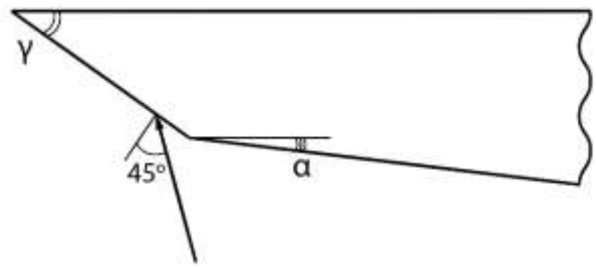
10 класс Вариант 1

Задача 1

Узкий пучок света падает на левую грань вытянутой четырехугольной призмы под углом **45°** (см. рисунок). Показатель преломления материала призмы в **√2** (корень из двух) раз больше показателя преломления воздуха. Левая грань составляет угол **γ=35°** с горизонтальной верхней гранью, а нижняя грань угол **α=7°,** как это показано на рисунке. Найдите количество пучков света, вышедших через верхнюю грань четырехугольника. Считать, что правая грань четырехугольной призмы расположена бесконечно далеко от левой. После преломления на левой грани, луч больше не достигает этой стороны четырехугольника.



Решение:

1) Обозначим угол падения на левую грань как β1. Тогда по закону Снеллиуса выражение для угла преломления:

$$sin(\beta_2) = \frac{n_1}{n_2} sin(\beta_1) = \frac{1}{2}, \qquad \beta_2 = 30°$$

2) Если угол падения на верхнюю грань превышает критическое значение, наблюдается полное внутреннее отражение. Найдем критический угол:

$$n_2 sin(\beta_{crit}) = n_1 sin(90°) sin(\beta_{crit}) = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta crit = 45°$$

3) Найдем угол падения пучка на верхнюю грань при первом прохождении луча вверх β_3:

$\beta_3 = \gamma - \beta_2 = 5°$ (этот угол меньше критического, пучок частично преломляется и выходит из тела)

4) Следующий угол падения на верхнюю грань увеличивается каждый раз на 2α. Соответственно:

β_5=19°- угол падения при втором прохождении вверх

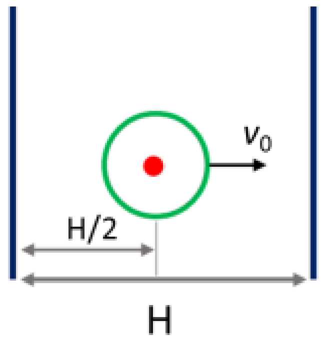
β_5=33°- угол падения при третьем прохождении вверх

β_7=47°- угол падения при четвертом прохождении вверх, этот луч полностью отразится.

Ответ- из верхней грани тела выйдет три пучка света.

Задача 2

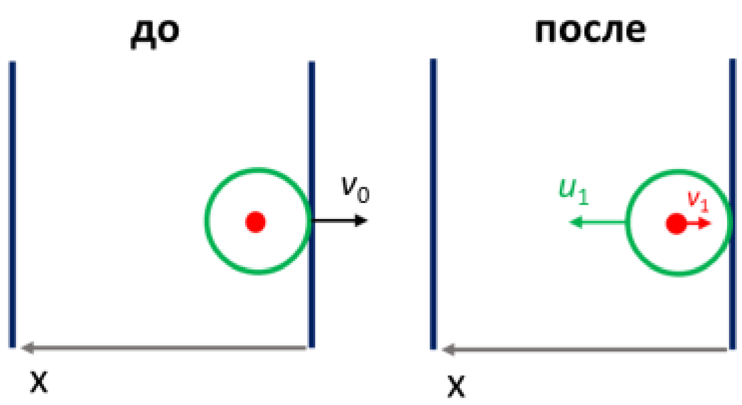
Полая шайба массой ***M*** и радиусом ***R*** в начальный момент находится на горизонтальной плоскости посередине между двумя ограждениями, расположенными на расстоянии ***H*=3.5*R*** друг от друга. В центре полости шайбы расположен небольшой грузик массой ***m*** (***M*=4*m***). Шайбе с грузиком сообщают скорость $\boldsymbol{v_0}$ в направлении, указанном на рисунке. Считая, что трения в системе нет, а все удары абсолютно упругие, найдите, сколько времени пройдет до первого столкновения шайбы с левым ограждением.



Решение

Шайба будет двигаться равномерно, а грузик будет покоиться в системе отсчета, связанной с шайбой, до момента столкновения с правым ограждением.

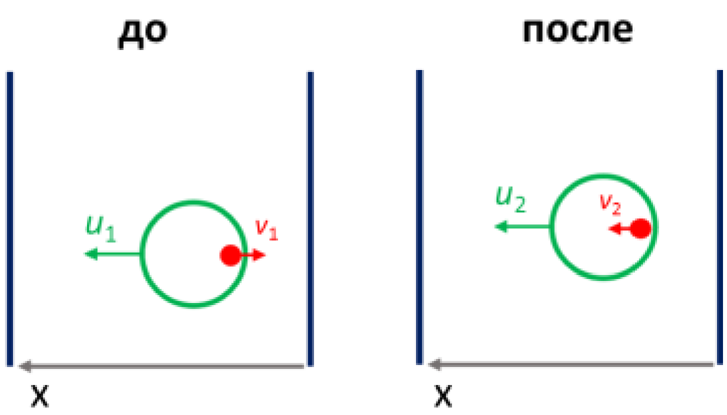
А) **Столкновение шайбы с правым ограждением**



В этот момент произойдет абсолютно упругий удар. Шайба начнет двигаться в противоположном направлении со скоростью равной по модулю v_0, а грузик продолжит движение (относительно плоскости) в том же направлении с той же скоростью v_0 по инерции.

Время до столкновения с правым ограждением $\Delta t_1 = \frac{\frac{H}{2} - R}{v_o} = \frac{\frac{3.5R}{2} - R}{v_0} = 0.75\frac{R}{v_0}$.

Б) **Первое столкновение грузика со стенкой шайбы**



Закон сохранения импульса в проекции на ось x:

$$-mv_1 + Mu_1 = mv_2 + Mu_2, \qquad (1)$$

закон сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mu_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2}. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) следует решать как систему уравнений с двумя неизвестными (u_2, v_2). Для этого сначала преобразуем выражение (1):

$$-mv_0 + 4mv_0 = mv_2 + 4mu_2,$$
$$3v_0 = v_2 + 4u_2,$$
$$v_2 = 3v_0 - 4u_2, \qquad (3)$$

Преобразуем (2):

$$mv_0^2 + 4mv_0^2 = mv_2^2 + 4mu_2^2,$$
$$v_0^2 + 4v_0^2 = v_2^2 + 4u_2^2,$$
$$5v_0^2 = v_2^2 + 4u_2^2,$$

Подставим (3):

$$5v_0^2 = (3v_0 - 4u_2)^2 + 4u_2^2,$$
$$20u_2^2 - 24v_0u_2 + 4v_0^2 = 0.$$

Откуда

$$u_2 = \frac{24v_0 - 16v_0}{40} = \frac{1}{5}v_0. \qquad (4)$$

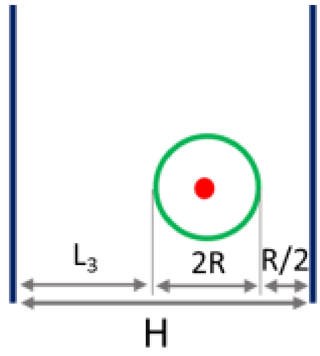
Подставим результат в (3)

$$v_2 = 3v_0 - 4 \cdot \frac{1}{5}v_0 = \frac{11}{5}v_0. \qquad (5)$$

Найдем промежуток времени между столкновениями А и Б. Грузик пройдет расстояние R, его скорость в системе отсчета, связанной с шайбой равна $2v_0$, тогда $\Delta t_2 = \frac{R}{2v_0}$.

Расстояние, которое преодолеет шайба за это время $S_2 = u_1 \cdot \Delta t_2 = v_0 \cdot \frac{R}{2v_0} = \frac{R}{2}$.

Теперь надо определиться, что произойдёт дальше – столкновение шайбы с левым ограждением или второе столкновение грузика со стенкой шайбы.



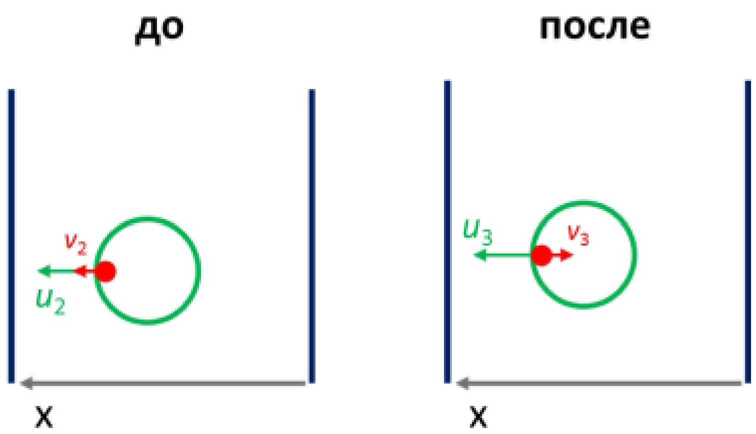
Найдем по рисунку расстояние, которое необходимо пройти шайбе до столкновения со стенкой $L_3 = H - 2R - \frac{R}{2} = R$.

Время движения шайбы до столкновения $T_3 = \frac{L_3}{u_2} = \frac{R}{\frac{1}{5}v_0} = 5\frac{R}{v_0}$.

Грузику до столкновения с шайбой нужно пройти расстояние $l_3 = 2R$. Тогда время движения грузика до столкновения со стенкой шайбы определяется как частное расстояния l_3 и скорости движения грузика в системе отсчета, связанной с шайбой $\tau_3 = \frac{l_3}{v_2 - u_2} = \frac{l_3}{2v_0} = \frac{2R}{2v_0} = \frac{R}{v_0}$.

Видно, что $\tau_3 < T_3$. Следовательно, сначала произойдет втрое столкновение грузика со стенкой шайбы.

В) **Второе столкновение грузика со стенкой шайбы**



Закон сохранения импульса в проекции на ось x:

$$mv_2 + Mu_2 = -mv_3 + Mu_3, \tag{6}$$

закон сохранения энергии

$$\frac{mv_2^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2} = \frac{mv_3^2}{2} + \frac{Mu_3^2}{2}. \tag{7}$$

Аналогично из уравнений (6) и (7) можно найти $v_3 = v_0$ и $u_3 = v_0$.

Промежуток времени между столкновениями Б и В $\Delta t_2 = \tau_3 = \frac{R}{v_0}$, путь, который пройдет шайба за это время $S_3 = u_2 \cdot \Delta t_3 = \frac{1}{5} \cdot v_0 \cdot \frac{R}{v_0} = \frac{R}{5}$.

Для того, чтобы определить, какое событие произойдет следующим – столкновение шайбы с левым ограждением или третье столкновение грузика со стенкой шайбы, нужно снова определить промежутки времени от столкновения B до каждого из этих событий аналогично тому, как это было сделано выше.

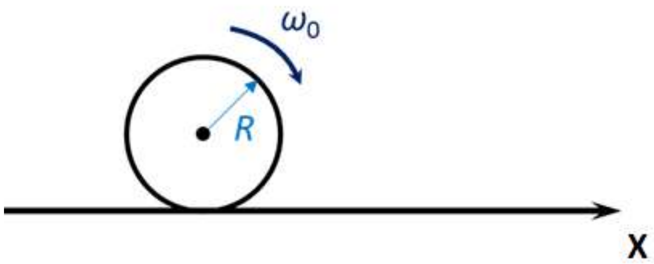
Окончательно получается, что время движения шайбы до столкновения с ограждением $T_4 = \frac{0.8R}{v_0}$, а время движения грузика до третьего столкновения со стенкой шайбы $\tau_4 = \frac{R}{v_0}$. Видно, что $T_4 < \tau_4$, то есть следующим событием будет столкновение шайбы с левым ограждением.

Тогда искомое время $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + T_4 = 0.75\frac{R}{v_0} + 0.5\frac{R}{v_0} + \frac{R}{v_0} + 0.8\frac{R}{v_0} = 3.05\frac{R}{v_0}$.

Ответ: $\Delta t = 3.05\frac{R}{v_0}$.

Задача 3

Гимнаст раскручивает тонкий обруч радиусом ***R*** до угловой скорости $\boldsymbol{\omega_0}$ вокруг его оси, а затем ставит его на пол спортивного зала без начальной скорости так, как показано на рисунке. Коэффициент трения обруча о пол равен $\boldsymbol{\mu}$. Постройте график зависимости координаты центра обруча относительно оси *x* от времени.



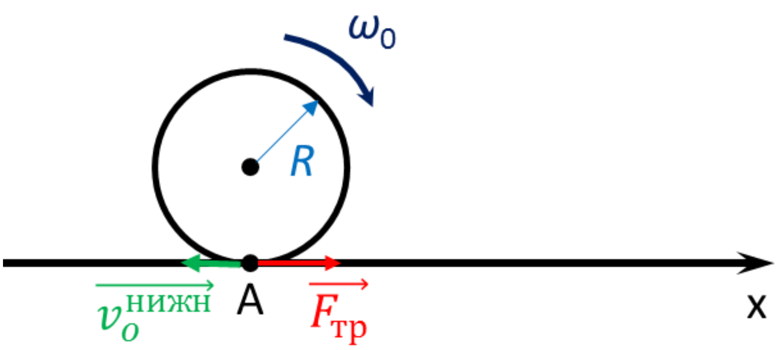
Примечание: Угловое ускорение **β** связано с моментом приложенных сил соотношением: ***I*β = *M***, где ***I*** – момент инерции тела относительно оси вращения, ***M*** – момент внешних сил. Для обруча, вращающегося вокруг своей оси $\boldsymbol{I=mR^2}$.

Решение

Запишем скорость нижней точки (обозначим её А) в начальный момент времени нижней точки обруча:

$$v_0^{\text{нижн}} = \omega_0 R \tag{1}$$

Согласно (1) скорость точки А в начальный момент времени направлена влево. Сперва обруч будет двигаться с проскальзыванием, т.к. скорость точки обруча “А” относительно земли отлична от нуля. При этом на обруч будет действовать сила трения скольжения по модулю равная μN. Сила трения препятствует движению, следовательно, она направлена противоположно, то есть вправо.



Сначала скорость поступательного движения колеса будет увеличиваться, колесо будет двигаться с проскальзыванием. Это будет происходить до тех пор, пока $v(t) < \omega(t)R$. Поступательное движение обруча на этом этапе можно рассматривать как равноускоренное, то есть координата его центра будет меняться по закону

$$x(t) = x_0 + \frac{at^2}{2}. \tag{2}$$

Найдем ускорение обруча из второго закона Ньютона:

$$F_{\text{тр}} = ma \ \Rightarrow \ \mu mg = ma \ \Rightarrow a = \ \mu g. \qquad (3)$$

Координата центра обруча с учетом (3):

$$x(t) = x_0 + \frac{\mu g t^2}{2}. \qquad (4)$$

Проскальзывание прекратится, когда суммарная скорость нижней точки обруча относительно земли будет равна нулю. Эта скорость складывается из скорости поступательного движения обруча и скорости из-за вращательного движения. Скорость поступательного движения направлена вправо, а вращение происходит по часовой стрелке, следовательно для прекращения проскальзывания модули скорости и ωR должны стать равными, т.е.

В момент времени $\tilde{t}$, при $v(\tilde{t}) = \omega(\tilde{t})R$ проскальзывание прекратится. Найдем этот момент времени. Скорость будет увеличиваться и с учетом (3)

$$v(\tilde{t}) = a\tilde{t} = \mu g\tilde{t}, \qquad (5)$$

Угловая скорость будет уменьшаться

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 + \beta\tilde{t}, \qquad (6)$$

где β – угловое ускорение.

Запишем основное уравнение динамики твердого тела

$$I\beta = M, \qquad (7)$$

I – момент инерции, *M* – момент силы (силы трения).

$$I\beta = -\mu mgR. \qquad (8)$$

Обруч представляет собой тонкостенный цилиндр, тогда его момент инерции вдоль оси, проходящей через его ось равен $I = mR^2$.

Тогда

$$mR^2\beta = -\mu mgR. \qquad (9)$$

Отсюда угловое ускорение

$$\beta = -\frac{\mu g}{R}. \qquad (10)$$

Тогда (6) можно переписать как

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 - \frac{\mu g}{R}\tilde{t}, \qquad (11)$$

Приравниваем (6) и (11) и получаем

$$2\mu g\tilde{t} = \omega_0 R. \qquad (12)$$

Тогда момент времени, в который проскальзывание прекратится

$$\tilde{t} = \frac{\omega_0 R}{2\mu g}. \qquad (13)$$

Координата центра обруча в момент времени $\tilde{t}$

$$x(\tilde{t}) = x_0 + \frac{\mu g \tilde{t}^2}{2} = x_0 + \frac{\mu g}{2}\left(\frac{\omega_0 R}{2\mu g}\right)^2 = x_0 + \frac{\omega_0^2 R^2}{8\mu g}. \quad (14)$$

Скорость центра обруча в момент времени $\tilde{t}$ (5) можно переписать

$$v(\tilde{t}) = \mu g \frac{\omega_0 R}{2\mu g} = \frac{\omega_0 R}{2}. \quad (15)$$

С момента $\tilde{t}$ проскальзывание прекратится и нижняя точка обруча “A” будет иметь нулевую скорость. Следовательно на обруч будет действовать сила трения покоя. Сила трения покоя может принимать значения от нуля до силы трения скольжения $0 \le F_{\text{тр}} \le \mu N$. Сила трения покоя компенсирует внешние силы. Т.к. на обруч не действуют внешние силы помимо силы трения покоя, она равна нулю и обруч будет двигаться равномерно

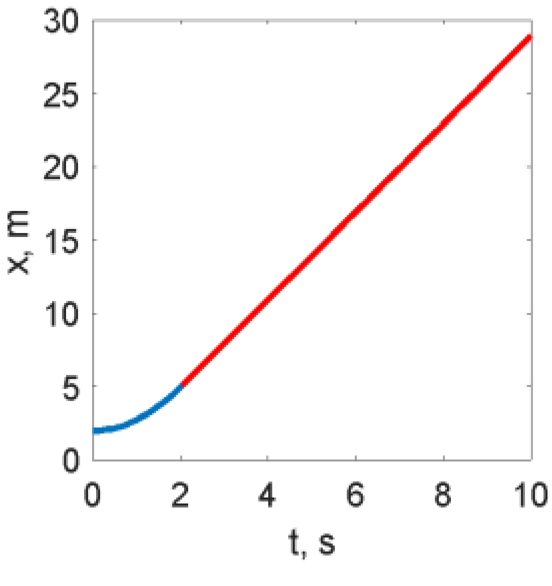
$$x(t) = x(\tilde{t}) + v(t - \tilde{t}) = x_0 + \frac{\omega_0^2 R^2}{8\mu g} + \frac{\omega_0 R}{2}\left(t - \frac{\omega_0 R}{2\mu g}\right). \quad (16)$$

Тогда координата центра обруча меняется со временем следующим образом

$$x(t) = \{x_0 + \frac{\mu g t^2}{2} \text{ при } t < \frac{\omega_0 R}{2\mu g} \; x_0 + \frac{\omega_0^2 R^2}{8\mu g} \text{ при } t = \frac{\omega_0 R}{2\mu g} \; x_0 + \frac{\omega_0^2 R^2}{8\mu g} + \frac{\omega_0 R}{2}\Big(t - \quad (17)$$

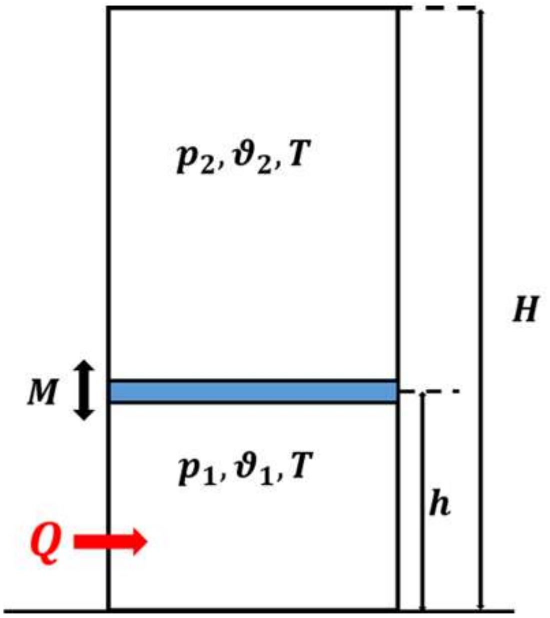
$\omega 0R2\mu g$при $t>\omega 0R2\mu g$.

