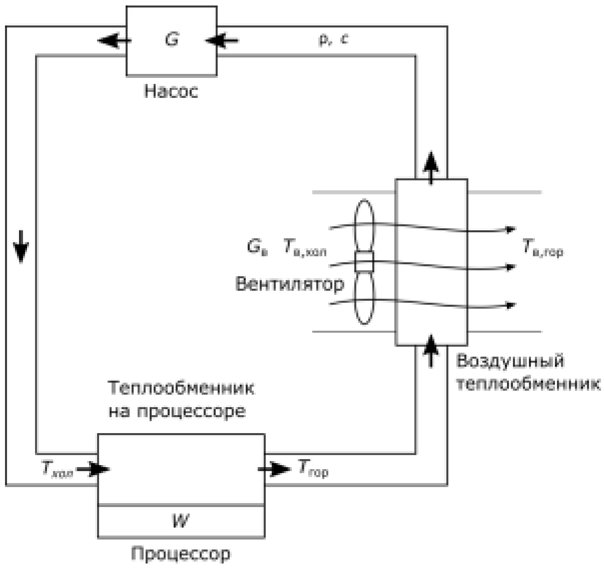
Делим все на ρ_3, находим ρ_1/ρ_3:

$$\frac{\rho_1}{\rho_3} = \frac{q(p-1)}{p(q-2)} = \frac{10}{9}$$

Ответ: $\boldsymbol{\rho_1 : \rho_3 = 10:9}$ **и** $\boldsymbol{\rho_3 : \rho_2 = 9:7}$.

Задача 3

Процессор компьютера охлаждается водяной системой охлаждения, принципиальная схема которой представлена на рисунке. В ней по замкнутому контуру циркулирует теплоноситель с плотностью **ρ = 1000 кг/м^3** и удельной теплоёмкостью ***c* = 4200 Дж/(кг*К)**. Насос, обеспечивая расход теплоносителя ***G* = 6 мл/с**, прокачивает жидкость через теплообменник на процессоре, а затем через теплообменник, обдуваемый вентилятором. При полной загруженности процессора его тепловыделение максимально и составляет ***W* = 100 Вт**. В этом режиме были измерены температура воздуха перед вентилятором **$T_{в,хол}$ = 20°C** и после воздушного теплообменника **$T_{в,гор}$ = 32°C**. При некоторой малой загруженности процессора температура перед вентилятором осталась той же, а температура после воздушного теплообменника уменьшилась до **$T_{в,гор}'$ = 23°C** (при этом скорость вращения вентилятора не изменилась). Чему равна температура жидкости на выходе из теплообменника **$T_{гор}'$** на процессоре, когда он работает в этом режиме неполной нагрузки, если известна температура жидкости **$T_{хол}'$ = 27°C** на входе в этот теплообменник?



Решение:

Для полной загруженности процессора напишем, как выражается мощность процессора через расход, величину нагрева и свойства теплоносителя.

Тепловая энергия $E = m*c*(T_{гор}-T_{хол})$.

Масса $m = \boldsymbol{\rho*}V$.

За единицу времени t:

Объём вещества $V = G*t$

Тогда энергия $E = \boldsymbol{\rho}*c*G*t*(T_{гор}-T_{хол})$.

А мощность – это $W = E/t$.

При этом имеют место два контура – один закрытый с жидким теплоносителем, и один открытый с воздухом. В установившемся режиме как с потоком жидкости, так и с потоком воздуха, должно переносится одинаковое количество энергии (одинаковые мощности).

$W = \boldsymbol{\rho}*c*G*(T_{гор}-T_{хол}) = \boldsymbol{\rho}_в *c_в*G_в*(T_{в,гор}-T_{в,хол})$.

При малой нагрузке аналогично (штрихованные переменные)

$W' = \boldsymbol{\rho}*c*G*(T_{гор}'-T_{хол}') = \boldsymbol{\rho}_в *c_в*G_в'*(T_{в,гор}'-T_{в,хол}')$,

$G_в' = G_в$, $T_{в,хол}' = T_{в,хол}$.

Надо найти $T_{гор}' = W' / (\boldsymbol{\rho} *c*G) + T_{хол}'$, но неизвестна мощность процессора без нагрузки W'.

Поделим выражения

$W'/W = (T_{в,гор}'- T_{в,хол})/ (T_{в,гор}-T_{в,хол})$

$\Rightarrow T_{гор}' = W * (T_{в,гор}'- T_{в,хол})/ ((T_{в,гор}-T_{в,хол}) * (\boldsymbol{\rho} *c*G)) + T_{хол}'$.

Подставляя численные значения, получаем $T_{гор}' = 28°C$

Задача 4

Брусок длиной **L** и массой **M** лежит на шероховатой поверхности. На верхней, идеально гладкой грани бруска, у правого его края стоит маленький грузик массой **m**. Бруску сообщили некоторую скорость (направленную вправо вдоль бруска), стукнув его по левому торцу. После этого брусок проехал расстояние **S=4.2L** за время **t** и остановился. Если бы с бруска сняли грузик перед тем, как сообщить ему начальную скорость, то до остановки он бы проехал расстояние **S'=5L** за время **T**. Найдите отношение **T/t**. Грузик считайте точечным.

Решение.

Обозначим коэффициент трения нижней грани бруска о поверхность μ.

Поскольку верхняя грань бруска идеально гладкая, грузик неподвижен относительно поверхности, пока брусок не пройдет расстояние L. После этого грузик упадет с бруска. Значит, на первом участке пути длиной L на брусок действует сила трения $F_1 = \mu g(m + M)$, а на оставшемся участке пути длиной $s - L$ сила трения равна $F_2 = \mu g M$. По второму закону Ньютона определяются ускорение бруска на этих участках: $a_1 = \mu g(1 + m/M)$, $a_2 = \mu g$.

Обозначим начальную скорость бруска v, скорость бруска в тот момент, когда с него свалился грузик, u. Работа силы трения на втором участке пути равна изменению кинетической энергии:

$$(s - L)F_2 = \frac{Mu^2}{2} \Rightarrow u = \sqrt{2\mu g(s - L)}.$$

Отсюда выражаем время движения бруска:

$$t = \frac{v - u}{a_1} + \frac{u}{a_2} = \frac{Mv}{\mu g(M + m)} + \frac{m}{M + m}\sqrt{\frac{2(s - L)}{\mu g}}$$

и пройденное им расстояние:

$$s = \frac{v^2 - u^2}{2a_1} + \frac{u^2}{2a_2} = \frac{Mv^2}{2\mu g(M + m)} + \frac{m}{M + m}(s - L) \quad \Rightarrow \quad s = \frac{v^2}{2\mu g} - \frac{m}{M}L.$$

Если бы грузика не было:

$$T = \frac{v}{\mu g}, \qquad S = \frac{v^2}{2\mu g}.$$

$$s = S - \frac{m}{M}L \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{S - s}{L} = 0{,}8.$$

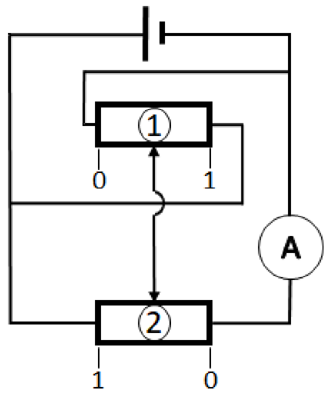
Отношение времен:

$$\frac{T}{t} = \frac{v}{\frac{Mv}{M + m} + \frac{m}{M + m}\sqrt{2\mu g(s - L)}} = \frac{(M + m)v}{v\left(M + m\sqrt{\frac{2\mu g}{v^2}\left(S - \frac{M + m}{M}L\right)}\right)} = \frac{1 + \frac{S - s}{L}}{1 + \frac{S - s}{L}\sqrt{1 - \frac{S - s + L}{S}}}$$

$$= \frac{1{,}8}{1 + 1{,}8 \cdot 0{,}8} = \frac{45}{41}.$$

Задача 5

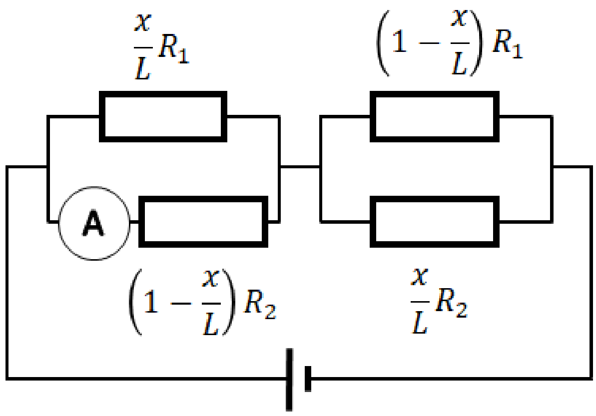
Два потенциометра и амперметр подключены в цепь постоянного тока, как показано на рисунке. Потенциометры одинаковой длины **L**, но разного полного сопротивления, выровнены относительно друг друга, а их подвижные контакты соединены жестким проводом так, что могут передвигаться только вместе. Изначально подвижный контакт потенциометра 1 находился в положении **x = L/2**, отсчитываемом от нуля слева. В некоторый момент времени жесткий провод, соединяющий подвижные контакты потенциометров, смещают в положение **x' = L/3** по шкале потенциометра 1. Показание амперметра после перемещения провода изменилось в **α** раз**.** Определите отношение полных сопротивлений потенциометров 1 и 2. Источник ЭДС – идеальный.



Примечание: Потенциометр представляет собой резистор с тремя выводами и может быть реализован в виде металлической проволоки, намотанной виток к витку на диэлектрический стержень. Два вывода подключаются к концам проволоки, а третий – к подвижному контакту (ползунку), скользящему вдоль стержня, обмотанному проволокой.

Решение:

Эквивалентная схема



Обозначим сопротивление левой пары параллельных резисторов как r_1, правой – r_2. Найдем их:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{L}{xR_1} + \frac{L}{R_2(L-x)} = L\frac{(L-x)R_2 + xR_1}{x(L-x)R_1R_2}$$

$$r_1 = \frac{x(L-x)R_1R_2}{L[(L-x)R_2 + xR_1]} = \frac{\frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)R_1R_2}{R_2 + \frac{x}{L}(R_1 - R_2)}$$

$$r_2 = \frac{x(L-x)R_1R_2}{L[(L-x)R_1 + xR_2]} = \frac{\frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)R_1R_2}{R_1 - \frac{x}{L}(R_1 - R_2)}$$

Полное сопротивление цепи:

$$R_0 = r_1 + r_2 = \frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)R_1R_2\left(\frac{1}{R_2 + \frac{x}{L}(R_1 - R_2)} + \frac{1}{R_1 - \frac{x}{L}(R_1 - R_2)}\right)$$
$$= \frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)R_1R_2\left(\frac{R_1 + R_2}{\left[R_2 + \frac{x}{L}(R_1 - R_2)\right]\left[R_1 - \frac{x}{L}(R_1 - R_2)\right]}\right)$$

Ток через амперметр:

$$I_A = \frac{U_A}{\left(1-\frac{x}{L}\right)R_2} = \frac{\frac{r_1}{R_0}U}{\left(1-\frac{x}{L}\right)R_2}$$

Распишем:

$$\frac{r_1}{R_0} = \frac{\frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)R_1R_2}{R_2 + \frac{x}{L}(R_1 - R_2)} * \frac{\left[R_2 + \frac{x}{L}(R_1 - R_2)\right]\left[R_1 - \frac{x}{L}(R_1 - R_2)\right]}{\frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)R_1R_2(R_1 + R_2)} = \frac{\left[R_1 - \frac{x}{L}(R_1 - R_2)\right]}{(R_1 + R_2)}$$

Тогда для тока через амперметр имеем:

$$I_A = U\frac{\left[R_1 - \frac{x}{L}(R_1 - R_2)\right]}{(R_1 + R_2)\left(1-\frac{x}{L}\right)R_2}$$

Показания амперметра после передвижения подвижный контактов изменилось в α раз:

$$I_A = \alpha I_A{}'$$

$$U\frac{\left[R_1 - \frac{x}{L}(R_1 - R_2)\right]}{(R_1 + R_2)\left(1-\frac{x}{L}\right)R_2} = \alpha U\frac{\left[R_1 - \frac{x'}{L}(R_1 - R_2)\right]}{(R_1 + R_2)\left(1-\frac{x'}{L}\right)R_2}$$

$$\frac{\left[R_1 - \frac{x}{L}(R_1 - R_2)\right]}{\left(1-\frac{x}{L}\right)} = \alpha\frac{\left[R_1 - \frac{x'}{L}(R_1 - R_2)\right]}{\left(1-\frac{x'}{L}\right)}$$

$$\frac{\left[R_1 - \frac{x}{L}R_1 + \frac{x}{L}R_2\right]}{\left(1-\frac{x}{L}\right)} = \alpha\frac{\left[R_1 - \frac{x'}{L}R_1 + \frac{x'}{L}R_2\right]}{\left(1-\frac{x'}{L}\right)}$$

$$\frac{\left[R_1(1-\frac{x}{L})+\frac{x}{L}R_2\right]}{\left(1-\frac{x}{L}\right)}=\alpha\frac{R_1(1-\frac{x'}{L})+\frac{x'}{L}R_2}{\left(1-\frac{x'}{L}\right)}$$

$$R_1+\frac{\frac{x}{L}R_2}{\left(1-\frac{x}{L}\right)}=\alpha R_1+\alpha\frac{\frac{x'}{L}R_2}{\left(1-\frac{x'}{L}\right)}$$

$$\left(\frac{\frac{x}{L}}{\left(1-\frac{x}{L}\right)}-\alpha\frac{\frac{x'}{L}}{\left(1-\frac{x'}{L}\right)}\right)R_2=R_1(\alpha-1)$$