Тогда график зависимости x(t)



Задача 4

Цилиндрический сосуд с площадью основания ***S*** и высотой ***H***, запаянный с обоих концов, расположен вертикально. Внутри сосуд герметично разделен на две части поршнем массой ***M***, способным двигаться вдоль него без трения. Начальная высота поршня над уровнем дна сосуда составляет ***h=H/3***. Внутри каждой из частей сосуда находится ν_1 и ν_2 моль идеального одноатомного газа, соответственно, при одинаковой температуре, причем $\boldsymbol{\nu_1 = 2\nu_2}$. Сосуду сообщают некоторое количество теплоты ***Q*** таким образом, что температура газа в сосудах остается одинаковой. Определите ***Q***, необходимое для того, чтобы объемы частей сосуда выше и ниже поршня оказались одинаковыми. Какое ***Q*** потребовалось бы, чтобы объемы верхней и нижней частей относились как **1:2**? Сосуд теплоизолирован от внешней среды. Толщиной поршня пренебречь.



Решение:

Пусть p_1 - давление в нижней части, p_2 - давление в верхней. Тогда:

$$p_1 = p_2 + \frac{Mg}{S}$$

(M - масса поршня, S - площадь основания сосуда).

Начальное состояние газа в каждом отсеке:

$$(p_2 + \frac{Mg}{S})hS = 2\nu RT$$

$$p_2(H - h)S = \nu RT$$

где R - универсальная газовая постоянная.

Отсюда получаем:

$$(p_2 + \frac{Mg}{S})hS = 2p_2(H - h)S$$

$$\boldsymbol{p_2} = \frac{\boldsymbol{Mg}}{\boldsymbol{S}\left(\frac{\boldsymbol{2H}}{\boldsymbol{h}} - \boldsymbol{3}\right)} = \frac{Mg}{3S}$$

(выделено выражение для произвольного h, будет использоваться в дальнейшем)

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{p_2(H-h)S}}{\boldsymbol{\eta R}} = \frac{\boldsymbol{Mg}}{\boldsymbol{\eta R}} * \frac{\boldsymbol{H-h}}{\frac{\boldsymbol{2H}}{\boldsymbol{h}} - \boldsymbol{3}} = \frac{\frac{2}{9}MgH}{\nu R}$$

Далее сообщаем сосуду количество теплоты Q, которое пойдет на нагрев газа в обеих частях сосуда и на передвижение поршня вверх:

$$Q = \frac{3}{2}3\nu RdT + Mgdh$$

где ($dT = T' - T, dh = h' - h = \frac{1}{2}H - \frac{1}{3}H = \frac{1}{6}H$)

При этом для новых температуры T' и давления p2' имеем

$$(p_2' + \frac{Mg}{S})(h + dh)S = (p_2' + \frac{Mg}{S})\frac{1}{2}HS = 2\nu RT'$$

$$p_2'(H - h - dh)S = \nu RT'$$

Откуда:

$$p_2' = \frac{Mg}{S}$$

$$T' = \frac{mg}{2\nu R}$$

$$dT = T' - T = \frac{5}{18}\frac{MgH}{\nu R}$$

$$dh = \frac{1}{6}H$$

$$Q = \frac{3}{2}3\nu RdT + Mgdh = \frac{5}{4}MgH + \frac{1}{6}MgH = \frac{17}{12}Mgh;$$

Ответ на первый вопрос: $\frac{17}{12}Mgh$

Для ответа на второй вопрос рассмотрим выражение для давления и температуры при произвольном h:

$$\boldsymbol{p_2} = \frac{\boldsymbol{Mg}}{\boldsymbol{S}\left(\frac{\boldsymbol{2H}}{\boldsymbol{h}} - \boldsymbol{3}\right)}$$

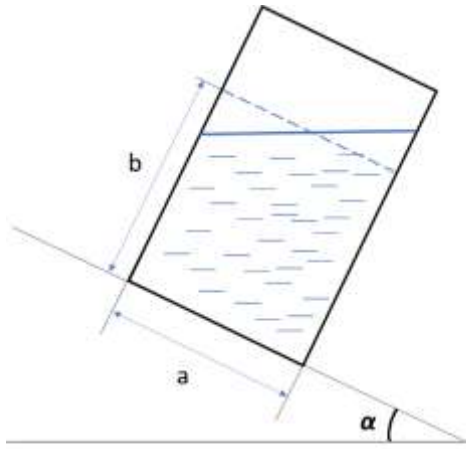
$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{Mg}}{\boldsymbol{\nu R}} * \frac{\boldsymbol{H-h}}{\frac{\boldsymbol{2H}}{\boldsymbol{h}} - \boldsymbol{3}}$$

для данного по условию отношения объемов S*(H-h)/(Sh)=H/h-1=1/2 высота уровня поршня над дном сосуда будет h=2/3H. Такое отношение будет устанавливаться, когда давление и температура в обеих частях будут бесконечными. Для этого потребовалось бы бесконечная энергия.

Ответ на второй вопрос: бесконечность (как вариант - ситуация невозможна, нефизична).

Задача 5

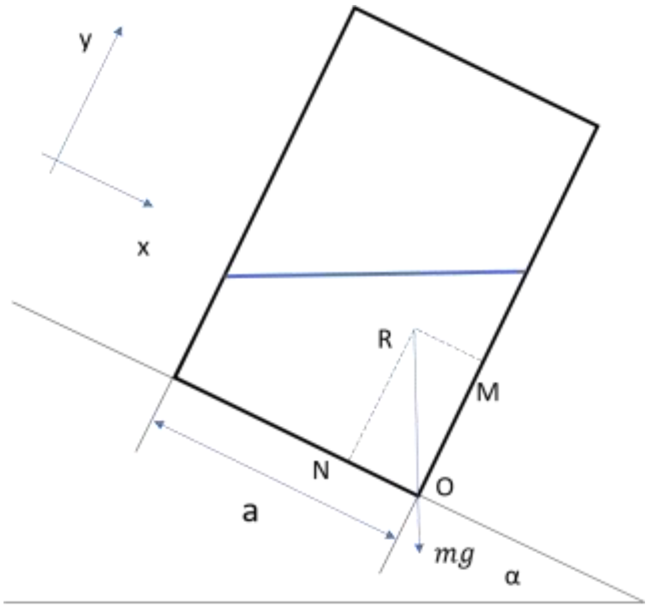
Сосуд квадратного сечения со стороной ***a*** и высокими стенками заполняют водой до некоторого уровня ***b > a/2*** и затем ставят на наклонную плоскость с углом наклона **α = 30°**. Определите, при каком *минимальном* объеме воды сосуд перевернется. Сосуд с плоскости не соскальзывает. Массой пустого сосуда пренебречь.



Примечание: центр тяжести однородного треугольника находится в точке пересечения медиан.

Решение

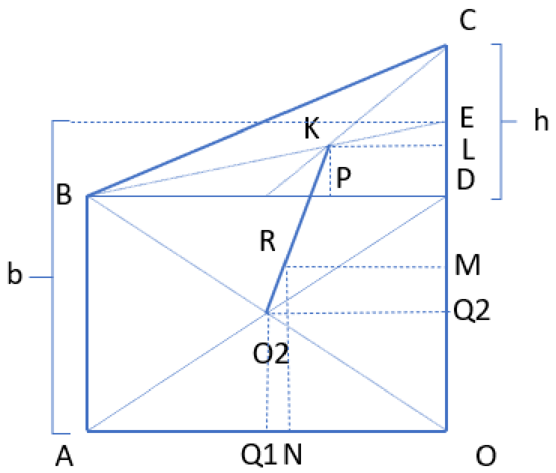
Сосуд с водой перевернется, когда моменты сил относительно точки O, стремящиеся перевернуть сосуд, будут равны моментам сил, этому мешающим. Эти силы – проекции силы тяжести. Чтобы определить моменты этих сил, необходимо найти координаты центра массы воды в стакане.



$$m_в g sin\alpha \cdot RN = m_в g cos\alpha \cdot RM$$

Условие *b>a/2* и угол наклона в $\mathbf{30}°$ однозначно определяют, что объем, занимаемый водой в сосуде, будет трапециевидной формы. Центр масс воды обозначим точкой R. Чтобы найти плечи RN и RM, к которым приложены проекции силы тяжести, рассмотрим в плоскости XY прямоугольную трапецию.

Положение центра масс этой трапеции можно найти, рассмотрев по отдельности положения центров масс прямоугольника и прямоугольного треугольника (см рисунок), а затем найти положение центра масс составной фигуры.



Центр масс прямоугольного треугольника находится в точке пересечения медиан. При этом медианы делятся точкой пересечения в отношении 2 к 1, считая от вершины. Введем обозначения *OE = b*, *CD = h* и tg*α = h/a.* При этом для треугольника BCD:

$$KL = \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3}a, \qquad KP = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}h$$

Для прямоугольника ABDO:

$$O_2Q_2 = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}a, \qquad O_2Q_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(b - \frac{h}{2}),$$

Координаты центра масс трапеции найдем по формуле для центра масс:

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{S_1x_1 + S_2x_2}{S_1 + S_2}$$

Где x – координата центра масс фигуры, S – ее площадь (плотность воды и поперечный размер сосуда сокращаются).

Подготовим все значения для расчета по формуле (индексы tr – треугольник, pr – прямоугольник, координаты отсчитываются от точки O):

$$S_{tr} = \frac{1}{2}ah$$

$$S_{pr} = a(b - \frac{h}{2})$$

$$S_{tr} + S_{pr} = ab$$

$$x_{tr} = KL = \frac{1}{3}a$$

$$y_{tr} = KP = b - \frac{1}{6}h$$

$$x_{pr} = \frac{1}{2}a$$

$$y_{pr} = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}h$$

Координаты центра масс тогда:

$$x_c = RM = \frac{1}{2}a - \frac{ah}{12b}$$

$$y_c = RN = \frac{1}{2}b + \frac{1}{24}\frac{h^2}{b}$$

Вернемся к равенству моментов сил:

$$m_{\text{в}} g sin\alpha \cdot RN = m_{\text{в}} g cos\alpha \cdot RM$$

$$tg\alpha \cdot RN = RM$$

Получаем квадратное уравнение относительно b:

$$b^2 - \frac{ab}{tg\alpha} + \frac{1}{12}a^2(tg^2\alpha + 2) = 0$$

$$D = \frac{a^2}{tg^2\alpha} - \frac{a^2}{3}(2 + tg^2\alpha)$$

Корни уравнения:

$$b_{1,2} = \frac{1}{2}a\left(\frac{1}{tg\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{tg^2\alpha} - \frac{1}{3}(2 + tg^2\alpha)}\right)$$

в условии b>a/2. Оценивая численно выражение в скобках, берем ответ со знаком +. Ответ с минусом даст значение объема, при котором будет треугольник, а не трапеция, что потребует иного рассмотрения задачи (поиска центра масс).

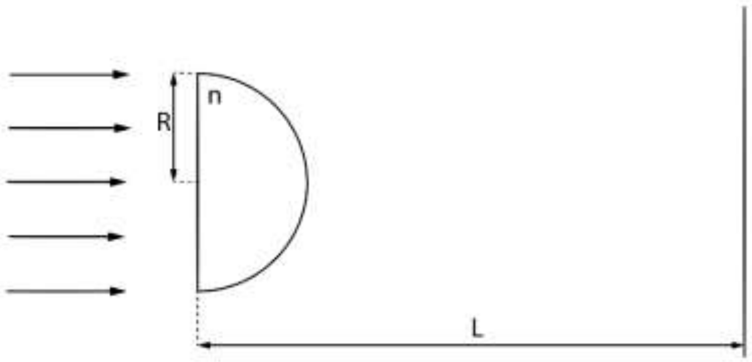
Объем воды тогда находится как:

$$V = ba^2$$

10 класс Вариант 2

Задача 1

Параллельный пучок света нормально падает на плоскую поверхность полушария радиуса ***R*=2 см** (см. рисунок) из материала с показателем преломления ***n*** в **√2** (корень из двух) раз больше показателя преломления воздуха. На расстоянии ***L*=10 см** от левого края полушария установлен экран перпендикулярный падающему пучку света. Определите размер светового пятна **S** на экране, если известно, что он расположен за областью схождения преломленных лучей.



Решение:

Свет, пройдя через плоскую грань полушария, будет преломляться на его правой границе. Существует критический угол, при превышении которого свет испытает полное внутреннее отражение. Необходимо помнить, что вследствие сферических аберраций, фокус для лучей, идущих на разном расстоянии от оптической оси, отличается. Однако, размер светового пятна на экране, расположенном за областью схождения преломленных лучей,будет определяться лучами, падающими на правую границу под критическим углом и далее преломленными под углом 90°.

1) Определим критический угол:

$$sin(\alpha_{crit}) = \frac{1}{n} \alpha_{crit} = arcsin(\frac{1}{n})$$

2) Определим координаты лучей, падающих на правую границу под критическим углом:

$$y = R * sin(\alpha_{crit}) = \frac{R}{n} \quad x = R * cos(\alpha_{crit}) = R * \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$$

3) Определим угол хода такого луча относительно горизонтали и найдем величину y’ (отмечена на рисунке):

$$\beta = 90° - \alpha_{crit}$$

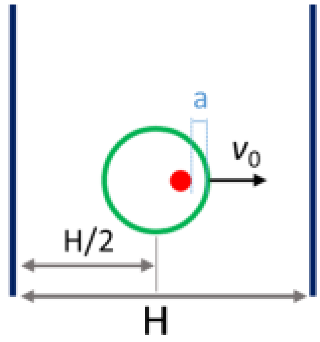
$$tg(\beta) = \frac{y’}{L - x} y’ = tg(\beta) * (L - x)$$

$$S = 2(y' - y) = 2\left(tg(\beta) * (L - x) - \frac{R}{n}\right) = \ \dots\dots\dots. = 2\left(L * \sqrt{n^2 - 1}\ -\ R * n\right) =$$

$$= 20 - 4\sqrt{2}$$

Задача 2

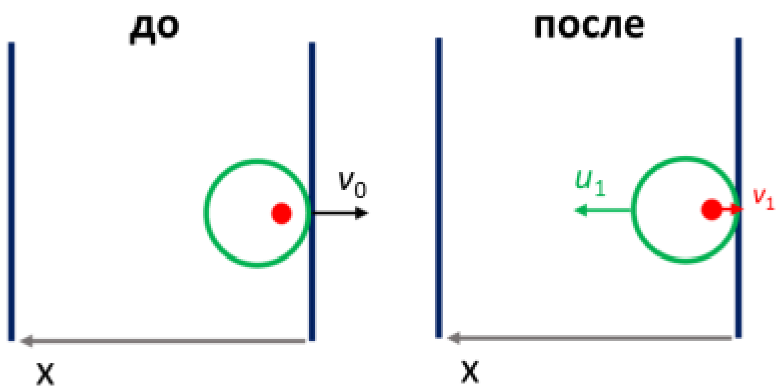
Полая шайба массой ***M*** и радиусом ***R*** в начальный момент находится на горизонтальной плоскости посередине между двумя ограждениями, расположенными на расстоянии ***H*=19/6·*R*** друг от друга. В полости шайбы на расстоянии ***a*=*R*/3** от стенки расположен небольшой грузик массой ***m*** (***M*=2*m***). Шайбе с грузиком сообщают скорость $\boldsymbol{v_0}$ в направлении, указанном на рисунке. Считая, что трения в системе нет, а все удары абсолютно упругие, найдите, сколько времени пройдет до второго столкновения грузика с внутренней стенкой шайбы.



Решение

Шайба будет двигаться равномерно, а грузик будет покоиться в системе отсчета, связанной с шайбой, до момента столкновения с нижним ограждением.

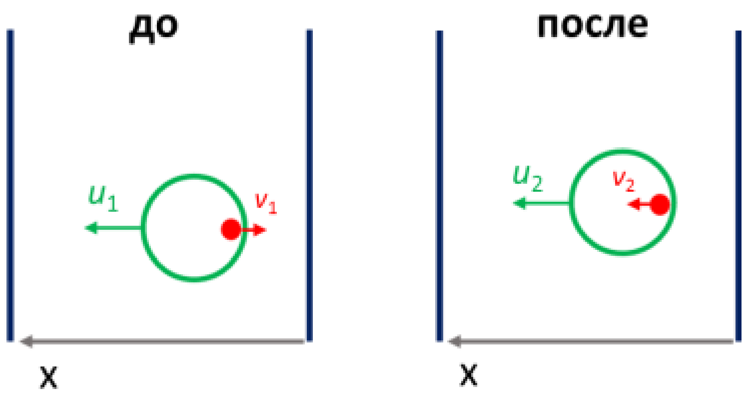
А) **Столкновение шайбы с правым ограждением**



В этот момент произойдет абсолютно упругий удар. Шайба начнет двигаться в противоположном направлении со скоростью равной по модулю v_0, а грузик продолжит движение (относительно плоскости) в том же направлении с той же скоростью v_0 по инерции.