Подставляем $x=\frac{1}{2}L, x'=\frac{1}{3}L$

$$\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}-\alpha\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\right)R_2=R_1(\alpha-1)$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)R_2=R_1(\alpha-1)$$

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{2-\alpha}{2(\alpha-1)}$$

Ответ: $\frac{R_1}{R_2}=\frac{2-\alpha}{2(\alpha-1)}$

9 класс Вариант 4

Задача 1

В закрытый кубический сосуд с длиной ребра **30 см** налито некоторое количество жидкости плотностью **1050 кг/м^3**. В жидкости друг под другом плавают два одинаковых кубика, соединённых жесткой тонкой перемычкой длиной **5 см**. Нижний груз прикреплён ко дну недеформированной пружиной жёсткостью **1134 Н/м** и длиной **6 см**, а верхний погружен в жидкость на глубину **2 см**. После того, как сосуд перевернули, оказалось, что пружина растянулась на **1 см**, а в жидкость погружен только один из кубиков, причем та его часть, которая не была погружена изначально. Определите расстояние от дна сосуда до ближайшего кубика после переворота сосуда.

Решение:

Обозначим изначальное погружение верхнего кубика в жидкость как h. В состоянии равновесия пружина нерастянута:

$$2mg = a^2(a+h)\rho g$$

Где ρ – плотность жидкости, a – ребро кубика, m_1 – масса кубика.

Объем жидкости в сосуде V_0 выражается через длину пружинки в нерастянутом состоянии x_0, ребро кубического сосуда b, глубину погружения кубика h, длину перемычки d и ребро кубика:

$$V_0 = b^2(d+x_0) + (b^2-a^2)(a+h)$$

Далее, сосуд переворачивают. Пружина теперь растянута, в жидкость погружен только один кубик:

$$2mg = a^2(a-h)\rho g + k\Delta x$$

С учетом первого уравнения получаем:

$$2a^2h\rho g = k\Delta x$$

$$a^2 = \frac{k\Delta x}{2h\rho g}$$

Вновь выразим объем жидкости в сосуде V_0 через длину пружины и глубину погружения:

$$V_0 = b^2H + (b^2-a^2)(a-h)$$

Где H – искомое расстояние от дна сосуда до дна ближайшего кубика.

Приравниваем:

$$b^2(d+x_0) + (b^2-a^2)(a+h) = b^2H + (b^2-a^2)(a-h)$$

$$b^2(d+x_0) + 2h(b^2-a^2) = b^2H$$

$$H = (d+x_0) + 2h\left(1 - \frac{k\Delta x}{2h\rho g b^2}\right)$$

При подстановке численных данных из условий задачи получается так, что ребро кубика равно 16 см, и два таких поместится в закрытый кубический сосуд с ребром 30 см не смогут. Очевидно, что данные по условии задачи некорректны.

Ответ: $H = (d + x_0) + 2h\left(1 - \frac{k\Delta x}{2h\rho g b^2}\right)$, данные по условию задачи некорректны

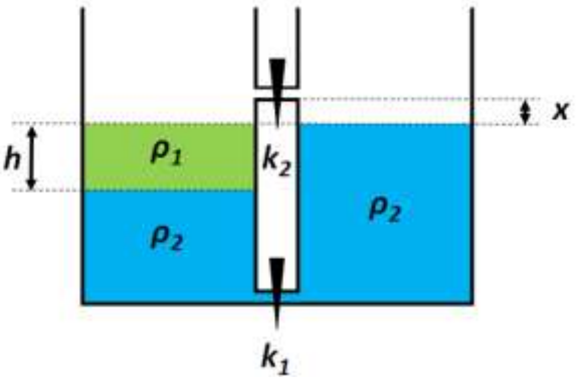
Задача 2

Экспериментальная установка, изображенная на рисунке, предназначена для измерения плотности масла. Она представляет собой два одинаковых сосуда, соединенных двумя тонкими трубочками: у самого дна и посередине. В каждой трубочке установлены краны (**k_1** и **k_2**), изначально они закрыты. В левом сосуде находятся несмешивающиеся вода (плотность **ρ_2 =1 г/мл**) и масло с неизвестной плотностью **ρ_1**, в правом только вода. Поверхности жидкостей в сосудах находятся на одном уровне, причем ниже верхней трубочки.

Студентам предлагалось определить плотность масла **ρ_1**, выполнив следующие действия:

1) Измерить высоту столба масла **h** и расстояние **x** от поверхности жидкости в правом сосуде до верхней трубочки.
2) Открыть кран **k_1** и дождаться равновесия.
3) Закрыть кран **k_1**, открыть **k_2** и дождаться равновесия.
4) Закрыть **k_2**, вновь открыть **k_1**, дождаться равновесия.
5) Измерить расстояние **y** от верхней трубочки до поверхности жидкости в правом сосуде.
6) По результатам измерений **h**, **x** и **y** вычислить плотность масла.

Один студент поленился делать эксперимент, измерил только **h=15 см** и **x=1 см** и пошел домой. Накануне сдачи отчета он «подогнал» значение **y** так, чтобы плотность масла получилась **ρ_1 = 0,8 г/мл**. Какое значение **y** он взял?



Решение.

Поскольку плотность масла меньше плотности воды, а изначально поверхности жидкости на одной высоте, после того, как открыли К1, немного воды перетечет в левый сосуд:

$$h\rho_1 + (a+b)\rho_2 = (h+a-b)\rho_2$$

$$b = h/2\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = 1.5 \text{ см} > x$$

Когда закроют К1 и откроют К2, столб масла высотой $b - x$ перетечет в правый сосуд. Давление жидкости в правом сосуде станет больше давления в левом. Поэтому, когда закроют К2 и откроют К1, вода потечет из правого в левый сосуд.

$$(h-b+x)\rho_1 + (a+b+c)\rho_2 = (h+a-b-c)\rho_2 + (b-x)\rho_1$$

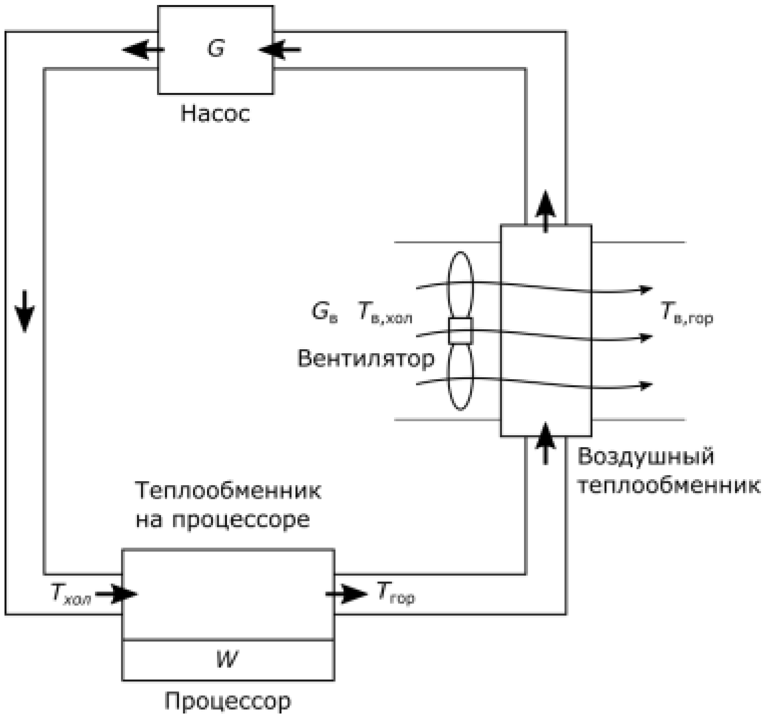
Вот столько ее перетечет: $c = (b-x)\frac{\rho_1}{\rho_2}$

Высота столба жидкости в правом сосуде стала $h + a - x - c$, а изначально была $h + a$. Значит,

$$y = x + h + a - (h + a - x - c) = 2x + c = \ldots = x\left(2 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) + h\frac{\rho_1}{2\rho_2}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = 2{,}4\ \text{см}$$

Задача 3

В офис закупили два компьютера с разными процессорами, но одинаковой системой жидкостного охлаждения. В подобных системах насос прокачивает жидкий теплоноситель по замкнутому контуру между теплообменником на процессоре и теплообменником, который обдувается вентилятором (см. схему). При тестовой нагрузке процессоров в обеих системах была измерена температура воздуха после воздушного теплообменника: в первом компьютере температура составила $\boldsymbol{T_{в,гор}}$ **= 32**°C, во втором — $\boldsymbol{T_{в,гор}'}$ **= 35**°C. Также оказалось, что расход насоса и вентилятора у второго компьютера в **1.3** раз больше, чем у первого. Какой должна быть температура в комнате $\boldsymbol{T_{в,хол}}$, чтобы жидкий теплоноситель, проходя через теплообменник на процессоре у второго компьютера, также нагревался в **1.3 раза** больше, чем в первой системе?



Решение:

Нагрев в k=**1.3** раз больше во второй системе означает

$(T_{гор}'-T_{хол}')/ (T_{гор}-T_{хол}) = k$.

Для первой системы напишем, как выражается мощность процессора через расход, величину нагрева и свойства теплоносителя.

Тепловая энергия $E = m*c*(T_{гор}-T_{хол})$.

Масса $m = \boldsymbol{\rho*}V$**.**

За единицу времени t:

Объём вещества $V = G*t$

Тогда энергия $E = \boldsymbol{\rho}*c*G*t*(T_{гор}-T_{хол})$.

А мощность – это $W = E/t$.

При этом имеют место два контура – один закрытый с жидким теплоносителем, и один открытый с воздухом. В установившемся режиме как с потоком жидкости, так и с потоком воздуха, должно переносится одинаковое количество энергии (одинаковые мощности).

$W = \boldsymbol{\rho}*c*G*(T_{гор}-T_{хол}) = \boldsymbol{\rho}_в *c_в*G_в*(T_{в,гор}-T_{в,хол})$.

Для второй системы аналогично (штрихованные переменные)

$W' = \boldsymbol{\rho}*c*k*G*(T_{гор}'-T_{хол}') = \boldsymbol{\rho}_в *c_в*k*G_в*(T_{в,гор}'-T_{в,хол})$.

Отсюда $W'/W = k * (T_{гор}'-T_{хол}')/ (T_{гор}-T_{хол}) = k$^2.

С другой стороны

$W'/W = k*(T_{в,гор}'-T_{в,хол}) / (T_{в,гор}-T_{в,хол})$

Выражаем $T_{в,хол}$

$k* (T_{в,гор}-T_{в,хол}) = (T_{в,гор}'-T_{в,хол})$

$T_{в,хол} = (k*T_{в,гор} - T_{в,гор}') / (k-1)$

Подставляя численные значения, $T_{в,хол} = 22°C$

Задача 4

В центр квадратного стола, покрытого скатертью, ставят тарелочку. Затем скатерть выдергивают из-под тарелочки с постоянной скоростью, направленной параллельно стороне стола. В результате тарелочка останавливается на краю стола. Определите, с какой скоростью выдергивали скатерть. Коэффициент трения тарелочки о скатерть – $\boldsymbol{\mu_1}$, коэффициент трения тарелочки о стол – $\boldsymbol{\mu_2}$, длина стороны стола – **L**, площадь скатерти равна площади стола.

Решение:

Обозначим L_1– перемещение тарелки относительно стола, пока она скользила по скатерти, L_2– перемещение тарелки относительно стола, пока она скользила по столу, V – скорость выдергивания скатерти.

По условию скатерть остановилась на краю стола, поэтому:

$$L_1 + L_2 = L/2$$

Тарелочка ускоряется до максимальной скорости силой трения о скатерть и замедляется с этой скорости до 0 силой трения о стол. Поэтому работы сил трения на этих участках равны:

$$\mu_1 mgL_1 = \mu_2 mgL_2$$

Отсюда выражаем

$$L_1 = \frac{L}{2(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2})}$$

Далее, пока тарелка была на скатерти, скатерть прошла расстояние $L_1 + L/2$

Тогда время выдергивания:

$$t = (\frac{L}{2} + L_1)/V$$

Откуда:

$$V = (\frac{L}{2} + L_1)/t$$

Это время находится из закона равноускоренного движения тарелочки под действием силы трения:

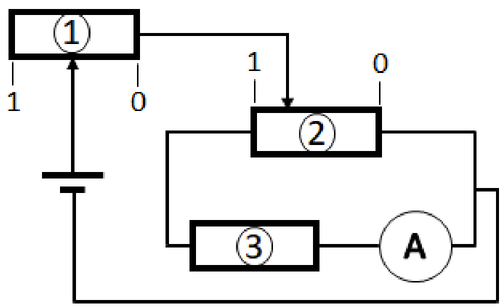
$$L_1 = \frac{1}{2}\mu_1 g t^2 => t = \sqrt{\frac{2L_1}{\mu_1 g}}$$