Время до столкновения с правым ограждением $\Delta t_1 = \frac{\frac{H}{2} - R}{v_o} = \frac{\frac{\frac{19}{6}R}{2} - R}{v_0} = \frac{7}{12}\frac{R}{v_0}$.

Б) **Первое столкновение грузика со стенкой шайбы**



Закон сохранения импульса в проекции на ось x (заметим, что $v_1 = v_0$):

$$-mv_1 + Mu_1 = mv_2 + Mu_2, \tag{1}$$

закон сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mu_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2}. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) следует решать как систему уравнений с двумя неизвестными (u_2, v_2). Для этого сначала преобразуем выражение (1):

$$-mv_0 + 2mv_0 = mv_2 + 2mu_2,$$

$$v_0 = v_2 + 2u_2,$$

$$v_2 = v_0 - 2u_2, \tag{3}$$

Преобразуем (2):

$$mv_0^2 + 2mv_0^2 = mv_2^2 + 2mu_2^2,$$

$$v_0^2 + 2v_0^2 = v_2^2 + 2u_2^2,$$

$$53 = v_2^2 + 2u_2^2,$$

Подставим (3):

$$3v_0^2 = (v_0 - 2u_2)^2 + 2u_2^2,$$

$$3u_2^2 - 2v_0u_2 - v_0^2 = 0.$$

Откуда

$$u_2 = \frac{2v_0 - 4v_0}{6} = -\frac{1}{3}v_0. \tag{4}$$

Получилось, что проекция скорости шайбы на ось x после столкновения отрицательна. Это значит, что в действительности после столкновения с грузиком, шайба будет двигаться вправо.

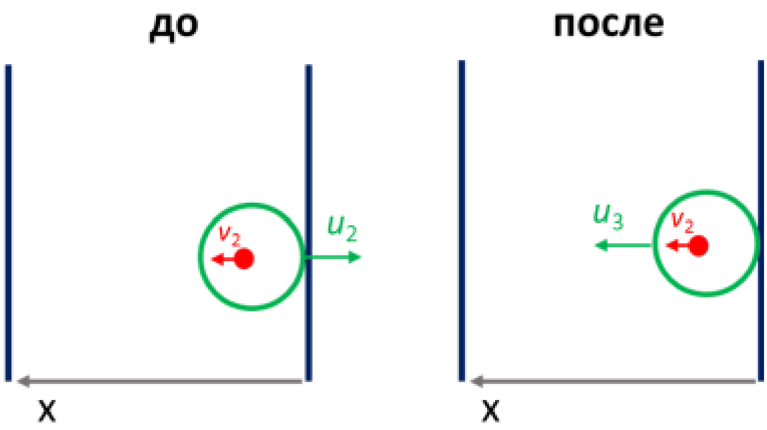
Подставим результат в (3)

$$v_2 = v_0 + 2 \cdot \frac{1}{3}v_0 = \frac{5}{3}v_0. \tag{5}$$

Найдем промежуток времени между столкновениями А и Б. Грузик пройдет расстояние a, его скорость в системе отсчета, связанной с шайбой равна $2v_0$, тогда $\Delta t_2 = \frac{a}{2v_0} = \frac{R}{6v_0}$.

Расстояние, которое преодолеет шайба за это время $S_2 = u_1 \cdot \Delta t_2 = v_0 \cdot \frac{R}{6v_0} = \frac{R}{6}$.

В) **Столкновение шайбы с правым ограждением**



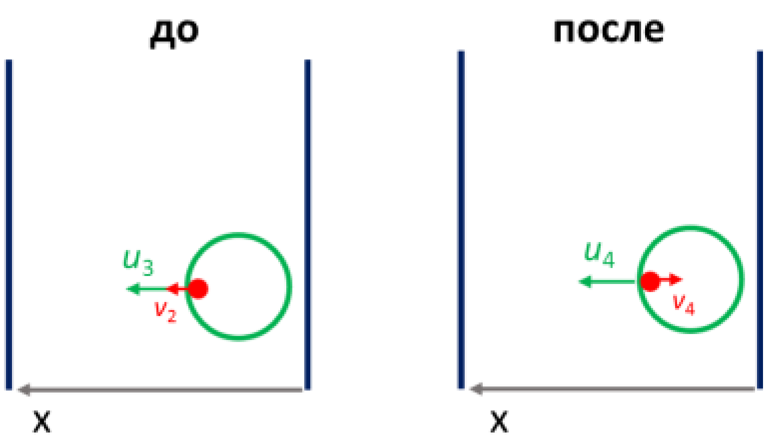
Учитывая, что при таком столкновении скорость (и, следовательно, импульс грузика не изменятся), можно показать, что скорость шайбы не изменится по модулю, а лишь поменяет направление на противоположное $u_3 = -u_2 = \frac{1}{3}v_0$.

Найдем промежуток времени между столкновениями Б и В. Шайба преодолеет расстояние $S_2 = \frac{R}{6}$, ее скорость при этом равна $\frac{1}{3}v_0$, тогда $\Delta t_3 = \frac{\frac{R}{6}}{\frac{1}{3}v_0} = \frac{R}{2v_0}$.

Расстояние, которое преодолеет грузик за это время в системе отсчета, связанной с шайбой $s_3 = (u_2 + v_2) \cdot \Delta t_3 = (\frac{1}{3}v_0 + \frac{5}{3}v_{0)} \cdot \frac{R}{2v_0} = R$.

То есть удар шайбы с ограждением произойдет раньше, чем второй удар грузика о стенку шайбы.

Г) **Второе столкновение грузика со стенкой шайбы**



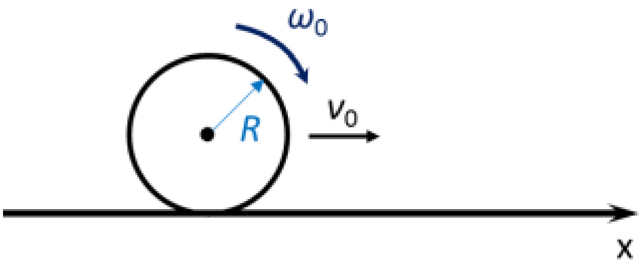
Найдем промежуток времени между столкновениями В и Г Δt_4. Между столкновениями В и Г грузик пройдет расстояние *R*, скорость грузика в системе отсчета, связанной с шайбой равна $v_2 - u_3 = \frac{4}{3} v_0$. Тогда $\Delta t_4 = \frac{R}{\frac{4}{3} v_0} = \frac{3}{4} \frac{R}{v_0}$.

Окончательно получим $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \Delta t_4 = \frac{7}{12} \frac{R}{v_0} + \frac{R}{6 v_0} + \frac{R}{2 v_0} + \frac{3}{4} \frac{R}{v_0} = 2 \frac{R}{v_0}$.

<u>Ответ</u>: $\Delta t = 2 \frac{R}{v_0}$.

Задача 3

Гимнаст раскручивает тонкий обруч радиусом ***R*** до угловой скорости $\boldsymbol{\omega_0}$ вокруг его оси, а затем ставит его на пол спортивного зала и придает ему начальную скорость $\boldsymbol{v_0}$ в направлении вдоль пола так, как показано на рисунке. Известно, что в начальный момент времени модуль скорости поступательного движения обруча был меньше модуля скорости вращательного движения. Коэффициент трения обруча о пол равен $\boldsymbol{\mu}$. Постройте график зависимости координаты центра обруча относительно оси *x* от времени.



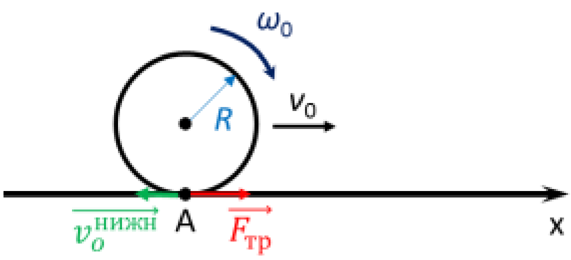
Примечание: Угловое ускорение **β** связано с моментом приложенных сил соотношением: ***Iβ = M***, где ***I*** – момент инерции тела относительно оси вращения, ***M*** – момент внешних сил. Для обруча, вращающегося вокруг своей оси ***I=mR²***.

Решение

Запишем скорость нижней точки (обозначим её А) в начальный момент времени нижней точки обруча:

$$v_0^{\text{нижн}} = \omega_0 R - v_0 \qquad (1)$$

Согласно (1) и условию $v_0 < \omega_0 R$ скорость точки А в начальный момент времени направлена влево. Сперва обруч будет двигаться с проскальзыванием, т.к. скорость точки обруча "А" относительно земли отлична от нуля. При этом на обруч будет действовать сила трения скольжения по модулю равная μN. Сила трения препятствует движению, следовательно, она направлена противоположно, то есть вправо.



Сначала скорость поступательного движения колеса будет увеличиваться, колесо будет двигаться с проскальзыванием. Проскальзывание прекратится, когда суммарная скорость нижней точки обруча относительно земли будет равна нулю. Эта скорость складывается из скорости поступательного движения обруча и скорости из-за вращательного движения. Скорость поступательного движения направлена вправо, а вращение происходит по часовой стрелке, следовательно для прекращения проскальывания модули скорости и ωR должны стать равными, т.е. $v(t) = \omega(t)R$

Поступательное движение обруча на этом этапе движения с проскальзыванием можно рассматривать как равноускоренное, то есть координата его центра будет меняться по закону

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \qquad (2)$$

Найдем ускорение обруча из второго закона Ньютона:

$$F_{\text{тр}} = ma \Rightarrow \mu mg = ma \Rightarrow a = \mu g. \qquad (3)$$

Координата центра обруча с учетом (3):

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{\mu g t^2}{2}. \qquad (4)$$

В момент времени $\tilde{t}$, при $v(\tilde{t}) = \omega(\tilde{t})R$ проскальзывание прекратится. Найдем этот момент времени. Скорость будет увеличиваться и с учетом (3)

$$v(\tilde{t}) = v_0 + a\tilde{t} = v_0 + \mu g\tilde{t}, \qquad (5)$$

Угловая скорость будет уменьшаться

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 + \beta\tilde{t}, \qquad (6)$$

где β – угловое ускорение.

Запишем основное уравнение динамики твердого тела

$$I\beta = M, \qquad (7)$$

I – момент инерции, *M* – момент силы (силы трения).

$$I\beta = -\mu mgR. \qquad (8)$$

Обруч представляет собой тонкостенный цилиндр, тогда его момент инерции вдоль оси, проходящей через его ось равен $I = mR^2$.

Тогда

$$mR^2\beta = -\mu mgR. \qquad (9)$$

Отсюда угловое ускорение

$$\beta = -\frac{\mu g}{R}. \qquad (10)$$

Тогда (6) можно переписать как

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 - \frac{\mu g}{R}\tilde{t}, \qquad (11)$$

Приравниваем (6) и (11) и получаем

$$2\mu g\tilde{t} = \omega_0 R - v_0. \qquad (12)$$

Тогда момент времени, в который проскальзывание прекратится

$$\tilde{t} = \frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g}. \qquad (13)$$

Координата центра обруча в момент времени $\tilde{t}$

$$x(\tilde{t}) = x_0 + v_0\tilde{t} + \frac{\mu g\tilde{t}^2}{2} = x_0 + v_0\frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} + \frac{\mu g}{2}\left(\frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g}\right)^2 = x_0 + v_0\frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} + \frac{(\omega_0 R - v_0)^2}{8\mu g}. \quad (14)$$

Скорость центра обруча в момент времени $\tilde{t}$ (5) можно переписать

$$v(\tilde{t}) = v_0 + \mu g\frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} = v_0 + \frac{\omega_0 R - v_0}{2} = \frac{v_0 + \omega_0 R}{2}. \quad (15)$$

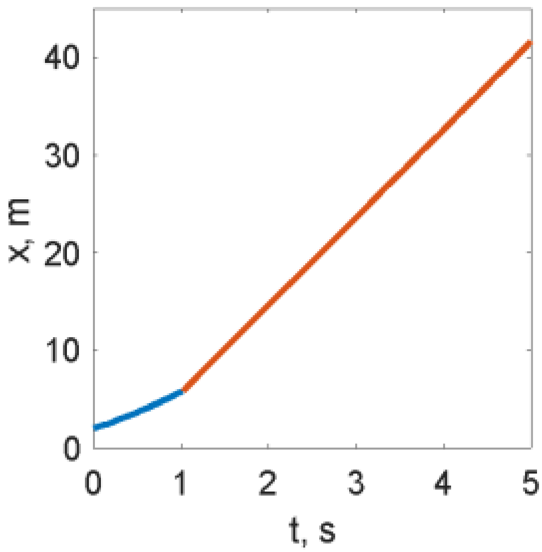
С момента $\tilde{t}$ проскальзывание прекратится и нижняя точка обруча “А” будет иметь нулевую скорость. Следовательно на обруч будет действовать сила трения покоя. Сила трения покоя может принимать значения от нуля до силы трения скольжения $0 \le F_{\text{тр}} \le \mu N$. Сила трения покоя компенсирует внешние силы. Т.к. на обруч не действуют внешние силы помимо силы трения покоя, она равна нулю и обруч будет двигаться равномерно

$$x(t) = x(\tilde{t}) + v(t - \tilde{t}) = x_0 + v_0\frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} + \frac{(\omega_0 R - v_0)^2}{8\mu g} + \frac{v_0 + \omega_0 R}{2}\left(t - \frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g}\right). \quad (16)$$

Тогда координата центра обруча меняется со временем следующим образом

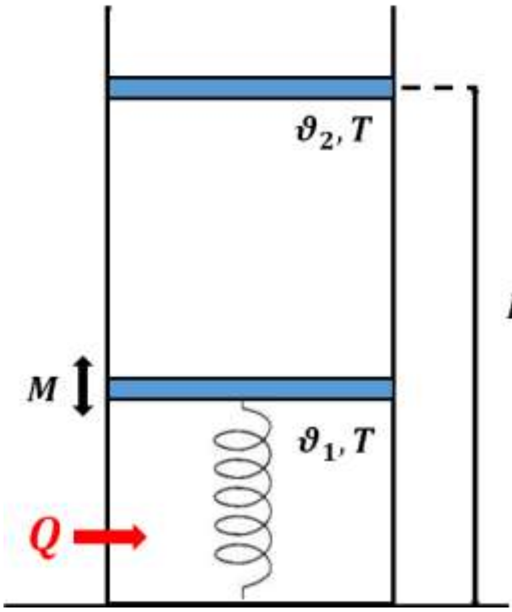
$$x(t) = \begin{cases} x_0 + v_0 t + \frac{\mu g t^2}{2} \text{ при } t < \frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} \\ x_0 + v_0\frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} + \frac{(\omega_0 R - v_0)^2}{8\mu g} \text{ при } t = \frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} \\ x_0 + v_0\frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} + \frac{(\omega_0 R - v_0)^2}{8\mu g} + \frac{v_0 + \omega_0 R}{2}\left(t - \frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g}\right) \text{ при } t > \frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g}. \end{cases} \quad (17)$$

Тогда график зависимости x(t)



Задача 4

Открытый сверху цилиндрический сосуд с площадью основания ***S*** расположен вертикально внутри вакуумной камеры. Внутри сосуда размещены два одинаковых поршня массой ***M***, герметично разделяющие его на две части. Поршни могут двигаться вдоль сосуда без трения. Нижний поршень прикреплен ко дну сосуда пружиной жесткостью ***k***. Начальная высота верхнего поршня над дном сосуда – ***H***, пружина не деформирована. Внутри каждой части сосуда находится идеальный одноатомный газа при одинаковой температуре. Количество вещества в нижней части в два раза больше количества вещества в верхней. Сосуду сообщили некоторое количество теплоты ***Q*** таким образом, что температура газа в сосудах оставалась одинаковой. Пружина при этом растянулась на величину ***dx***. Определите ***Q***. Сосуд теплоизолирован от внешней среды. Толщиной поршней пренебречь.



Решение:

давление в верхней части:

$$p_2 = \frac{Mg}{S}$$

давление в нижней части:

$$p_1 = p_2 + \frac{Mg}{S} = \frac{2Mg}{S}$$

Пусть h – начальная высота нижнего поршня. Записываем уравнения Менделеева-Клапейрона для каждой части:

$$\frac{Mg}{S}(H - h)S = \nu RT$$

$$\frac{2Mg}{S}hS = 2\nu RT$$

Откуда находим h и T:

$$h = \frac{H}{2}$$

$$T = \frac{MgH}{2\nu R}$$

Далее, сообщаем сосуду количество теплоты Q. Оно пойдет на нагрев газа, на передвижение поршней и на растяжение пружины (изменение уровня нижнего поршня равно растяжению пружины):

$$Q = \frac{3}{2}3\eta RdT + \ Mg(dh + dx) + k\frac{dx^2}{2}$$

Где $dT = T' - T$ – изменение температуры

Давление газа в верхней части не изменилось, а изменение объема пропорционально разности изменений уровней верхнего и нижнего поршней ($dh - dx$):

$$\frac{Mg}{S}(\frac{H}{2} + dh - dx)S = \nu RT'$$

$$\frac{MgH}{2} + Mg(dh - dx) = \nu RT'$$

ранее мы имели:

$$\frac{MgH}{2} = \nu RT$$

откуда:

$$Mg(dh - dx) = \nu R(T' - T) = \nu RdT$$

Давление в нижней части:

$$p_1 = p_2 + \frac{Mg + kdx}{S} = \frac{2Mg + kdx}{S}$$

Из уравнение Менделеева-Клапейрона для нижней части находим установившуюся температуру:

$$(2Mg + kdx)(\frac{H}{2} + dx) = 2\nu RT'$$

$$dT = T' - T = \frac{\left(Mg + \frac{kdx}{2}\right)\left(\frac{H}{2} + dx\right) - Mg * \frac{H}{2}}{\nu R} = \frac{\frac{kdxH}{4} + Mgdx + \frac{kdx^2}{2}}{\nu R}$$
$$= \frac{dx(\frac{kH}{4} + Mg + \frac{kdx}{2})}{\nu R}$$

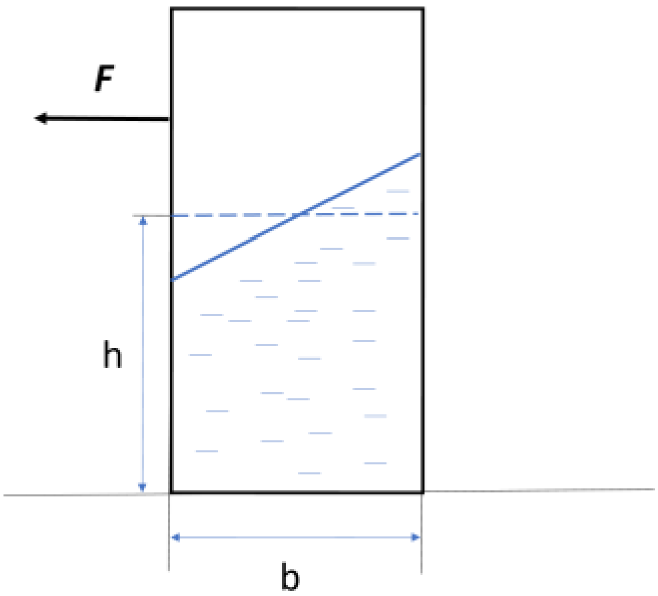
Расписываем Q:

$$Q = \frac{3}{2}3\eta RdT + \ Mg(dh + dx) + \frac{kdx^2}{2} \ = \frac{9}{2}\nu RdT + Mgdh - Mgdx + 2Mgdx + \frac{kdx^2}{2} =$$
$$= \frac{9}{2}\nu RdT + \nu RdT + 2Mgdx + k\frac{dx^2}{2} = \frac{11}{2}\nu RdT + 2Mgdx + k\frac{dx^2}{2}$$
$$= \frac{11}{2}dx\left(\frac{kH}{4} + Mg + \frac{kdx}{2}\right) + 2Mgdx + k\frac{dx^2}{2}$$
$$= dx\big(7.5Mg + k(1.375H + 3.25dx)\big)$$

Ответ: $dx\big(7.5Mg + k(1.375H + 3.25dx)\big)$

Задача 5

Прямоугольный сосуд с высокими стенками с дном в форме квадрата со стороной ***b*** заполнен водой до уровня ***h***, причем ***h>b/2***. Сосуд тянут по горизонтальной поверхности за левую боковую грань с силой ***F=mg***, где ***m*** – полная масса воды в сосуде. Определите, на каком минимальном расстоянии от дна сосуда должна быть расположена точка приложения силы, чтобы сосуд перевернулся. Силой трения и массой пустого сосуда пренебречь.