Получаем ответ:

$$V = \frac{L}{2}(1 + \frac{1}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}})\sqrt{\frac{\mu_1 g\left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)}{L}}$$

Задача 5

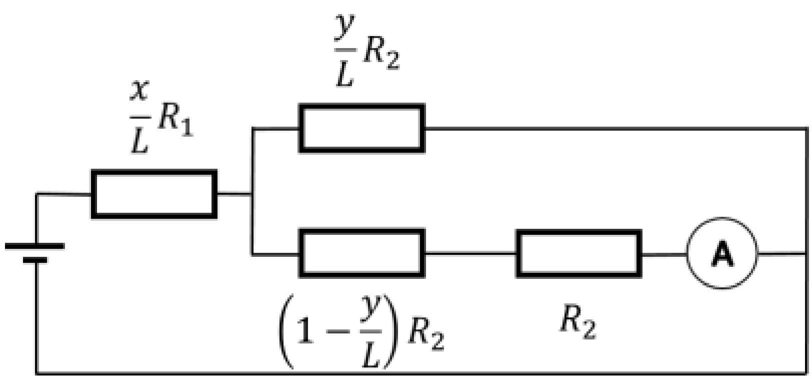
Реостат 1, потенциометр 2, резистор 3 и амперметр подключены в цепь постоянного тока, как показано на рисунке. Реостат и потенциометр одинаковой длины, но разного полного сопротивления, а сопротивление резистора 3 равно полному сопротивлению потенциометра 2. Изначально подвижный контакт реостата находился в положении **x**, отсчитываемое от нуля справа, потенциометра – в положении **y**. В некоторый момент времени подвижный контакт потенциометра 2 сместили до конца влево, на то же расстояние влево переместили подвижный контакт реостата 1. Показания амперметра до и после перемещения контактов оказались одинаковыми. Определите отношение полных сопротивлений потенциометра 2 и реостата 1. Источник ЭДС – идеальный.



Примечание: Потенциометр представляет собой резистор с тремя выводами и может быть реализован в виде металлической проволоки, намотанной виток к витку на диэлектрический стержень. Два вывода подключаются к концам проволоки, а третий – к подвижному контакту, скользящему вдоль стержня, обмотанному проволокой.

Решение:

Эквивалентная схема:



Общее сопротивление схемы сумма сопротивлений последовательных участков:

$$R_0 = R' + R'', R' = \frac{x}{L}R_1$$

Где L – длина потенциометра.

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{\frac{y}{L}R_2} + \frac{1}{R_2 + \left(1 - \frac{y}{L}\right)R_2} = \frac{L}{yR_2} + \frac{L}{R_2(2L - y)} = \frac{L}{R_2}\frac{2L}{y(2L - y)} = \frac{2L^2}{R_2 y(2L - y)}$$

$$R'' = \frac{R_2 y(2L - y)}{2L^2} = \left(1 - \frac{y}{2L}\right)\frac{y}{L}R_2$$

$$R_0 = \frac{x}{L}R_1 + \left(1 - \frac{y}{2L}\right)\frac{y}{L}R_2$$

Ток через амперметр:

$$I_A = \frac{U_A}{R_2 + \left(1 - \frac{y}{L}\right)R_2} = \frac{U_A}{\left(2 - \frac{y}{L}\right)R_2}$$

Где U_A – падение напряжения на участке цепи с параллельным соединением

$$U_A = U - \frac{x}{L}R_1 I$$

Где U – общее напряжение в цепи (источник), $I = \frac{U}{R_0}$ – ток в цепи.

$$U_A = U - \frac{x}{L}R_1 I = U\left(1 - \frac{x}{L}\frac{R_1}{R_0}\right)$$

$$I_A = \frac{U\left(1 - \frac{x}{L}\frac{R_1}{R_0}\right)}{\left(2 - \frac{y}{L}\right)R_2} = \frac{U\left(R_0 - \frac{x}{L}R_1\right)}{R_0\left(2 - \frac{y}{L}\right)R_2} = \frac{U\left(\frac{x}{L}R_1 + \left(1 - \frac{y}{2L}\right)\frac{y}{L}R_2 - \frac{x}{L}R_1\right)}{\left(\frac{x}{L}R_1 + \left(1 - \frac{y}{2L}\right)\frac{y}{L}R_2\right)\left(2 - \frac{y}{L}\right)R_2}$$

$$= \frac{U\left(1 - \frac{y}{2L}\right)\frac{y}{L}R_2}{\left(\frac{x}{L}R_1 + \left(1 - \frac{y}{2L}\right)\frac{y}{L}R_2\right)\left(2 - \frac{y}{L}\right)R_2} = U\frac{\frac{y}{2L}}{\frac{x}{L}R_1 + \left(1 - \frac{y}{2L}\right)\frac{y}{L}R_2}$$

Перемещение контактов:

$$x => x', y => L, x' - x = L - y$$

После перемещения контактов ток через амперметр не изменился:

$$I_A = I_A',$$

$$U\frac{\frac{y}{2L}}{\frac{x}{L}R_1 + \left(1 - \frac{y}{2L}\right)\frac{y}{L}R_2} = U\frac{\frac{L}{2L}}{\frac{x'}{L}R_1 + \left(1 - \frac{L}{2L}\right)\frac{L}{L}R_2}$$

$$\frac{y}{xR_1 + \left(1 - \frac{y}{2L}\right)yR_2} = \frac{L}{x'R_1 + \frac{1}{2}LR_2}$$

$$\frac{xR_1 + \left(1 - \frac{y}{2L}\right)yR_2}{y} = \frac{x'R_1 + \frac{1}{2}LR_2}{L}$$

$$\frac{x}{y}R_1 + \left(1 - \frac{y}{2L}\right)R_2 = \frac{x'}{L}R_1 + \frac{1}{2}R_2$$

$$\frac{x}{y}R_1 - \frac{x'}{L}R_1 = \frac{1}{2}R_2 - \left(1 - \frac{y}{2L}\right)R_2$$

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{x'}{L}\right)R_1=\left(\frac{1}{2}-1+\frac{y}{2L}\right)R_2$$

Поскольку $x'=L+x-y$, имеем:

$$\left(\frac{x}{y}-1-\frac{x}{L}+\frac{y}{L}\right)R_1=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{L}\right)R_2$$

$$\left(\frac{x}{y}-1-\frac{y}{L}\left(\frac{x}{y}-1\right)\right)R_1=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{L}\right)R_2$$

$$\left(\frac{x}{y}-1\right)\left(1-\frac{y}{L}\right)R_1=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{L}\right)R_2$$

$$\left(\frac{x}{y}-1\right)R_1=-\frac{1}{2}R_2$$

$$\frac{R_2}{R_1}=2\left(1-\frac{x}{y}\right)$$

Ответ: $\frac{R_2}{R_1}=2\left(1-\frac{x}{y}\right)$

9 класс Вариант 5

Задача 1

Кубическая ванночка с ребром **12 см** с толстыми стенками и тонким дном плавает внутри сосуда площадью **900 см²** в жидкости плотностью **0.92 г/см³**. Ванночка прикреплена ко дну пружиной жёсткостью **414 Н/м**, при этом в изначальный момент она пуста, а пружина не деформирована. Ванночку утопили в жидкости и затем отпустили, вследствие чего она наполнилась жидкостью до краёв, а пружина сжалась на **3 см**. Какова толщина стенок, если верхний край наполненной ванночки всё ещё находится над поверхностью жидкости, а все её боковые стенки имеют одинаковую толщину?

Решение:

Обозначим изначальное погружение ванночки в жидкость как h, а ребро - H . В состоянии равновесия пружина не деформирована:

$$\rho g H^2 h = mg$$

Где ρ – плотность жидкости, m – масса ванночки.

Объем жидкости в сосуде V_0 выражается через длину пружины в нерастянутом состоянии x_0 и глубину погружения ванночки:

$$V_0 = h(S_0 - H^2) + x_0 S_0$$

Где S_0 – площадь основания сосуда.

Далее, ванночку утапливают, она заполняется жидкостью. Пружинка сжимается на Δx, ванночка погружается в жидкость на Δh. Обозначим как S_2 внутреннюю площадь ванночки. В состоянии равновесия:

$$mg + \rho g S_2 H = \rho g H^2 (h + \Delta h) + k\Delta x$$

$$\rho g S_2 H = \rho g H^2 \Delta h + k\Delta x$$

$$S_2 H = H^2 \Delta h + \frac{k\Delta x}{\rho g}$$

Вновь выразим объем жидкости в сосуде $V_0{}'$ через длину пружины и глубину погружения:

$$V_0' = (h + \Delta h)(S_0 - H^2) + (x_0 - \Delta x)S_0$$

С другой стороны, новый объем равен изначальному объему минус объему жидкости в ванночке:

$$V_0' = V_0 - S_2 H$$

Приравниваем:

$$(h + \Delta h)(S_0 - H^2) + (x_0 - \Delta x)S_0 = h(S_0 - H^2) + x_0 S_0 - S_2 H$$

$$S_2 H = \Delta x S_0 - \Delta h (S_0 - H^2)$$

Подставляем ранее полученное $S_2 H$:

$$H^2\Delta h + \frac{k\Delta x}{\rho g} = \Delta x S_0 - \Delta h(S_0 - H^2)$$

$$\frac{k\Delta x}{\rho g} = \Delta x S_0 - \Delta h S_0$$

$$\Delta h = \Delta x\left(1 - \frac{k}{\rho g S_0}\right)$$

Подставляем:

$$S_2 H = \Delta x S_0 - \Delta x\left(1 - \frac{k}{\rho g S_0}\right)(S_0 - H^2)$$

$$S_2 = \frac{\Delta x}{H}\left(S_0 - \left(1 - \frac{k}{\rho g S_0}\right)(S_0 - H^2)\right) = 130.5$$

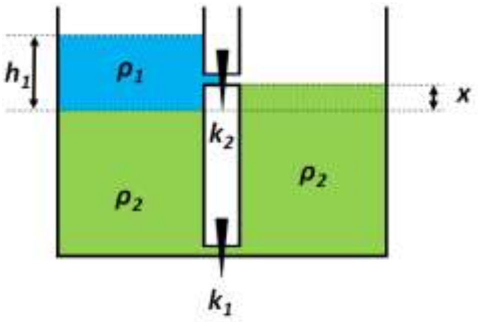
Толщина стенок равна:

$$\left(H - \sqrt{S_2}\right)/2 = (12 - \sqrt{130.5})/2 \approx 0.29\ \text{см}$$

Ответ: $0.29\ \text{см}$

Задача 2

Два одинаковых сосуда соединены двумя тонкими трубочками: у самого дна и посередине. В каждой трубочке установлены краны, изначально они закрыты. В левом сосуде находятся несмешивающиеся жидкости плотностью $\boldsymbol{\rho_2 > \rho_1}$, в правом только жидкость плотностью $\boldsymbol{\rho_2}$. Поверхность жидкости плотностью $\boldsymbol{\rho_2}$ в правом сосуде находится на уровне верхней трубочки, а в левом — на **x=2 см** ниже. Высота столба жидкости $\boldsymbol{\rho_1}$ равна $\boldsymbol{h_1 = 16}$ **см**. С установкой производят следующие действия. Открывают кран K_2, ждут равновесия, закрывают K_2. Открывают кран K_1, ждут равновесия, закрывают K_1. И, снова, открывают кран K_2 и ждут равновесия. В результате оказалось, что высота столба жидкости $\boldsymbol{\rho_1}$ в левом сосуде в **q=1,25** раза больше, чем в правом. Найти отношение плотностей $\boldsymbol{\rho_1/\rho_2}$.



Решение.

Пусть h_2 — высота столба жидкости в правом сосуде.

Открыли К2. Часть жидкости ρ_1 перетечет в правый сосуд, так что поверхности жидкости в сосудах будут на одном уровне. Высота столба этой жидкости в левом сосуде будет $(h_1 + x)/2$, в правом $(h_1 - x)/2$.

Давление у дна в левом сосуде равно $p_1 = g\rho_2(h_2 - x) + g\rho_1(h_1 + x)/2$, в правом $p_2 = g\rho_2 h_2 + g\rho_1(h_1 - x)/2$. Поскольку $\rho_2 > \rho_1$, то $p_1 < p_2$.

Закрыли К2. Открыли К1. Жидкость будет перетекать из правого сосуда в левый, пока не установится равновесие:

$$\rho_2(h_2 - x + a) + \frac{\rho_1(h_1 + x)}{2} = \rho_2(h_2 - a) + \frac{\rho_1(h_1 - x)}{2}$$

Отсюда

$$a = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$$

В левом сосуде уровень жидкости ρ_1 выше верхней трубочки на $\frac{h_1 - x}{2} + a = \frac{1}{2}\left(h_1 - x\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) > 0$, в правой $\frac{h_1 - x}{2} - a = \frac{h}{2} - \frac{x}{2}\left(2 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) > 0$.