Примечание: центр тяжести однородного треугольника находится в точке пересечения медиан.

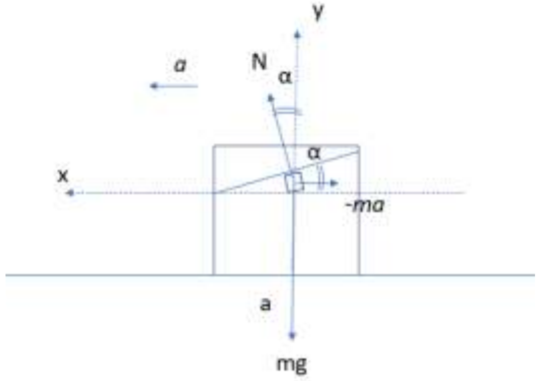
Решение:

По условию задачи и рисунку подразумевается, что в результате приложения силы сосуд с водой будет двигаться равноускоренно, а уровень воды в стакане будет таким, как изображено на рисунке. По второму закону Ньютона:

$$ma = F$$

Где m – масса воды в стакане (может быть определена через плотность и объем, дано по условию).

При равноускоренном движении поверхность воды будет расположены под некоторым углом к горизонтали. Рассмотрим малый элемент воды массой Δm. В неинерциальной системе отсчета, связанной с сосудом, элемент покоится у поверхности. На него будут действовать сила тяжести, сила реакции опоры и сила инерции:



Рассмотрим проекции сил на оси X и У:

$$\Delta ma = Nsin\alpha$$

$$Ncos\alpha = \Delta mg$$

Получаем:$F = mgtg\alpha$

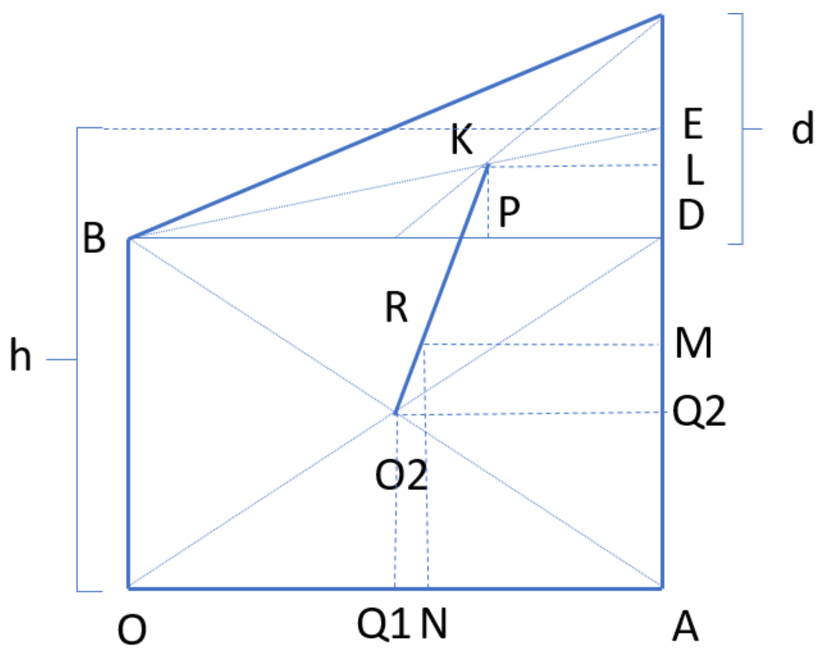
$$tg\alpha = \frac{F}{mg}$$

Здесь α – угол наклона поверхности воды к горизонту. Поскольку по условия $F = mg$, то $\alpha = 45°$.

Сосуд с водой перевернется тогда, когда моменты сил относительно точки О, стремящиеся перевернуть сосуд, будут равны моментам сил, этому мешающим:

$$Fl = mg \cdot l_1 + ma \cdot l_2$$

Здесь l_1 и l_2 – плечи сил, определяемые положением центра масс объема воды, l – искомая точка приложения силы F. Условие $b > h/2$ вместе с найденным углом $\alpha = 45°$ однозначно определяют, что объем, занимаемый водой в сосуде, будет трапециевидной формы:



Центр масс воды обозначим точкой R. Чтобы найти плечи ON и NR, рассмотрим в плоскости XY прямоугольную трапецию: Центр тяжести прямоугольного треугольника находится в точке пересечения медиан. При этом медианы делятся точкой пересечения в отношении 2 к 1, считая от вершины. Введем обозначения *BD = b*, *CD = d* и tg*α = d/b (d= b tgα).* При этом для треугольника BCD:

$$KL = \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3}b, \qquad KP = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}d$$

Для прямоугольника ABDO:

$$O_2Q_2 = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}b, \qquad O_2Q_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(h - \frac{d}{2}),$$

Координаты центра тяжести трапеции найдем по формуле центра масс:

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{S_1x_1 + S_2x_2}{S_1 + S_2}$$

Где x – координата центра масс фигуры, S – ее площадь (плотность воды и поперечный размер сосуда сокращаются).

Подготовим все значения для расчета по формуле (индексы tr – треугольник, pr – прямоугольник, координаты отсчитываются от точки O):

$$S_{tr} = \frac{1}{2}bd$$

$$S_{pr} = bh - \frac{bd}{2}$$

$$S = bh$$

$$x_{tr} = KL = \frac{2}{3}b$$

$$y_{tr} = KP = h - \frac{1}{6}d$$

$$x_{pr} = \frac{1}{2}b$$

$$y_{pr} = \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}d$$

Расчет дает следующее значение:

$$x_c = ON = \frac{1}{2}b + \frac{bd}{12h} = \frac{1}{2}b + \frac{b^2tg\alpha}{12h}$$

$$y_c = RN = \frac{1}{2}h + \frac{1}{24}\frac{d^2}{h} = \frac{1}{2}h + \frac{1}{24}\frac{b^2tg(\alpha)^2}{h}$$

Вернемся к равенству моментов сил:

$$Fl = mgl_1 + Fl_2$$

$$l = \frac{mg}{F} l_1 + l_2$$

$$l_1 = \frac{1}{2} b + \frac{btg\alpha}{12h} = \frac{1}{2} b + \frac{b^2}{12h}$$

$$l_2 = \frac{1}{2} h + \frac{b^2}{24h}$$

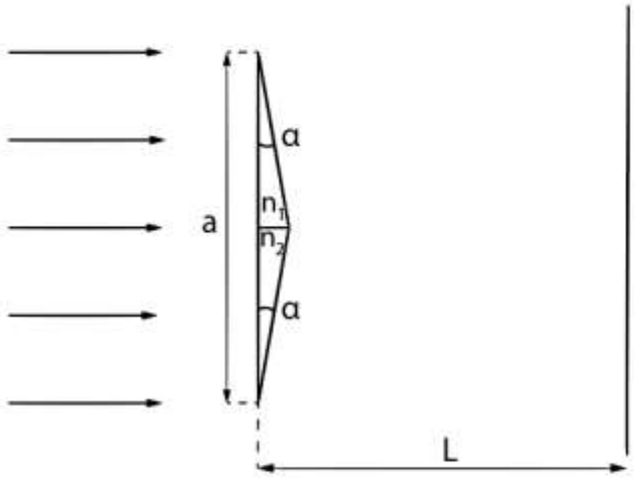
Откуда

$$l = \frac{b}{2} + \frac{b^2}{12h} + \frac{1}{2} h + \frac{b^2}{24h} = \frac{b + h}{2} + \frac{b^2}{8h}$$

10 класс Вариант 3

Задача 1

Бипризма Френеля представляет собой две склеенные прямоугольные треугольные призмы с малыми преломляющим углом **α** порядка десятых долей градуса. Бипризма освещается параллельным пучком света, падающим перпендикулярно основанию. Показатели преломления призм равны n_1 и n_2. Найдите ширину основания бипризмы a, если на экране, расположенном на расстоянии L от бипризмы и перпендикулярном падающему пучку света, наблюдается темная полоса шириной S.



Решение:

Размер темного пятна определяется ходом лучей, прошедших через края оснований каждой призмы. Углы падения на бипризму для каждого из этих лучей равны α.

1) Найдем углы преломления, учитывая, что все углы крайне малы.

$sin(\alpha)n_1 = sin(\beta_1 + \alpha)$, где β_1+α- угол преломления, β_1- угол хода преломленного луча относительно горизонтали.

$$\beta_1 = \alpha * (n_1 - 1)$$

$$\beta_2 = \alpha * (n_2 - 1)$$

2) Найдем длину отрезков A'C и B'D:

$$A'C = tg(\beta_1) * L = \beta_1 * L$$

$$B'D = \ \beta_2 * L$$

3) Размерпятна S:

$$S = OD + OC$$

$$OD = B'D - \frac{a}{2} = \beta_2 * L - \frac{a}{2}$$

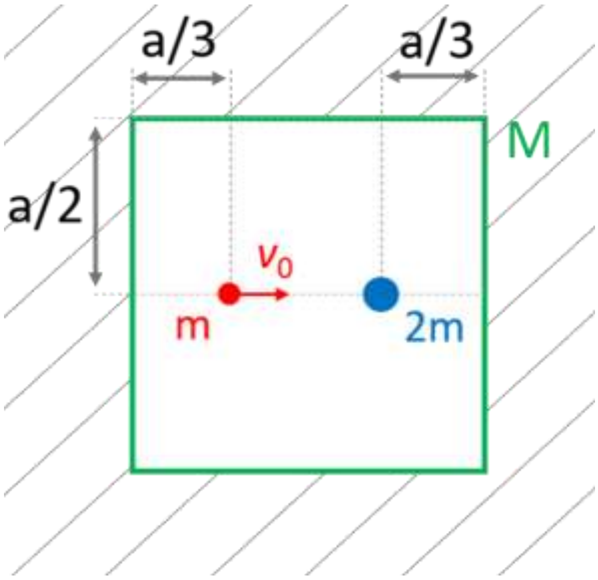
$$OC = A'C - \frac{a}{2} = \beta_1 * L - \frac{a}{2}$$

$$S = \beta_2 * L - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \beta_1 * L = L(\beta_1 + \beta_2) - a$$

$$a = L(\beta_1 + \beta_2) - S = \ldots\ldots. = \alpha L(n_1 + n_2 - 2) - S$$

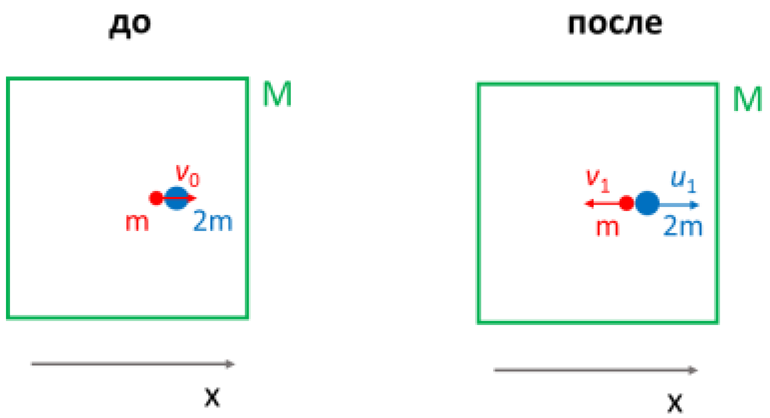
Задача 2

Тонкостенный квадратный короб массой ***M*** (длина стороны основания ***a***) находится на горизонтальной плоскости. Внутри короба на расстоянии ***a/3*** от левой стенки расположен грузик массой ***m***, на расстоянии ***a/3*** от правой стенки расположен грузик массой **2*m***, причем оба грузика равноудалены от верхней и нижней стенок короба. В начальный момент первому грузику сообщают скорость $\boldsymbol{v_0}$ в направлении второго грузика. Считая, что трения в системе нет, все удары абсолютно упругие, а ***M* = 4*m***, найдите на каком расстоянии от левой стенки произойдет второе столкновение грузиков.



Решение

А) **Первое столкновение грузиков**



Закон сохранения импульса в проекции на ось x:

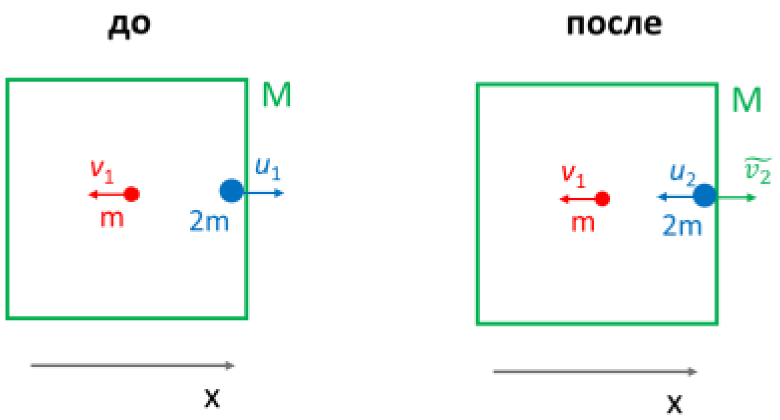
$$mv_0 = -mv_1 + 2mu_1, \tag{1}$$

закон сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{2mu_1^2}{2}. \tag{2}$$

Решая совместно уравнения (1) и (2) можно получить $u_1 = \frac{2}{3}v_0$ и $v_1 = \frac{1}{3}v_0$.

Б) **Столкновение второго грузика с правой стенкой**



Закон сохранения импульса в проекции на ось x:

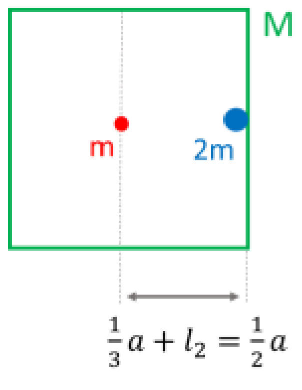
$$2mu_1 = M\widetilde{v_2} - 2mu_2, \tag{3}$$

закон сохранения энергии

$$\frac{2mu_1^2}{2} = \frac{M\widetilde{v_2}^2}{2} + \frac{2mu_2^2}{2}. \tag{4}$$

Решая совместно уравнения (3) и (4), учитывая, что $M = 4m$, $u_1 = \frac{2}{3}v_0$, можно получить $\widetilde{v_2} = \frac{4}{9}v_0$ и $u_2 = \frac{2}{9}v_0$.

Между столкновениями А) и Б) второй грузик пройдет расстояние $L_2 = \frac{1}{3}a$, при этом его скорость $u_1 = \frac{2}{3}v_0$, тогда между двумя столкновениями пройдет время $\Delta t_2 = \frac{L_2}{u_1} = \frac{a}{2v_0}$. За это время первый груз пройдет расстояние $l_2 = v_1 \cdot \Delta t_2 = \frac{1}{6}a$. То есть после столкновения Б) положение грузов будет таким, как показано на рисунке:



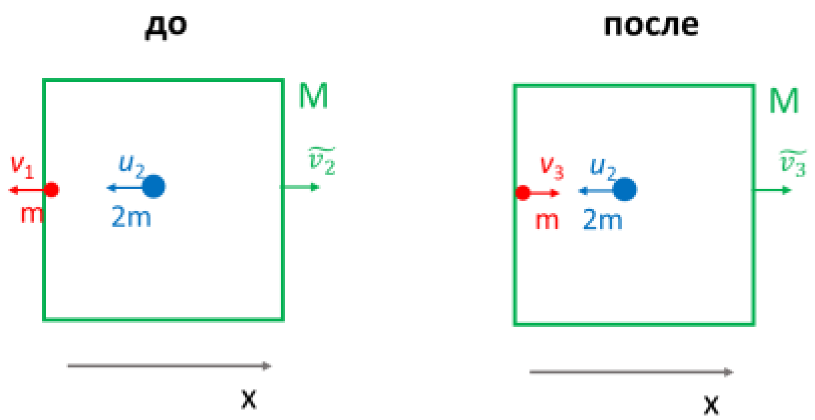
Далее нужно оценить, что произойдет раньше – столкновение первого груза с левой стенкой или столкновение грузов между собой.

Первому грузу до столкновения с левой стенкой нужно преодолеть расстояние $\frac{a}{2}$, его скорость в системе отсчета связанной с коробом равна $v_1 + \widetilde{v_2}$, следовательно время до столкновения $\tau_2 = \frac{9}{14} \cdot \frac{a}{v_0}$.

Расстояние между грузами равно $\frac{a}{2}$, скорость их сближения $v_1 - u_2$, тогда время до столкновения двух грузов $t_2 = \frac{9}{2}\frac{a}{v_0}$.

Так как $\tau_2 < t_2$, сначала произойдет столкновение первого груза со стенкой.

В) **Столкновение первого груза с левой стенкой**



Закон сохранения импульса в проекции на ось x:

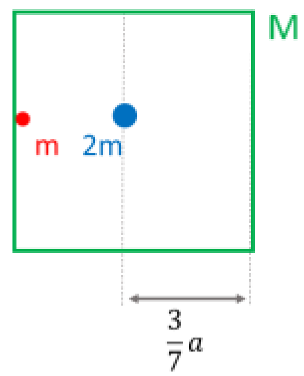
$$-mv_1 + M\widetilde{v_2} = mv_3 + M\widetilde{v_3}, \quad (5)$$

закон сохранения энергии

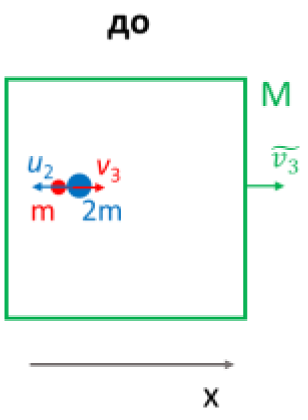
$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{M\widetilde{v_2^2}}{2} = \frac{mv_3^2}{2} + \frac{M\widetilde{v_3^2}}{2}. \quad (6)$$

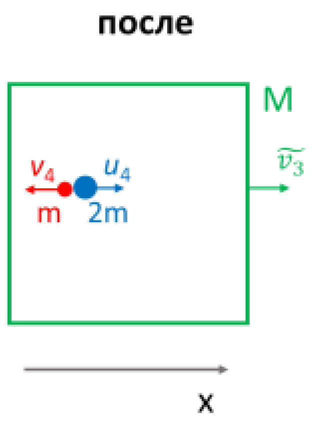
Откуда можно найти $\widetilde{v_3} = \frac{2}{15}v_0$ и $v_3 = \frac{41}{45}v_0$.

Между столкновениями Б) и В) пройдет время $\Delta t_3 = \tau_2 = \frac{9}{14}\cdot\frac{a}{v_0}$.За это время второй груз пройдет расстояние $L_3 = (u_2 + \widetilde{v_2})\cdot\Delta t_3 = \frac{3}{7}a$, то есть после удара В) расположение грузов будет следующим:



Г) **Второе столкновение шариков**





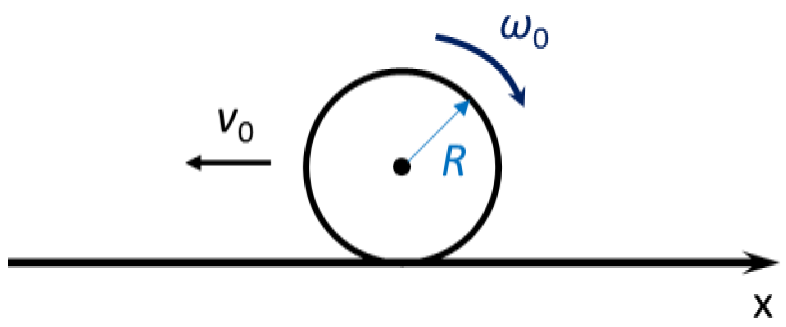
Между столкновениями В) и Г) грузикам нужно сблизиться на расстояние $a - L_3$, скорость их сближения $v_3 + u_2$. Следовательно, время между столкновениями В) и Г) $\Delta t_4 = \frac{a-L_3}{v_3+u_2} = \frac{60}{119}\frac{a}{v_0}$.

За это время первый грузик пройдет расстояние $l_4 = (v_3 - \widetilde{v_3}) \cdot \Delta t_4 = \frac{20}{51}a$.

<u>Ответ</u>: $\frac{20}{51}a$.

Задача 3

Гимнаст раскручивает тонкий обруч радиусом ***R*** до угловой скорости $\boldsymbol{\omega_0}$ вокруг его оси, а затем ставит его на пол спортивного зала и придает ему начальную скорость $\boldsymbol{v_0}$ в направлении вдоль пола так, как показано на рисунке. Известно, что в начальный момент времени модуль скорости поступательного движения обруча был больше модуля скорости вращательного движения. Коэффициент трения обруча о пол равен $\boldsymbol{\mu}$. Постройте график зависимости координаты центра обруча относительно оси *x* от времени.



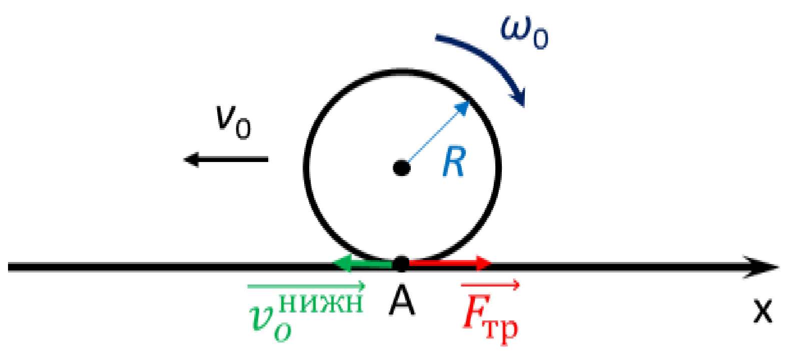
Примечание: Угловое ускорение **β** связано с моментом приложенных сил соотношением: ***Iβ = M***, где ***I*** – момент инерции тела относительно оси вращения, ***M*** – момент внешних сил. Для обруча, вращающегося вокруг своей оси ***I=mR***^{2}.

Решение

Запишем скорость нижней точки (обозначим её А) в начальный момент времени нижней точки обруча:

$$v_0^{\text{нижн}} = \omega_0 R + v_0 \tag{1}$$

Согласно (1) скорость точки А в начальный момент времени направлена влево. Сперва обруч будет двигаться с проскальзыванием, т.к. скорость точки обруча “А” относительно земли отлична от нуля. При этом на обруч будет действовать сила трения скольжения по модулю равная μN. Сила трения препятствует движению, следовательно, она направлена противоположно, то есть вправо.



Сначала колесо будет двигаться с проскальзыванием. Проскальзывание прекратится, когда суммарная скорость нижней точки обруча относительно земли будет равна нулю. Эта скорость складывается из скорости поступательного движения обруча и скорости из-за вращательного движения. Скорость поступательного движения направлена вправо, а вращение происходит по часовой стрелке, следовательно для прекращения проскалывания модули скорости и ωR должны стать равными, т.е. $v(t) = \omega(t)R$. Поступательное движение обруча на этом этапе движения с проскальзыванием можно рассматривать как равноускоренное, то есть координата его центра будет меняться по закону

$$x(t) = x_0 - v_0 t + \frac{at^2}{2}. \qquad (2)$$

Найдем ускорение обруча из второго закона Ньютона:

$$F_{\text{тр}} = ma \ \Rightarrow \ \mu mg = ma \ \Rightarrow a = \ \mu g. \qquad (3)$$

Координата центра обруча с учетом (3):

$$x(t) = x_0 - v_0 t + \frac{\mu g t^2}{2}. \qquad (4)$$

В момент времени $\tilde{t}$, при $v(\tilde{t}) = \omega(\tilde{t})R$ проскальзывание прекратится. Найдем этот момент времени. Скорость будет уменьшаться по модулю и с учетом (3)

$$v(\tilde{t}) = -v_0 + a\tilde{t} = -v_0 + \mu g\tilde{t}, \qquad (5)$$

Угловая скорость будет уменьшаться

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 + \beta\tilde{t}, \qquad (6)$$

где β – угловое ускорение.

Запишем основное уравнение динамики твердого тела

$$I\beta = M, \qquad (7)$$

I – момент инерции, M – момент силы (силы трения).

$$I\beta = -\mu mgR. \qquad (8)$$

Обруч представляет собой тонкостенный цилиндр, тогда его момент инерции вдоль оси, проходящей через его ось равен $I = mR^2$.

Тогда

$$mR^2\beta = -\mu mgR. \qquad (9)$$

Отсюда угловое ускорение

$$\beta = -\frac{\mu g}{R}. \qquad (10)$$

Тогда (6) можно переписать как

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 - \frac{\mu g}{R}\tilde{t}, \qquad (11)$$

Приравниваем (6) и (11) и получаем

$$2\mu g\tilde{t} = \omega_0 R + v_0. \qquad (12)$$

Тогда момент времени, в который проскальзывание прекратится

$$\tilde{t} = \frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g}. \quad (13)$$

Координата центра обруча в момент времени $\tilde{t}$

$$x(\tilde{t}) = x_0 - v_0\tilde{t} + \frac{\mu g \tilde{t}^2}{2} = x_0 - v_0\frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g} + \frac{\mu g}{2}\left(\frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g}\right)^2 = x_0 - v_0\frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g} + \frac{(\omega_0 R + v_0)^2}{8\mu g}. \quad (14)$$

Скорость центра обруча в момент времени $\tilde{t}$ (5) можно переписать

$$v(\tilde{t}) = -v_0 + \mu g\frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g} = -v_0 + \frac{\omega_0 R + v_0}{2} = \frac{\omega_0 R - v_0}{2}. \quad (15)$$

Т.к. по условию$\omega_0 R < v_0$, скорость обруча будет направлена влево ($v_0 < 0$)

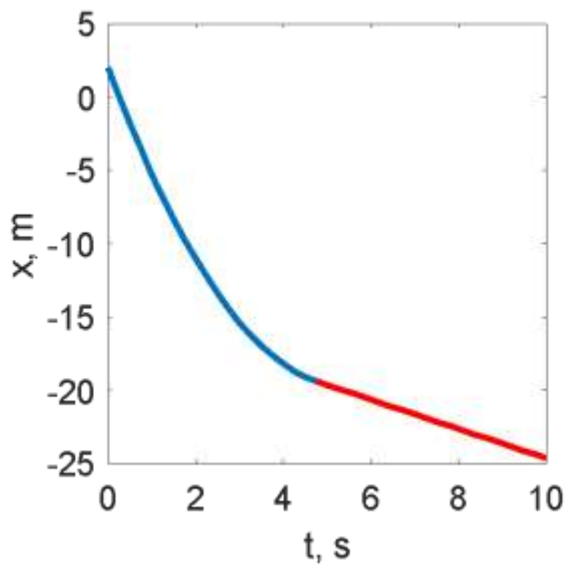
С момента $\tilde{t}$ проскальзывание прекратится и нижняя точка обруча “А” будет иметь нулевую скорость. Следовательно на обруч будет действовать сила трения покоя. Сила трения покоя может принимать значения от нуля до силы трения скольжения $0 \le F_{\text{тр}} \le \mu N$. Сила трения покоя компенсирует внешние силы. Т.к. на обруч не действуют внешние силы помимо силы трения покоя, она равна нулю и обруч будет двигаться равномерно

$$x(t) = x(\tilde{t}) + v(t - \tilde{t}) = x_0 - v_0\frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g} + \frac{(\omega_0 R + v_0)^2}{8\mu g} + \frac{\omega_0 R - v_0}{2}\left(t - \frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g}\right). \quad (16)$$

Тогда координата центра обруча меняется со временем следующим образом

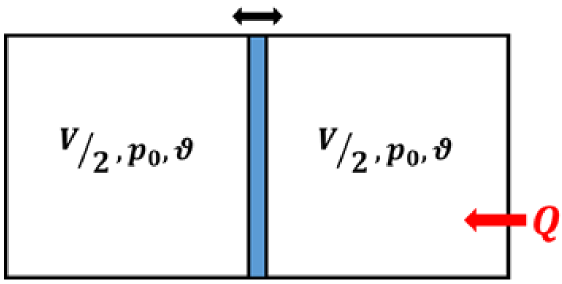
$$x(t) = \{x_0 - v_0 t + \frac{\mu g t^2}{2} \text{ при } t < \frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g} \; x_0 - v_0\frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g} + \frac{(\omega_0 R + v_0)^2}{8\mu g} \text{ при } t = \frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g} \; x_0 - v_0\frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g} + \frac{(\omega_0 R + v_0)^2}{8\mu g} + \frac{\omega_0 R - v_0}{2}\left(t - \frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g}\right) \text{ при } t > \frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g}. \quad (17)$$

Тогда график зависимости x(t)



Задача 4

Цилиндрический сосуд объемом ***V***, запаянный с обоих концов, расположен горизонтально. Внутри сосуд герметично разделен на две одинаковые части невесомым тонким поршнем, способным двигаться вдоль него без трения. Внутри каждой части находится по ***ν*** моль идеального одноатомного газа при известном давлении p_0. Обе части теплоизолированы друг от друга, а сам сосуд теплоизолирован от внешней среды. Какое количество теплоты нужно сообщить в правую часть, чтобы объем левой уменьшился **в два раза**?



Примечание: процесс в теплоизолированной системе описывается уравнением адиабаты pV^{γ} **=const**, где ***p*** – давление газа, ***V*** – объем, $\gamma=C_p/C_v$ – показатель адиабаты (C_p и C_v – теплоемкости газа соответственно при постоянном давлении и объеме). Для одноатомного газа $\gamma=5/3$.

Решение:

Передаваемое в правую часть тепло пойдет на нагрев газа в нем и на передвижение невесомого поршня (расширение газа):

$$Q = A + dU_1$$

Где A - работа, совершаемая газом в правой части над поршнем, dU_1 - изменение внутренней энергии газа в правой части.

Поскольку поршень невесомый, вся совершенная над ним работа пойдем на нагрев газа в левой части:

$$A = dU_2$$

Тогда все передаваемое в сосуд тепло пойдет на нагрев газа в обеих частях:

$$Q = dU_1 + dU_2 = \frac{3}{2}\eta R dT_1 + \frac{3}{2}\eta R dT_2 = \frac{3}{2}\eta R(dT_1 + dT_2)$$

где η - известное количество вещества в каждой части; dT_1, dT_2 - изменение температуры газа в правой и левой части, соответственно.

Давление газа в обеих частях сосуда всегда одинаковое. Обозначим через p_0 начальное давление газа в сосуде, p – конечное. Для каждой части сосуда записываем уравнение Менделеева-Клапейрона для начального и конечного состояния. Поскольку начальные объемы и количества вещества равны, то начальные температуры газа в обеих частях сосуда тоже одинаковые, и уравнение состояния идентично:

$$\frac{p_0V}{2} = \nu RT_0$$

(T0 - начальная температура)

конечное состояние:

$$pV_1 = \nu RT_1$$

$$pV_2 = \nu RT_2$$

Математические преобразования:

Почленно вычитаем из каждого уравнения системы уравнение начального состояния:

$$pV_1 - \frac{p_0V}{2} = \nu RT_1 - \nu RT_0 = \nu RdT_1$$

$$pV_2 - \frac{p_0V}{2} = \nu RdT_2$$

Суммируем оба уравнения:

$$p(V_1 + V_2) - p_0V = \nu R(dT_1 + dT_2)$$

Поскольку общий объем сосуда не меняется $V = V_1 + V_2$ получаем:

$$(p - p_0)V = \nu R(dT_1 + dT_2)$$

Используя ранее полученное для Q имеем:

$$Q = \frac{3}{2}(p - p_0)V$$

далее, поскольку левая часть теплоизолирована, то процесс сжатия газа в ней адиабатический. Записываем уравнение адиабаты:

$$pV^\gamma = const$$

($\gamma = 5/3$ – показатель адиабаты для одноатомного газа)

$$p_0\left(\frac{V}{2}\right)^\gamma = p\left(\frac{V}{4}\right)^\gamma$$

$$p = p_0 2^\gamma$$

Подставляя в выражение для Q, получаем ответ:

$$Q = \frac{3}{2}p_0(2^\gamma - 1)V$$

Ответ: $Q = \frac{3}{2}p_0(2^\gamma - 1)V$

-

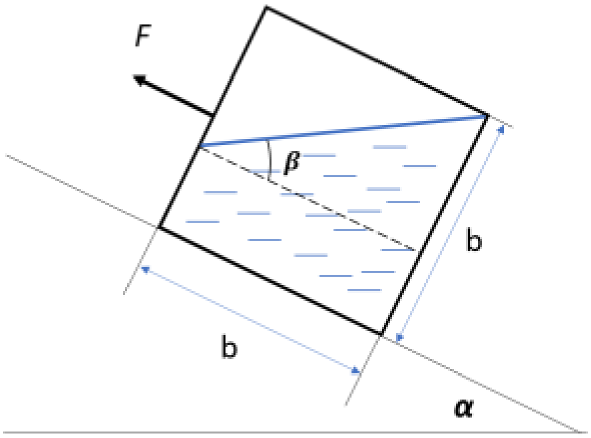
Задача 5

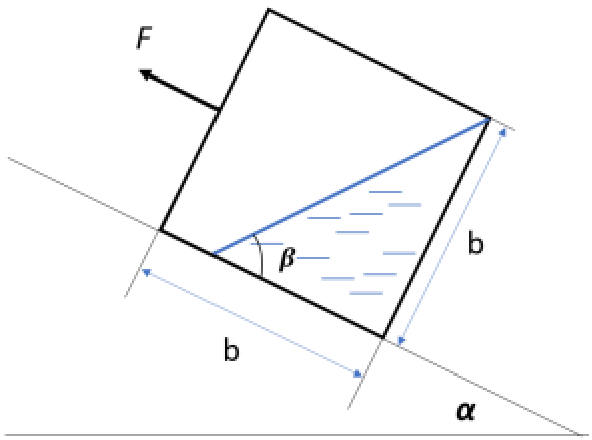
Кубический сосуд с длиной ребра ***b*** наполнен водой до уровня ***h<b/2***. Сосуд ставят на наклонную плоскость, угол наклона ***α*** которой может меняться, и начинают тянуть вверх по плоскости с силой, приложенной к середине боковой грани и постепенно увеличивающейся до значения ***F***. Определите минимальный угол наклона плоскости ***α***, при котором вода начнет переливаться через край сосуда. Массой пустого сосуда и трением пренебречь.

Решение

По условию кубический сосуд кубический сосуд с длиной ребра b наполнен водой до уровня h. Под действием силы F сосуд будет двигаться равноускоренно, и поверхность воды будет отклоняться от горизонтали и от наклонной плоскости, и вода переливается через его край, дальний по направлению движения. Обозначим угол отклонения поверхности воды от наклонной плоскости как β**.** Угол β зависит от объема воды в сосуде и ускорения, с которым он движется. В общем угол может меняться в диапазоне от 0 (внешняя сила отсутствует, сосуд заполнен полностью и скользит вниз под действием силы тяжести, тогда плоскость воды параллельна наклонной плоскости, и $\beta = \alpha$**)** до 90 (сосуд почти пуст, ускорение очень велико).

В зависимости от значения h возможны два сценария, изображенные на рисунках:





Поскольку сосуд имеет кубическую форму, то первый случай (левая картинка) реализуется, когда угол β меняется в диапазоне от 0 до 45 градусов, что соответствует случаю, когда сосуд изначально заполнен больше, чем наполовину ($h > b/2$). В этом случае объем воды в сосуде имеет трапецевидную форму. Второй случай (правая картинка) реализуется, когда угол β меняется в диапазоне от 45 до 90 градусов, что соответствует случаю, когда сосуд изначально заполнен меньше, чем наполовину ($h < b/2$). Он нас и интересует по условию задачи.