Закрыли К1, Открыли К2. Часть жидкости ρ_1 перетечет в правый сосуд, так что уровни жидкости в сосудах сравняются. Понятно, что слева уровень понизится, а справа повысится на a.

Высота столба жидкости ρ_1 слева равна $\frac{h_1 + x}{2} - a = \frac{h_1}{2} + \frac{x\rho_1}{2\rho_2}$, а справа $\frac{h_1 - x}{2} + a = \frac{h_1}{2} - \frac{x\rho_1}{2\rho_2}$.

Известно, что

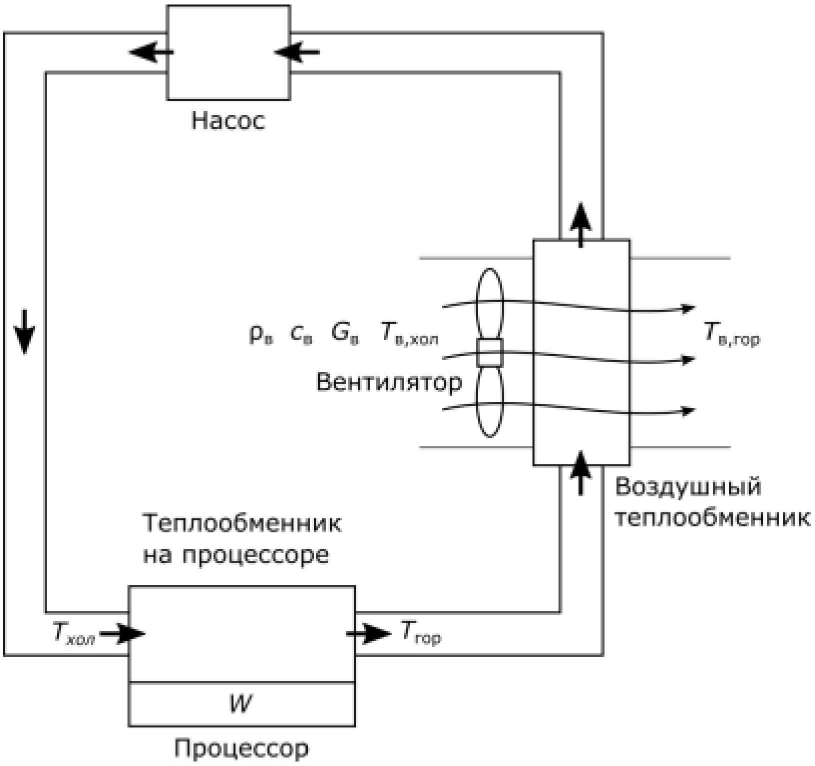
$$\frac{h_1}{2} + \frac{x\rho_1}{2\rho_2} = q\ \left(\frac{h_1}{2} - \frac{x\rho_1}{2\rho_2}\right)$$

Отсюда

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_1(q-1)}{x(q+1)} = \frac{8}{9}$$

Задача 3

Группа компьютерных энтузиастов занималась «разгоном» процессора компьютера – увеличением его тактовой частоты, в результате которого производительность компьютера возрастает, но растёт и потребляемая мощность. Чтобы процессор не перегревался, на него установили водяную систему охлаждения, в которой насос с постоянной скоростью прокачивает жидкость по замкнутому конуру между теплообменником на процессоре и теплообменником, обдуваемым вентилятором (см. схему). Для контроля температуры жидкости до и после теплообменника на процессоре были установлены датчики температуры. Известно, что при полной нагрузке до разгона тепловыделение на процессоре составляло ***W* = 60 Вт**, а датчики показывали **$T_{хол}$ = 34°С** и **$T_{гор}$ = 38°С**. После разгона датчики стали показывать **$T_{хол}$' = 55°С** и **$T_{гор}$' = 65°С**. Экспериментаторам показалось, что поток воздуха от вентилятора, прошедший сквозь воздушный теплообменник, лишь слегка тёплый, и система воздушного охлаждения работает неэффективно. Какое значение температуры покажет термометр, если его поместить в этот поток? Температура воздуха в комнате **$T_{в,хол}$ = 20°С**, расход вентилятора **$G_в$ = 10 л/с**, плотность воздуха **$\rho_в$ = 1.2 кг/м^3**, а его удельная теплоёмкость **$c_в$ = 1000 Дж/(кг*К)**. Считайте, что жидкость в контуре и воздух прогреваются равномерно.



Решение:

Для неразогнанного процессора напишем, как выражается мощность процессора через расход, величину нагрева и свойства теплоносителя.

Тепловая энергия E = m*c*($T_{гор}$-$T_{хол}$).

Масса m = ρ*V.

За единицу времени t:

Объём вещества $V = G*t$

Тогда энергия $E = \rho*c*G*t*(T_{гор}-T_{хол})$.

А мощность – это $W = E/t$.

При этом имеют место два контура – один закрытый с жидким теплоносителем, и один открытый с воздухом. В установившемся режиме как с потоком жидкости, так и с потоком воздуха, должно переносится одинаковое количество энергии (одинаковые мощности).

$W = \rho*c*G*(T_{гор}-T_{хол}) = \rho_в *c_в*G_в*(T_{в,гор}-T_{в,хол})$.

После разгона аналогично (штрихованные переменные)

$W' = \rho*c*G*(T_{гор}'-T_{хол}') = \rho_в*c_в*G_в*(T_{в,гор}'-T_{в,хол})$,

Надо найти $T_{в,гор}' = W' / (\rho_в*c_в*G_в) + T_{в,хол}$

Неизвестна мощность процессора после разгона

Поделим выражения $W'/W = (T_{гор}'-T_{хол}')/ (T_{гор}-T_{хол})$ => $W' = W*(T_{гор}'-T_{хол}')/ (T_{гор}-T_{хол})$

=> $T_{в,гор}' = W*(T_{гор}'-T_{хол}')/((T_{гор}-T_{хол}) * \rho_в*c_в*G_в) + T_{в,хол}$

Подставляя значения, получаем $T_{в,гор}' = 32.5$ °C

Задача 4

Квадратный стол покрыт скатертью. На расстоянии **l** от левого края стола ставят тарелочку. С другого края стола скатерть выдергивают из-под тарелочки с постоянной скоростью, направленной параллельно стороне стола. В результате тарелочка останавливается на расстоянии **S** от правого края стола. Известно, что если скатерть выдергивали бы хоть немного медленнее, то тарелочка бы съехала со стола вместе со скатертью. Определите отношение коэффициентов трения тарелочки о скатерть и о поверхность стола. Длина стороны стола **L=4l**.

Решение:

Изначально неподвижная тарелочка ускоряется силой трения о скатерть. Перейдем в систему отсчёта скатерти. В этой системе тарелочка сначала имеет скорость V и постепенно замедляется. Если тарелочка замедляется до 0 в этой системе отсчета, то сила трения исчезает, и тарелочка съезжает со стола вместе со скатертью.