Объем воды в сосуде в таком случае будет равен:

$$V = \frac{b^2 x}{2} = \frac{b^3}{2tg\beta}$$

Где $x = b/tg\beta$ – катет, параллельный наклонной плоскости. Поскольку вода еще не вылилась из сосуда, ее объем равен исходному:

$$V = hb^2$$

Приравниваем:

$$\frac{b}{2tg\beta} = h, tg\beta = \frac{b}{2h}$$

С другой стороны, угол β определяется ускорением, с которым движется сосуд.

Под действием силы F сосуд будет двигаться равноускоренно:

$$ma = -mgsin\alpha + F$$

$$a = -gsin\alpha + F/m$$

Где $m = \rho hb^2$ – масса воды в сосуде (ρ – плотность воды). Рассмотрим малый элемент воды массой Δm у поверхности. В неинерциальной системе отсчета, связанной с сосудом, элемент покоится, на него будут действовать сила тяжести, сила реакции опоры и сила инерции:

$$0 = -\Delta ma - \Delta mgsin\alpha + Nsin\beta$$

$$Ncos\beta = \Delta mgcos\alpha$$

Т.о.

$$a = -gsin\alpha + gcos\alpha tg\beta$$

Подставим ранее полученное выражение для ускорения:

$$\frac{F}{m} - gsin\alpha = -gsin\alpha + gcos\alpha tg\beta$$

$$F = mgcos\alpha tg\beta$$

$$tg\beta = \frac{F}{mgcos\alpha}, cos\ \alpha = \frac{F}{mg\ tg\beta}$$

$$cos\ \alpha = \frac{2hF}{mgb}$$

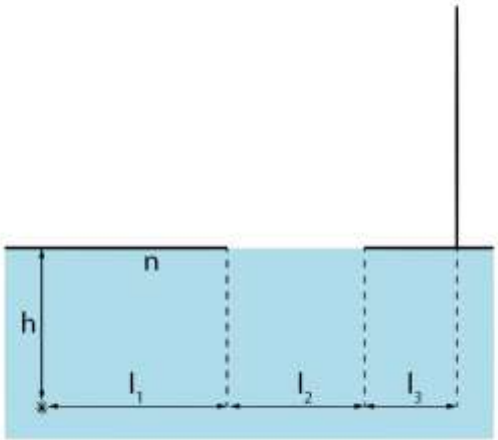
Ответ:

$$\alpha = arccos\left(\frac{2hF}{mgb}\right)$$

10 класс Вариант 4

Задача 1

Точечный источник света установлен в жидкости с показателем преломления ***n*** на глубине ***h*** от границы раздела жидкости с воздухом. На поверхности жидкости расположен непрозрачный экран, в котором на расстоянии l_1 по горизонтали правее источника света имеется отверстие шириной l_2, через которое свет может выходить из воды. На расстоянии l_3 от правого края отверстия расположен вертикальный экран. Определите вертикальную протяженность ***S*** освещенной области экрана.



Решение:

Пусть углу падения на левый и правый край отверстия- α_1 и α_2.

Случай 1- указанные углы меньше критического значения для полного внутреннего отражения($sin(\alpha_2) < \frac{1}{n}$ или$\frac{l_1+l_2}{\sqrt{(l_1+l_2)^2+h^2}} < \frac{1}{n}$).

Найдем точку пересечения экрана и луча, преломленного на левой границе отверстия, записав закон Снеллиуса и связь углов с параметрами задачи. Здесь β- угол преломления.

$$n * sin(\alpha_1) = sin(\beta_1)$$

$$sin(\alpha_1) = l_1/sqrt(l_1^2 + h^2)$$

$$sin(\beta_1) = (l_2 + l_3)/\ sqrt((l_2 + l_3)^2 + y_1^2)$$

Из этой системы уравнений находим y_1:

$$y_1 = \frac{l_2 + l_3}{l_1 n} sqrt(h^2 + l_1^2(1 - n^2))$$

Аналогично найдем точку пересечения для второго крайнего луча:

$$n * sin(\alpha_2) = sin(\beta_2)$$

$$sin(\alpha_2) = (l_1 + l_2)/sqrt((l_1 + l_2)^2 + h^2)$$

$$sin(\beta_2) = l_3/\ sqrt(l_3^2 + y_2^2)$$

Отсюда находим y_2:

$$y_2 = \frac{l_3}{n(l_1 + l_2)} sqrt(h_2 + \ (l_1 + l_2)^2(1 - n^2))$$

Размер пятна:

$$S = y_1 - y_2 = \frac{l_2 + l_3}{l_1 n} sqrt\left(h^2 + l_1^2(1 - n^2)\right) - \frac{l_3}{n(l_1 + l_2)} sqrt\left(h \quad + \ (l_1 + l_2)^2(1 - n^2)\right)$$

Случай 2- угол α_2>=arcsin(1/n), а угол α_1<arcsin(1/n) или $\frac{l_1 + l_2}{\sqrt{(l_1 + l_2)^2 + h^2}} \geq \frac{1}{n} > \frac{l_1}{\sqrt{{l_1}^2 + h^2}}$

В этом случае β_2=90°, y_2=0.

$$S = y_1 = \frac{l_2 + l_3}{l_1 n} sqrt(h^2 + l_1^2(1 - n^2))$$

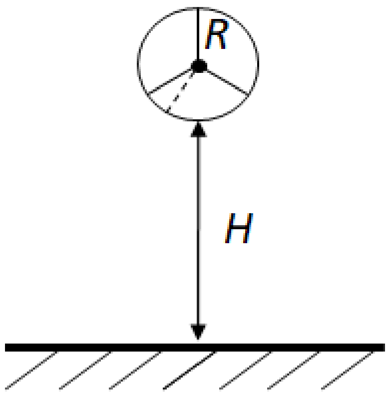
Случай 3- угол α_1>=arcsin(1/n)или $\frac{l_1}{\sqrt{{l_1}^2 + h^2}} \geq \frac{1}{n}$

В этом случае β_1=90°, y_1= y_2=0

S=0.

Задача 2

Внутри шара массой ***M*** и радиусом ***R*** на невесомых нерастяжимых нитях закреплен пластилиновый груз массой ***m*** (***M* = 2*m***). Шар сбрасывают с нулевой начальной скоростью с высоты ***H* = 6*R*** над полом. При столкновении с полом нити, укрепляющие груз внутри шара, обрываются, а сам шар упруго отскакивает. Определите, на какую высоту поднимется система после отскакивания. Размерами пластилинового груза можно пренебречь. При столкновении с внутренней поверхностью шара пластилиновый груз прилипает к ней.



Решение

Сначала система движется вниз как единое целое. Запишем уравнение движения для нижней точки шара $0 = H - \frac{gt_1^2}{2}$. Откуда время падения $t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Определим скорость v_1 при столкновении с полом $v_1 = gt_1 = \sqrt{2gH}$.

По условию задачи в момент удара нити обрываются, шар упруго отскакивает от пола и далее движется вверх с той же по модулю скоростью, а пластилиновый груз продолжает движение вниз с той же начальной скоростью v_1.

Рассмотрим момент прилипания шарика к внутренней поверхности шара. Для этого запишем выражения для высоты, на которой произошло столкновение для нижней точки шара

$$h_1 = v_1 t_2 - \frac{gt_2^2}{2}, \qquad (1)$$

Для шарика

$$h_1 = R - v_1 t_2 - \frac{gt_2^2}{2}, \qquad (2)$$

Решая совместно (1) и (2) можно найти время до момента слипания $t_2 = \frac{R}{2v_1}$.

В момент столкновения друг с другом шар имеет скорость

$$u_2 = u_1 - gt_2 = \sqrt{2gH} - \frac{R}{2}\sqrt{\frac{g}{2H}}, \tag{3}$$

а грузик имеет скорость

$$v_2 = u_1 + gt_2 = \sqrt{2gH} + \frac{R}{2}\sqrt{\frac{g}{2H}}. \tag{4}$$

Высота, на которой произойдет столкновение

$$h_2 = v_1 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = \frac{R}{2} - \frac{R^2}{16H}. \tag{5}$$

После слипания шар и груз продолжают движение как единое целое. Найдем скорость u_3, с которой они движутся. Для этого запишем закон сохранения импульса

$$-mv_2 + Mu_2 = (m + M) \cdot u_3. \tag{6}$$

Откуда

$$u_3 = \frac{Mu_2 - mv_2}{m + M}. \tag{7}$$

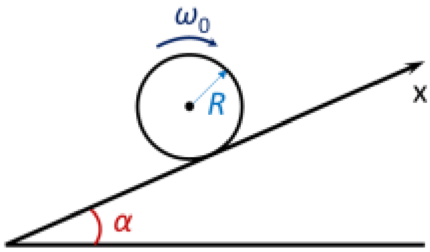
Используя условия задачи ($M = 2m$ и $H = 6R$) и выражения для скоростей шара и шарика до столкновения (3) и (4), можно показать, что $u_3 > 0$, то есть после столкновения система будет двигаться вверх. Время полета t_3 до точки максимального подъема можно найти из уравнения $0 = u_3 - gt_3$, откуда $t_3 = \frac{u_3}{g}$.

Тогда искомая высота $h_3 = h_2 + \frac{gt_3^2}{2} = R$.

<u>Ответ</u>: $h_3 = R$.

Задача 3

Тонкий обруч радиусом ***R*** раскрутили до угловой скорости $\boldsymbol{\omega_0}$, а затем поставили на бесконечную наклонную плоскость с углом наклона **α**, как показано на рисунке. Коэффициент трения между наклонной плоскостью и обручем равен ***μ***, причем ***μ>tgα***. Постройте график зависимости координаты центра обруча относительно оси *x* от времени.



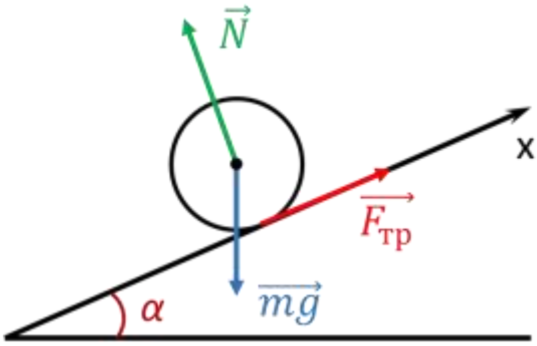
Примечание: Угловое ускорение **β** связано с моментом приложенных сил соотношением: ***Iβ = M***, где ***I*** – момент инерции тела относительно оси вращения, ***M*** – момент внешних сил. Для обруча, вращающегося вокруг своей оси $\boldsymbol{I=mR^2}$.

Решение

Скорость нижней точки обруча в начальный момент времени равна

$$v_0^{\text{нижн}} = \omega_0 R \qquad (1)$$

И направлена вдоль наклонной плоскости вниз. Сперва обруч будет двигаться с проскальзыванием, т.к. скорость точки обруча “А” относительно земли отлична от нуля. При этом на обруч будет действовать сила трения скольжения по модулю равная μN. Сила трения скольжения направлена противоположно направлению скорости контактирующей с поверхностью точки тела, то есть вдоль наклонной плоскости вверх. Нарисуем силы, действующие на обруч.



Проскальзывание прекратится, когда суммарная скорость нижней точки обруча относительно земли будет равна нулю. Эта скорость складывается из скорости поступательного движения обруча и скорости из-за вращательного движения. Скорость поступательного движения направлена вправо, а вращение происходит по часовой стрелке, следовательно для прекращения проскальывания модули скорости и ωR должны стать равными, т.е. $v(t) = \omega(t)R$. До этого времени обруч будет подниматься по наклонной плоскости с проскальзыванием.

Поступательное движение обруча на этом этапе движения с проскальзыванием можно рассматривать как равноускоренное, то есть координата его центра будет меняться по закону

$$x(t) = x_0 + \frac{at^2}{2}. \tag{2}$$

Найдем ускорение обруча из второго закона Ньютона:

$$F_{\text{тр}} - mg \cdot sin\alpha = ma \;\Rightarrow\; \mu mg \cdot cos\alpha - mg \cdot sin\alpha = ma \;\Rightarrow a = \; g(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha). \tag{3}$$

Координата центра обруча с учетом (3):

$$x(t) = x_0 + \frac{gt^2}{2}(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha). \tag{4}$$

В момент времени $\tilde{t}$, при $v(\tilde{t}) = \omega(\tilde{t})R$ проскальзывание прекратится. Найдем этот момент времени. Скорость будет увеличиваться и с учетом (3)

$$v(\tilde{t}) = a\tilde{t} = g\tilde{t}(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha), \tag{5}$$

Угловая скорость будет меняться

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 + \beta\tilde{t}, \tag{6}$$

где β – угловое ускорение.

Запишем основное уравнение динамики твердого тела

$$I\beta = M, \tag{7}$$

I – момент инерции, M – момент силы (силы трения).

$$I\beta = -\mu mg \cdot cos\alpha \cdot R. \tag{8}$$

Обруч представляет собой тонкостенный цилиндр, тогда его момент инерции вдоль оси, проходящей через его ось равен $I = mR^2$.

Тогда

$$mR^2\beta = -\mu mg \cdot cos\alpha \cdot R. \tag{9}$$

Отсюда угловое ускорение

$$\beta = -\frac{\mu g \cdot cos\alpha}{R}. \tag{10}$$

Тогда (6) можно переписать как

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 - \frac{\mu g \cdot cos\alpha}{R}\tilde{t}, \tag{11}$$

Приравниваем (5) и (11) и получаем

$$g\tilde{t}(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) = (\omega_0 - \frac{\mu g \cdot cos\alpha}{R}\tilde{t})R. \tag{12}$$

Тогда момент времени, в который проскальзывание прекратится

$$\tilde{t} = \frac{\omega_0 R}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}. \tag{13}$$

Координата центра обруча в момент времени $\tilde{t}$

$$x(\tilde{t}) = x_0 + \frac{a\tilde{t}^2}{2} = x_0 + \frac{\omega_0^2 \cdot R^2}{2g} \cdot \frac{\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)^2}. \tag{14}$$

Скорость центра обруча в момент времени $\tilde{t}$ (5) можно переписать

$$v(\tilde{t}) = (\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \cdot \frac{\omega_0 R}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}. \tag{15}$$

Заметим, что скорость положительна, т.е. обруч продолжит кататься вверх по наклонной плоскости.

При $t > \tilde{t}$ проскальзывание прекратится и обруч начнет по инерции катиться по наклонной плоскости при этом на него будет действовать сила трения покоя ($F_{\text{тр,п}} \leq F_{\text{тр.ск}}$). Найдем модуль этой силы. Для этого запишем второй закон Ньютона

$$F_{\text{тр,п}} - mg \cdot sin\alpha = ma \ \Rightarrow a = -g \cdot sin\alpha + \frac{F_{\text{тр,п}}}{m}. \tag{16}$$

Основное уравнение динамики твердого тела

$$I\beta = -F_{\text{тр,п}} R. \tag{17}$$

Отсюда угловое ускорение

$$\beta = \frac{-F_{\text{тр,п}} R}{I} = \frac{-F_{\text{тр,п}} R}{mR^2} = -\frac{F_{\text{тр,п}}}{mR}. \tag{18}$$

При движении без проскальзывания т.к. нижняя точка обруча покоится, ускорение нижней точки обруча также (как и скорость этой точки) должно быть равно нулю, следовательно, модули ускорения и углового ускорения обруча должны быть равны: $a = \beta R$. Тогда

$$-\frac{F_{\text{тр,п}}}{m} = -g \cdot sin\alpha + \frac{F_{\text{тр,п}}}{m}. \tag{19}$$

Отсюда модуль силы трения покоя

$$F_{\text{тр,п}} = \frac{mg \cdot sin\alpha}{2}. \tag{20}$$

И окончательно ускорение можно переписать как

$$a = -\frac{F_{\text{тр,п}}}{m} = -\frac{g \cdot sin\alpha}{2}. \tag{21}$$

Тогда скорость движения обруча при $t > \tilde{t}$

$$v(t) = \tilde{v} + a(t - \tilde{t}) = g(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \cdot \frac{\omega_0 R}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)} - \frac{g \cdot sin\alpha}{2}\left(t - \frac{\omega_0 R}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right). \tag{22}$$

И координата центра обруча

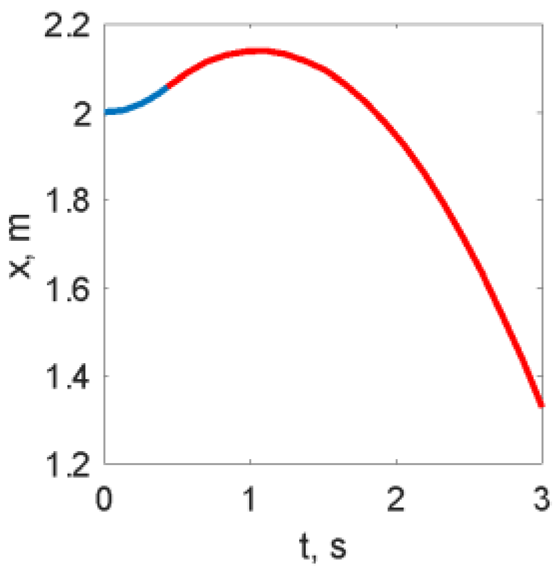
$$x(t) = \tilde{x} + \tilde{v}(t - \tilde{t}) + \frac{a(t - \tilde{t})^2}{2} = x_0 + \frac{\omega_0^2 \cdot R^2}{2g} \cdot \frac{\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)^2} + \tag{23}$$

$$+(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \cdot \frac{\omega_0 R}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)} \cdot \left(t - \frac{\omega_0 R}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right) - \frac{g \cdot sin\alpha}{4}\left(t - \frac{\omega_0 R}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right)^2.$$

Заметим, что т.к. ускорение обруча отрицательно(направлено вниз по наклонной плоскости), то в некоторый момент времени обруч развернутся и станет катиться вниз по наклонной плоскости.
Тогда координата центра обруча меняется со временем следующим образом

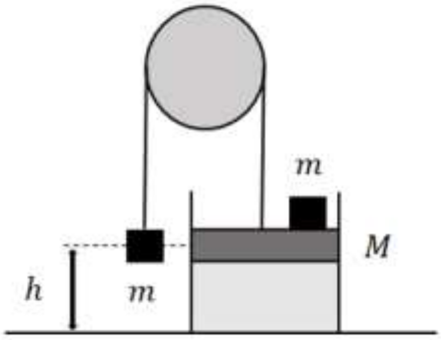
$$x(t) = \{x_0 + \frac{gt^2}{2}(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \text{ при } t \leq \frac{\omega_0 R}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\ x_0 + \frac{\omega_0^2 \cdot R^2}{2} \frac{\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)^2} + (\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)\frac{\omega_0 R}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\left(t - \frac{\omega_0 R}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right) - \frac{g \cdot sin\alpha}{4}\left(t - \omega 0Rg(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)2 \text{ при } t > \omega 0Rg(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)\ \}. \quad (24)$$

Тогда график зависимости x(t)



Задача 4

Сосуд с идеальным газом закрыт тонким поршнем массой ***M***. Сосуд теплоизолирован от внешней среды. Поршень смазан и способен двигаться вдоль сосуда с вязким трением, величина которого пропорциональна скорости движения. Вся энергия от трения переходит на нагрев газа в сосуде. К поршню прикреплена веревка, перекинутая через блок. К другому концу веревки прикреплен груз массой ***m=M/3***. Груз и поршень изначально находились на одном уровне над землей $\boldsymbol{h_0}$. На поршень ставят такой же груз, дожидаются установления равновесия, и затем убирают. Определите, на сколько в результате сместился груз на веревке относительно земли. Размерами грузов и толщиной поршня пренебрегите. Вся конструкция находится в вакууме. Трением в оси блока пренебречь. В процессе перемещения левый груз не касается земли.



Решение:

Изначально поршень и груз находятся в равновесии на высоте h над землей. Т. к. поршень в равновесии, а трение вязкое, то давления на поршень сверху и снизу равны:

$$\frac{Mg}{S} - \frac{mg}{S} - p_0 = 0,$$

$$p_0 = (M-m)\frac{g}{S} = \frac{2mg}{S}$$

($M = 3m$, p_0 - начальное давление газа в сосуде)

Из уравнения Менделеева-Клапейрона для начальной температуры газа в сосуде имеем:

$$p_0 h_0 S = \eta R T_0,$$

$$T_0 = \frac{p_0 h_0 S}{\nu R} = \frac{2mgh_0}{\nu R}$$

Далее, на поршень ставят груз массой m. В результате поршень с грузом опускаются, и начинаются затухающие колебания. Новое положение равновесия смещено на dh_1 вниз. Находим новое давление и температуру:

$$\frac{(M+m-m)g}{S} - p_1 = 0,$$

$$p_1 = \frac{Mg}{S} = \frac{3mg}{S},$$

$$T_1 = \frac{3mg(h_0 - dh_1)}{\nu R}$$

Поскольку вся энергия от трения идет в газ, то в целом энергия не покидает систему блоки+газ, и можно записать закон сохранения энергии (потенциальная энергия двух грузов и поршня+внутренняя энергия газа):

$$(m+m+3m)gh_0 + 3/2\eta RT_0 = mg(h_0 + dh_1) + (m+3m)g(h_0 - h_1) + \frac{3}{2}\nu RT_1$$

$$3mgdh_1 = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_0) = \frac{3}{2}mg(3(h_0 - dh_1) - 2h_0)$$

$$3dh_1 = 3/2h_0 - 9/2dh_1$$

$$dh_1 = h_0/5$$

Тогда

$$T_1 = \frac{12mgh_0}{5\nu R}$$

Затем груз с поршня убирают, и он поднимается. Возникающие колебания так же затухают, и новое положение равновесия расположено на dh_2 выше предыдущего уровня.

Поскольку система теперь состоит из тех же блоков, что и вначале, то давление газа в сосуде то же самое:

$$p_0 = \frac{2mg}{S}$$

Температура при этом другая:

$$T_2 = p_0\frac{(h_0 - dh_1 + dh_2)S}{\nu R} = \frac{2mg\left(\frac{4}{5}h_0 + dh_2\right)}{\nu R}$$

Записываем закон сохранения энергии (потенциальная энергия груза и поршня+внутренняя энергия газа):

$$mg(h_0 + dh_1) + 3mg(h_0 - dh_1) + \frac{3}{2}\nu RT_1$$
$$= mg(h_0 + dh_1 - dh_2) + 3mg(h_0 - dh_1 + dh_2) + \frac{3}{2}\nu RT_2$$

$$\frac{3}{2}\eta R(T_1 - T_2) = 2mgdh_2$$

$$\frac{3}{2}2mg(-\frac{4}{5}h_0 - dh_2 + \frac{6}{5}h_0) = 3mg(-dh_2 + \frac{2}{5}h_0) = 2mgdh_2$$

$$-3dh_2 + \frac{6}{5}h_0 = 2dh_2$$

$$dh_2 = \frac{6}{25}h_0$$

тогда, если начальное положение груза на веревке – h_0, то конечное $h_0 + \frac{h_0}{5} - \frac{6}{25}h_0 = \frac{24}{25}h_0$

Ответ: опустится **на** $\frac{1}{25}h_0$

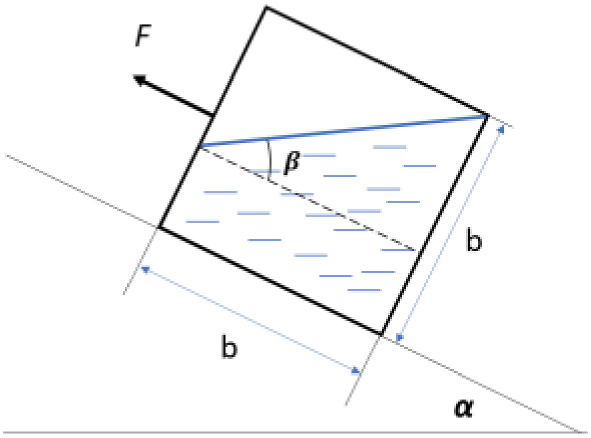
Задача 5

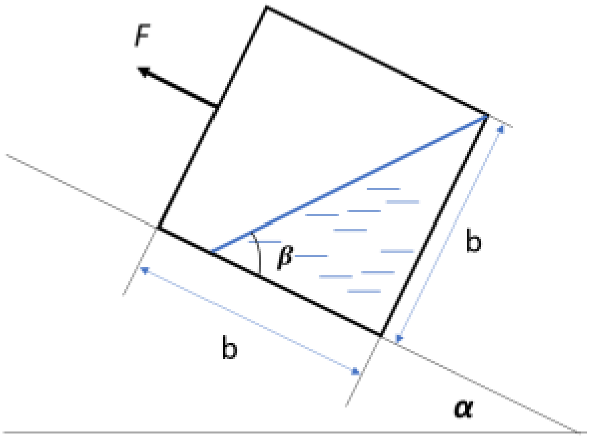
Кубический сосуд с длиной ребра ***b*** наполнен водой до уровня ***h>b/2***. Сосуд ставят на наклонную плоскость, угол наклона ***α*** которой может меняться, и начинают тянуть вверх по плоскости с силой, приложенной к середине боковой грани и постепенно увеличивающейся до значения ***F***. Определите минимальный угол наклона плоскости ***α***, при котором вода начнет переливаться через край сосуда. Массой пустого сосуда и трением пренебречь.

Решение

По условию кубический сосуд кубический сосуд с длиной ребра b наполнен водой до уровня h. Под действием силы F сосуд будет двигаться равноускоренно, и поверхность воды будет отклоняться от горизонтали и от наклонной плоскости, и вода переливается через его край, дальний по направлению движения. Обозначим угол отклонения поверхности воды от наклонной плоскости как β**.** Угол β зависит от объема воды в сосуде и ускорения, с которым он движется. В общем угол может меняться в диапазоне от 0 (внешняя сила отсутствует, сосуд заполнен полностью и скользит вниз под действием силы тяжести, тогда плоскость воды параллельна наклонной плоскости, и $\beta = \alpha$**)** до 90 (сосуд почти пуст, ускорение очень велико).

В зависимости от значения h возможны два сценария, изображенные на рисунках:





Поскольку сосуд имеет кубическую форму, то первый случай (левая картинка) реализуется, когда угол β меняется в диапазоне от 0 до 45 градусов, что соответствует случаю, когда сосуд изначально заполнен больше, чем наполовину ($h > b/2$). В этом случае объем воды в сосуде имеет трапецевидную форму. Второй случай (правая картинка) реализуется, когда угол β меняется в диапазоне от 45 до 90 градусов, что соответствует случаю, когда сосуд изначально заполнен меньше, чем наполовину ($h < b/2$). По условию нас интересует первый случай.

Пусть l – разница уровней воды между левой и правой стенками сосуда. Т.к. в условии сказано, что вода начнет переливаться через край, уровень воды справа будет равен b. В таком случае уровень воды слева будет равен $b - l$. Разница уровней воды l связана с углом β как:

$$l = b\ tg\beta$$

Объем воды в сосуде в таком случае будет равен:

$$V = \frac{(b+b-l)}{2} b \cdot b = b^3 - \frac{1}{2} l b^2 = b^3 \left(1 - \frac{1}{2} tg\beta\right)$$

Поскольку вода еще не вылилась из сосуда, ее объем равен исходному:

$$V = hb^2$$

Приравниваем:

$$b^3 \left(1 - \frac{1}{2} tg\beta\right) = hb^2$$

$$b \left(1 - \frac{1}{2} tg\beta\right) = h$$

$$tg\beta = 2\left(1 - \frac{h}{b}\right)$$

С другой стороны, угол β определяется ускорением, с которым движется сосуд.

Под действием силы F сосуд будет двигаться равноускоренно:

$$ma = -mgsin\alpha + F$$

$$a = -gsin\alpha + F/m$$

Где $m = \rho a b^2$ – масса воды в сосуде (ρ – плотность воды). Рассмотрим малый элемент воды массой Δm у поверхности. В неинерциальной системе отсчета, связанной с сосудом, элемент покоится, на него будут действовать сила тяжести, сила реакции опоры и сила инерции:

$$0 = -\Delta m a - \Delta m g sin\alpha + N sin\beta$$

$$N cos\beta = \Delta m g cos\alpha$$

Т.о.

$$a = -gsin\alpha + gcos\alpha tg\beta$$

Подставим ранее полученное выражение для ускорения:

$$\frac{F}{m} - gsin\alpha = -gsin\alpha + gcos\alpha tg\beta$$

$$F = mgcos\alpha tg\beta$$

$$tg\beta = \frac{F}{mgcos\alpha}, cos\, cos\, \alpha = \frac{F}{mg\, tg\beta}$$

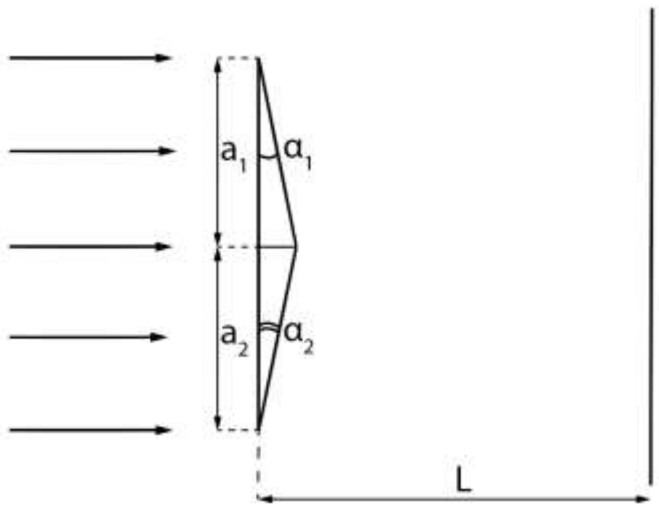
$$cos\alpha = \frac{F}{2mg\left(1 - \frac{h}{b}\right)}$$

Ответ: $\alpha = arccos\, \left(\frac{F}{2mg\left(1 - \frac{a}{b}\right)}\right)$

10 класс Вариант 5

Задача 1

Бипризма Френеля представляет собой две склеенные прямоугольные треугольные призмы с малыми преломляющим углом порядка десятых долей градуса. Бипризма освещается параллельным пучком света, падающим перпендикулярно основанию. Длина основания и преломляющий угол первой бипризмы $\mathbf{a_1}$ и $\boldsymbol{\alpha}_1$, второй – $\mathbf{a_2}$ и $\boldsymbol{\alpha_2}$.Показатели преломления призм равны. Определите показатель преломления призм, если на экране, расположенном на расстоянии ***L*** от бипризмы и перпендикулярном падающему пучку света, наблюдается темная полоса шириной ***S***.



Решение:

Размер темного пятна определяется ходом лучей, прошедших через края оснований каждой призмы. Углы падения на бипризму для этих лучей равны α1 и α2.

1) Найдем углы преломления, учитывая, что все углы крайне малы.

$sin(\alpha_1)n = sin(\beta_1 + \alpha_1)$, где β_1+α_1- угол преломления, β_1- угол хода преломленного луча относительно горизонтали.

$$\beta_1 = \alpha_1 * (n - 1)$$

$$\beta_2 = \alpha_2 * (n - 1)$$

2) Найдем длину отрезков A’C и B’D:

$$A'C = tg(\beta_1) * L = \beta_1 * L$$

$$B'D = \ \beta_2 * L$$

3) Учитывая, что размерпятнаравен S, находим показатель преломления:

$$S = OD + OC$$

$$OD = B'D - a_2 = \beta_2 * L - a_2$$

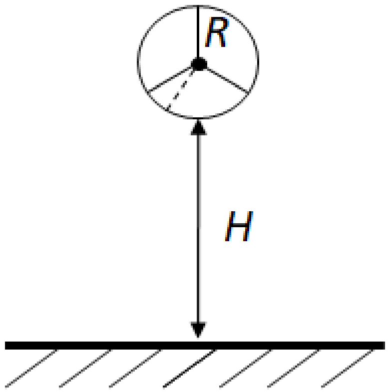
$$OC = A'C - a_1 = \beta_1 * L - a_1$$

$$S = \beta_2 * L - a_2 - a_1 + \beta_1 * L = L * (\beta_1 + \beta_2) - (a_1 + a_2)$$
$$= L * (n - 1)(\alpha_1 + \alpha_2) - (a_1 + a_2)$$

$$n = 1 + (S + a_1 + a_2)/(L * (\alpha_1 + \alpha_2))$$

Задача 2

Внутри шара массой ***M*** и радиусом ***R*** на невесомых нерастяжимых нитях закреплен пластилиновый груз массой ***m*** (***M* = *m***). Шар сбрасывают с нулевой начальной скоростью с высоты ***H* = 2*R*** над полом. При столкновении с полом нити, укрепляющие груз внутри шара, обрываются, а сам шар упруго отскакивает. Определите, на какую высоту поднимется система после отскакивания. Размерами пластилинового шарика можно пренебречь. При столкновении с внутренней поверхностью шара пластилиновый груз прилипает к ней.



Решение

Сначала система движется вниз как единое целое. Запишем уравнение движения для нижней точки шара $0 = H - \frac{gt_1^2}{2}$. Откуда время падения $t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Определим скорость v_1 при столкновении с полом $v_1 = gt_1 = \sqrt{2gH}$.

По условию задачи в момент удара нити обрываются, шар упруго отскакивает от пола и далее движется вверх с той же по модулю скоростью, а пластилиновый груз продолжает движение вниз с той же начальной скоростью v_1.

Рассмотрим момент прилипания груза к внутренней поверхности шара. Для этого запишем выражения для высоты, на которой произошло столкновение для нижней точки шара

$$h_1 = v_1 t_2 - \frac{gt_2^2}{2}, \qquad (1)$$

Для шарика

$$h_1 = R - v_1 t_2 - \frac{gt_2^2}{2}, \qquad (2)$$

Решая совместно (1) и (2) можно найти время до момента слипания $t_2 = \frac{R}{2v_1}$.

В момент столкновения друг с другом шар имеет скорость

$$u_2 = u_1 - gt_2 = \sqrt{2gH} - \frac{R}{2}\sqrt{\frac{g}{2H}}, \qquad (3)$$

а груз имеет скорость

$$v_2 = u_1 + gt_2 = \sqrt{2gH} + \frac{R}{2}\sqrt{\frac{g}{2H}}. \qquad (4)$$

Высота на которой произойдет столкновение

$$h_2 = v_1 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = \frac{R}{2} - \frac{R^2}{16H}. \qquad (5)$$

После слипания шар и груз продолжают движение как единое целое. Найдем скорость u_3, с которой они движутся. Для этого запишем закон сохранения импульса

$$-mv_2 + Mu_2 = (m + M) \cdot u_3. \qquad (6)$$

Откуда

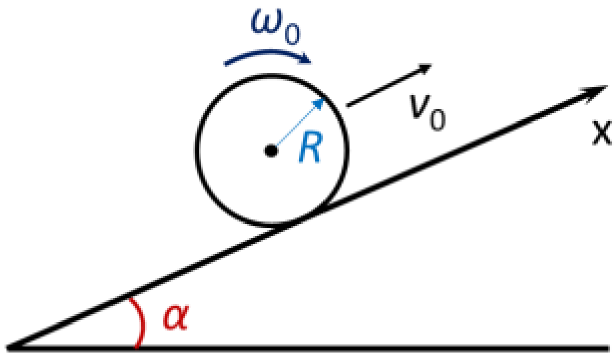
$$u_3 = \frac{Mu_2 - mv_2}{m+M}. \qquad (7)$$

Используя условия задачи ($M = m$ и $H = 2R$) и выражения для скоростей шара и груза до столкновения (3) и (4), можно показать, что $u_3 < 0$, то есть после столкновения система будет двигаться вниз. А это значит, что искомая высота, то есть максимальная высота подъема после соударения и есть высота, на которой это соударение произошло $h_2 = \frac{15}{32}R$.

Ответ: $h_2 = \frac{15}{32}R$.

Задача 3

Тонкий обруч радиусом $\boldsymbol{R}$ раскрутили до угловой скорости $\boldsymbol{\omega_0}$, а затем поставили на бесконечную наклонную плоскость с углом наклона $\boldsymbol{\alpha}$, сообщив ему начальную скорость $\boldsymbol{v_0}$ вдоль плоскости, как показано на рисунке. Известно, что в начальный момент времени модуль скорости поступательного движения обруча был меньше модуля скорости вращательного движения. Коэффициент трения между наклонной плоскостью и обручем равен $\boldsymbol{\mu}$, причем $\boldsymbol{\mu > tg\alpha}$. Постройте график зависимости координаты центра обруча относительно оси *x* от времени.



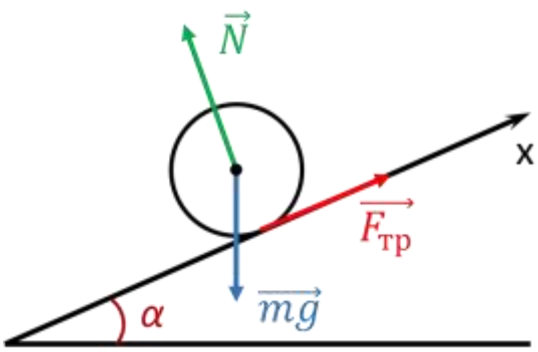
Примечание: Угловое ускорение **β** связано с моментом приложенных сил соотношением: $\boldsymbol{I\beta = M}$, где $\boldsymbol{I}$ – момент инерции тела относительно оси вращения, $\boldsymbol{M}$ – момент внешних сил. Для обруча, вращающегося вокруг своей оси $\boldsymbol{I=mR^2}$.