Обозначим L_1– перемещение тарелки относительно стола, пока она скользила по скатерти, L_2– перемещение тарелки относительно стола, пока она скользила по столу, V – скорость выдергивания скатерти.

Условие, «если скатерть выдергивали бы хоть немного медленнее, то тарелочка бы съехала со стола вместе со скатертью» означает, что в момент выдергивания скатерти из-под тарелочки она имела скорость скатерти. Относительно скатерти тарелочка прошла расстояние l. В системе отсчета стола ускоряется от 0 до V за то же время, значит, она пройдёт то же расстояние:

$$L_1 = l$$

Изначальное расстояние от тарелочки до левого края стола было l, то до правого – $3l$. Тогда имеем:

$$3l = L_1 + L_2 + S$$

$$L_2 = 3l - L_1 - S = 2l - S$$

Тарелочка ускоряется до максимальной скорости силой трения о скатерть и замедляется с этой скорости до 0 силой трения о стол. Поэтому работы сил трения на этих участках равны:

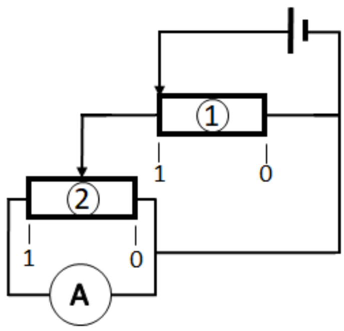
$$\mu_1 mgL_1 = \mu_2 mgL_2$$

Откуда получаем ответ

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{l}{2l - S}$$

Задача 5

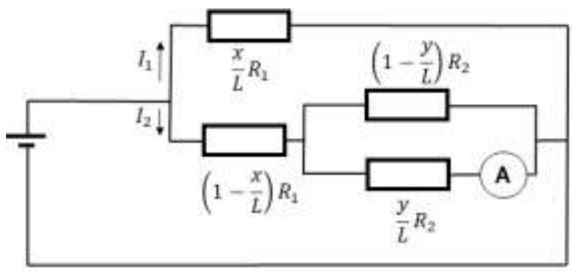
Два потенциометра и амперметр подключены в цепь постоянного тока, как показано на рисунке. Потенциометры одинаковой длины **L**, но разного полного сопротивления. Изначально подвижный контакт потенциометра 1 находился в крайнем левом положении, а потенциометра 2 – в положении **y**, отсчитываемом от нуля справа. В некоторый момент времени подвижные контакты потенциометров смещают на одинаковое расстояние **d<y**: у потенциометра 1 – вправо, у потенциометра 2 – влево. Показания амперметра до и после перемещения контактов были одинаковыми. Определите отношение полных сопротивлений потенциометров 1 и 2. Источник ЭДС – идеальный.



Примечание: Потенциометр представляет собой резистор с тремя выводами и может быть реализован в виде металлической проволоки, намотанной виток к витку на диэлектрический стержень. Два вывода подключаются к концам проволоки, а третий – к подвижному контакту (ползунку), скользящему вдоль стержня, обмотанному проволокой.

Решение:

Эквивалентная схема:



Ток по нижней ветке:

$$I_2 = \frac{U}{R_{0,2}}$$

$$R_{0,2} = \left(1 - \frac{x}{L}\right) R_1 + R''$$

$$\frac{1}{R''} = \frac{L}{yR_2} + \frac{L}{(L-y)R_2} = \frac{L}{R_2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{L-y}\right) = \frac{L}{R_2}\frac{L}{y(L-y)}$$

$$R'' = R_2 \frac{y}{L}\left(1 - \frac{y}{L}\right)$$

$$R_{0,2} = \left(1 - \frac{x}{L}\right) R_1 + \frac{y}{L}\left(1 - \frac{y}{L}\right) R_2$$

Ток через амперметр (общее выражение):

$$I_A = \frac{U_A}{\frac{y}{L} R_2}, U_A = U - I_2(1 - \frac{x}{L})R_1 = U\left(1 - (1 - \frac{x}{L})\frac{R_1}{R_{0,2}}\right)$$

$$I_A = U\frac{R_{0,2} - (1 - \frac{x}{L})R_1}{R_{0,2}\frac{y}{L}R_2} = U\frac{\frac{y}{L}\left(1 - \frac{y}{L}\right)R_2}{(\left(1 - \frac{x}{L}\right)R_1 + \frac{y}{L}\left(1 - \frac{y}{L}\right)R_2)\frac{y}{L}R_2}$$

$$= U\frac{\left(1 - \frac{y}{L}\right)}{(\left(1 - \frac{x}{L}\right)R_1 + \frac{y}{L}\left(1 - \frac{y}{L}\right)R_2)}$$

Перемещение контактов:

$$L => L - d, y => y + d$$

$$\frac{\left(1 - \frac{y}{L}\right)}{(\left(1 - \frac{L}{L}\right)R_1 + \frac{y}{L}\left(1 - \frac{y}{L}\right)R_2)} = \frac{\left(1 - \frac{y+d}{L}\right)}{(\left(1 - \frac{L-d}{L}\right)R_1 + \frac{y+d}{L}\left(1 - \frac{y+d}{L}\right)R_2)}$$

$$\frac{1}{\frac{y}{L}R_2} = \frac{\left(1 - \frac{y+d}{L}\right)}{(\frac{d}{L}R_1 + \frac{y+d}{L}\left(1 - \frac{y+d}{L}\right)R_2}$$

$$\frac{y}{L}R_2 = \frac{(\frac{d}{L}R_1 + \frac{y+d}{L}\left(1 - \frac{y+d}{L}\right)R_2}{\left(1 - \frac{y+d}{L}\right)}$$

$$\frac{y}{L}R_2 = \frac{\frac{d}{L}R_1}{\left(1 - \frac{y+d}{L}\right)} + \frac{\frac{y+d}{L}\left(1 - \frac{y+d}{L}\right)R_2}{\left(1 - \frac{y+d}{L}\right)}$$

$$\frac{y}{L}R_2 = \frac{\frac{d}{L}R_1}{\left(1 - \frac{y+d}{L}\right)} + \frac{y+d}{L}R_2$$

$$\frac{y}{L}R_2 - \frac{y+d}{L}R_2 = \frac{\frac{d}{L}R_1}{\left(1 - \frac{y+d}{L}\right)}$$

$$\frac{d}{L}R_2 = \frac{\frac{d}{L}R_1}{\left(1 - \frac{y+d}{L}\right)}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 1 - \frac{y+d}{L}$$

Ответ: $\frac{R_1}{R_2} = 1 - \frac{y+d}{L}$