Решение

Скорость нижней точки обруча в начальный момент времени равна

$$v_0^{\text{нижн}} = v_0 + \omega_0 R \quad (1)$$

И направлена вдоль наклонной плоскости вниз. Сила трения препятствует движению, следовательно, она направлена противоположно, то вдоль наклонной плоскости вверх. Нарисуем силы, действующие на обруч.



Проскальзывание прекратится, когда суммарная скорость нижней точки обруча относительно земли будет равна нулю. Эта скорость складывается из скорости поступательного движения обруча и скорости из-за вращательного движения. Скорость поступательного движения направлена вправо, а вращение происходит по часовой стрелке, следовательно для прекращения проскальывания модули скорости и ωR должны стать равными, т.е. $v(t) = \omega(t)R$. До этого времени обруч будет подниматься по наклонной плоскости с проскальзыванием.

Поступательное движение обруча на этом этапе движения с проскальзыванием можно рассматривать как равноускоренное, то есть координата его центра будет меняться по закону

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \qquad (2)$$

Найдем ускорение обруча из второго закона Ньютона:

$$F_{\text{тр}} - mg \cdot sin\alpha = ma \;\Rightarrow\; \mu mg \cdot cos\alpha - mg \cdot sin\alpha = ma \;\Rightarrow a = \; g(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha). \qquad (3)$$

Координата центра обруча с учетом (3):

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha). \qquad (4)$$

В момент времени $\tilde{t}$, при $v(\tilde{t}) = \omega(\tilde{t})R$ проскальзывание прекратится. Найдем этот момент времени. Скорость будет увеличиваться и с учетом (3)

$$v(\tilde{t}) = v_0 + a\tilde{t} = v_0 + g\tilde{t}(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha), \qquad (5)$$

Угловая скорость будет меняться

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 + \beta\tilde{t}, \qquad (6)$$

где *β* – угловое ускорение.

Запишем основное уравнение динамики твердого тела

$$I\beta = M, \qquad (7)$$

I – момент инерции, *M* – момент силы (силы трения).

$$I\beta = -\mu mg \cdot cos\alpha \cdot R. \qquad (8)$$

Обруч представляет собой тонкостенный цилиндр, тогда его момент инерции вдоль оси, проходящей через его ось равен $I = mR^2$.

Тогда

$$mR^2\beta = -\mu mg \cdot cos\alpha \cdot R. \qquad (9)$$

Отсюда угловое ускорение

$$\beta = -\frac{\mu g \cdot cos\alpha}{R}. \qquad (10)$$

Тогда (6) можно переписать как

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 - \frac{\mu g \cdot cos\alpha}{R}\tilde{t}, \qquad (11)$$

Приравниваем (5) и (11) и получаем

$$v_0 + g\tilde{t}(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) = (\omega_0 - \frac{\mu g \cdot cos\alpha}{R}\tilde{t})R. \qquad (12)$$

Тогда момент времени, в который проскальзывание прекратится

$$\tilde{t} = \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}. \tag{13}$$

Координата центра обруча в момент времени $\tilde{t}$

$$x(\tilde{t}) = x_0 + v_0\tilde{t} + \frac{a\tilde{t}^2}{2} = x_0 + v_0 \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)} + \frac{(\omega_0 R - v_0)^2 \cdot}{2g} \cdot \frac{\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)^2}. \tag{14}$$

Скорость центра обруча в момент времени $\tilde{t}$ (5) можно переписать

$$v(\tilde{t}) = v_0 + (\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \cdot \frac{\omega_0 R - v_0}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}. \tag{15}$$

Заметим, что скорость положительна, т.е. обруч продолжит кататься вверх по наклонной плоскости.

При $t > \tilde{t}$ проскальзывание прекратится и обруч начнет по инерции катиться по наклонной плоскости при этом на него будет действовать сила трения покоя ($F_{\text{тр,п}} < F_{\text{тр}}$). Найдем модуль этой силы. Для этого запишем второй закон Ньютона

$$F_{\text{тр,п}} - mg \cdot sin\alpha = ma \Rightarrow a = -g \cdot sin\alpha + \frac{F_{\text{тр,п}}}{m}. \tag{16}$$

Основное уравнение динамики твердого тела

$$I\beta = -F_{\text{тр,п}}R. \tag{17}$$

Отсюда угловое ускорение

$$\beta = \frac{-F_{\text{тр,п}}R}{I} = \frac{-F_{\text{тр,п}}R}{mR^2} = -\frac{F_{\text{тр,п}}}{mR}. \tag{18}$$

При движении без проскальзывания т.к. нижняя точка обруча покоится, ускорение нижней точки обруча также (как и скорость этой точки) должно быть равно нулю, следовательно, модули ускорения и углового ускорения обруча должны быть равны: $a = \beta R$. Тогда

$$-\frac{F_{\text{тр,п}}}{m} = -g \cdot sin\alpha + \frac{F_{\text{тр,п}}}{m}. \tag{19}$$

Отсюда модуль силы трения качения

$$F_{\text{тр,п}} = \frac{mg \cdot sin\alpha}{2}. \tag{20}$$

И окончательно ускорение можно переписать как

$$a = -\frac{F_{\text{тр,п}}}{m} = -\frac{g \cdot sin\alpha}{2}. \tag{21}$$

Тогда скорость движения обруча при $t > \tilde{t}$

$$v(t) = \tilde{v} + a(t - \tilde{t}) = v_0 + g(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \cdot \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)} - \frac{g \cdot sin\alpha}{2}\left(t - \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right). \tag{22}$$

И координата центра обруча

$$x(t) = \tilde{x} + \tilde{v}(t - \tilde{t}) + \frac{a(t - \tilde{t})^2}{2} = \tag{23}$$

$$x_0 + v_0 \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)} + \frac{(\omega_0 R - v_0)^2 \cdot}{2g} \cdot \frac{\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)^2} + \left(v_0 + (\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \cdot \frac{\omega_0 R - v_0}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right) \cdot \left(t - \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right) - \frac{g \cdot sin\alpha}{4}\left(t - \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right)^2.$$

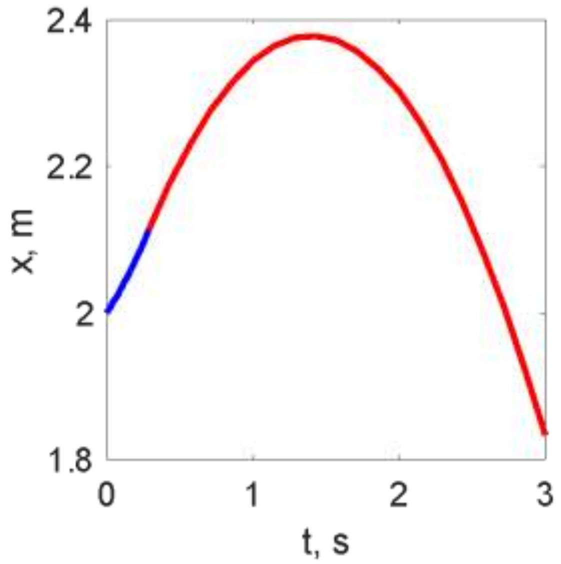
Заметим, что т.к. ускорение обруча отрицательно(направлено вниз по наклонной плоскости), то в некоторый момент времени обруч развернутся и станет катиться вниз по наклонной плоскости.

Тогда координата центра обруча меняется со временем следующим образом

$$x(t) = \{x_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \text{ при } t \leq \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}$$

$$x_0 + v_0 \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)} + \frac{(\omega_0 R - v_0)^2 \cdot}{2g} \cdot \frac{\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)^2} + \left(v_0 + (\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \cdot \frac{\omega_0 R - v_0}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right) \cdot \quad (24)$$

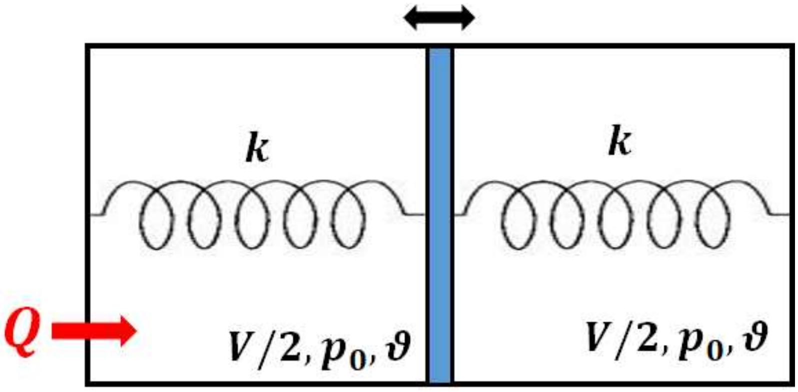
$$\cdot \left(t - \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right) - \frac{g \cdot sin\alpha}{4}\left(t - \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right)^2 \text{ при } t > \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}.$$



Тогда график зависимости x(t)

Задача 4

Сосуд объемом ***V*** и площадью поперечного сечения ***S***, запаянный с обоих концов, расположен горизонтально. Внутри сосуд герметично разделен на две одинаковые части невесомым поршнем, способным двигаться вдоль него без трения. Поршень прикреплен к боковым стенкам сосуда одинаковыми пружинками жесткостью ***k***, изначально не растянутыми. Внутри каждой части находится по **ν** моль идеального одноатомного газа при известном давлении p_0. Обе части теплоизолированы друг от друга, а сам сосуд теплоизолирован от внешней среды. Какое количество теплоты нужно сообщать в левую часть, чтобы объем правой уменьшился в два раза? Толщиной поршня пренебречь.



Примечание: процесс в теплоизолированной системе описывается уравнением адиабаты pV^γ **=const**, где ***p*** – давление газа, ***V*** – объем, $\gamma=C_p/C_v$ – показатель адиабаты (C_p и C_v – теплоемкости газа соответственно при постоянном давлении и объеме). Для одноатомного газа $\gamma=5/3$.

Решение:

Передаваемое в левую часть тепло пойдет на нагрев газа в нем, на передвижение невесомого поршня (расширение газа) и на растягивание пружины:

$$Q = A + dU_1 + k\frac{dx^2}{2}$$

Где A - работа, совершаемая газом в левой части над поршнем, dU_1 - изменение внутренней энергии газа в левой части.

Поскольку поршень невесомый, вся совершенная над ним работа пойдем на нагрев газа в правой части и на сжатие пружины в нем:

$$A = dU_2 + \frac{kdx^2}{2}$$

Тогда все передаваемое в сосуд тепло пойдет на нагрев газа в обеих частях и на деформацию двух пружинок:

$$Q = dU_1 + dU_2 + kdx^2 = \frac{3}{2}\nu RdT_1 + \frac{3}{2}\nu RdT_2 + kdx^2 = \frac{3}{2}\nu R(dT_1 + dT_2) + kdx^2$$

где ν - известное количество вещества в каждом сосуде; dT_1, dT_2 - изменение температуры газа в левой и правой части сосуда, соответственно. Поскольку по условию объем правой части уменьшился в два раза, то:

начальный объем: $\frac{V}{2} = \frac{Sh}{2}$

конечный объем: $\frac{V}{4} = \frac{Sh}{4}$

изменение длины пружины: $dx = \frac{h}{2} - \frac{h}{4} = \frac{h}{4}$

И тогда:

$$Q = \frac{3}{2}\nu R(dT_1 + dT_2) + \frac{kh^2}{16}$$

Поскольку изначально пружины не растянуты, начальное давление газа в обеих частях сосуда было одинаковое. Обозначим через p_0 начальное давление газа в сосуде. Поскольку начальные объемы и количества вещества равны, то начальные температуры газа в обеих частях сосуда тоже одинаковые, и уравнение состояния идентично:

$$\frac{p_0 V}{2} = \nu R T_0$$

(T_0- начальная температура)

При сообщении количества теплоты **Q** поршень перемещается вправо, левая пружина растягиваемся, правая сжимается. Записываем давление на поршень с каждой стороны:

$$p_1 - \frac{kdx}{S} = p_2 + \frac{kdx}{S}$$

$$p_1 = p_2 + \frac{2kdx}{S} = p_2 + \frac{kh}{2S}$$

(p_1 - давление газа в левой части, p_2 - давление газа в правой).

Для каждой части сосуда записываем уравнение Менделеева-Клапейрона для конечного состояния:

$$p_1 V_1 = (p_2 + \frac{kh}{2S})S\frac{3h}{4} = \nu R T_1$$

$$p_2 V_2 = p_2 \frac{h}{4} S = \nu R T_2$$

Математические преобразования:

Почленно вычитаем из каждого уравнения системы уравнение начального состояния:

$$(p_2 S + \frac{kh}{2})\frac{3h}{4} - \frac{p_0 Sh}{2} = (\frac{3}{2}p_2 - p_0)S\frac{h}{2} + \frac{3kh^2}{8} = \nu R dT_1$$

$$p_2 S\frac{h}{4} - p_0 S\frac{h}{2} = (\frac{p_2}{2} - p_0)S\frac{h}{2} = \nu R dT_2$$

Суммируем оба уравнения:

$$(p_2 - p_0)Sh + \frac{3kh^2}{8} = \nu R(dT_1 + dT_2)$$

Далее найдем p_2. Поскольку правая часть сосуда теплоизолирована от левой, процесс в нем – адиабатический. Уравнение адиабаты:

$$p_0 \left(\frac{V}{2}\right)^{\gamma} = p_2 \left(\frac{V}{4}\right)^{\gamma}$$

$$p_2 = p_0 2^{\gamma}$$

Тогда:

$$(2^{\gamma} - 1)p_0 V + \frac{3k}{8}\left(\frac{V}{S}\right)^2 = \nu R(dT_1 + dT_2)$$

Используя ранее полученное для Q имеем:

$$Q = \frac{3}{2}\nu R(dT_1 + dT_2) + \frac{k}{16}\left(\frac{V}{S}\right)^2 = \frac{3}{2}(2^{\gamma} - 1)p_0 V + \frac{9k}{16}\left(\frac{V}{S}\right)^2 + \frac{k}{16}\left(\frac{V}{S}\right)^2$$
$$= \frac{3}{2}(2^{\gamma} - 1)p_0 V + \frac{5}{8}k\left(\frac{V}{S}\right)^2$$

Ответ: $\frac{3}{2}(2^{\gamma} - 1)p_0 V + \frac{5}{8}k\left(\frac{V}{S}\right)^2$

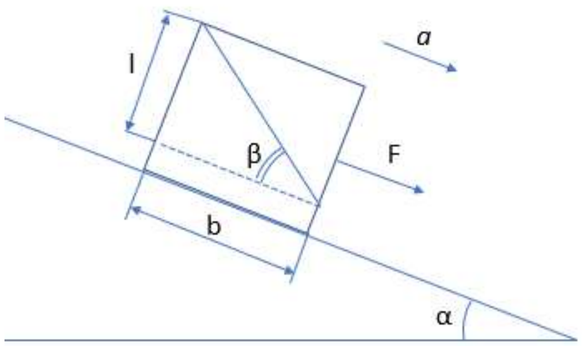
Задача 5

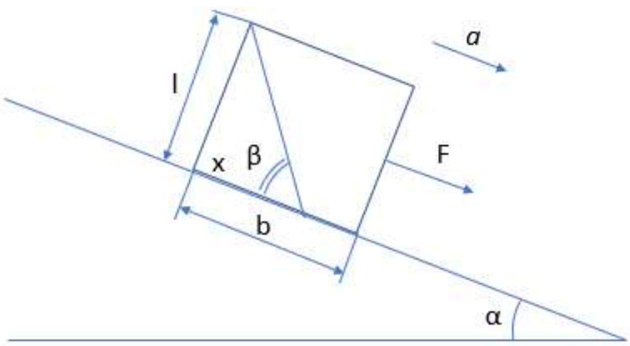
Кубический сосуд с длиной ребра ***b*** наполнен водой до уровня ***h>b/2***. Сосуд ставят на наклонную плоскость, угол наклона ***α*** которой может меняться, и начинают тянуть вниз по плоскости с силой, приложенной к середине боковой грани и постепенно увеличивающейся до значения ***F***. Определите минимальный угол наклона плоскости ***α***, при котором вода начнет переливаться через край сосуда. Массой пустого сосуда и трением пренебречь.

Решение

По условию кубический сосуд кубический сосуд с длиной ребра $\boldsymbol{b}$ наполнен водой до уровня $\boldsymbol{h}$. Под действием силы F сосуд будет двигаться равноускоренно, и поверхность воды будет отклоняться от горизонтали и от наклонной плоскости, и вода переливается через его край, дальний по направлению движения. Обозначим угол отклонения поверхности воды от наклонной плоскости как $\boldsymbol{\beta}$**.** Угол $\boldsymbol{\beta}$ зависит от объема воды в сосуде и ускорения, с которым он движется. В общем случае угол может меняться в диапазоне от 0 (внешняя сила отсутствует, сосуд заполнен полностью и скользит вниз под действием силы тяжести, тогда плоскость воды параллельна наклонной плоскости, и $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$) до 90 (сосуд почти пуст, ускорение очень велико).

В зависимости от значения $\boldsymbol{h}$ возможны два сценария, изображенные на рисунках:





Поскольку сосуд имеет кубическую форму, то первый случай (левая картинка) реализуется, когда угол $\boldsymbol{\beta}$ меняется в диапазоне от 0 до 45 градусов, что соответствует случаю, когда сосуд изначально заполнен больше, чем наполовину ($\boldsymbol{h} > \boldsymbol{b}/\boldsymbol{2}$). В этом случае объем воды в сосуде имеет трапецевидную форму. Второй случай (правая картинка) реализуется, когда угол $\boldsymbol{\beta}$ меняется в диапазоне от 45 до 90 градусов, что соответствует случаю, когда сосуд изначально заполнен меньше, чем наполовину ($\boldsymbol{h} < \boldsymbol{b}/\boldsymbol{2}$). По условию нас интересует первый случай.

Пусть $\boldsymbol{l}$ – разница уровней воды между левой и правой стенками сосуда. Т.к. в условии сказано, что вода начнет переливаться через край, уровень воды справа будет равен $\boldsymbol{b}$. В таком случае уровень воды слева будет равен $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{l}$. Разница уровней воды $\boldsymbol{l}$ связана с углом $\boldsymbol{\beta}$ как:

$$l = b\, tg\beta$$

Объем воды в сосуде в таком случае будет равен:

$$V = \frac{(b + b - l)}{2} b \cdot b = b^3 - \frac{1}{2} l b^2 = b^3 \left(1 - \frac{1}{2} tg\beta\right)$$

Поскольку вода еще не вылилась из сосуда, ее объем равен исходному:

$$V = hb^2$$

Приравниваем:

$$b^3 \left(1 - \frac{1}{2} tg\beta\right) = hb^2$$

$$b \left(1 - \frac{1}{2} tg\beta\right) = h$$

$$tg\beta = 2\left(1 - \frac{h}{b}\right)$$

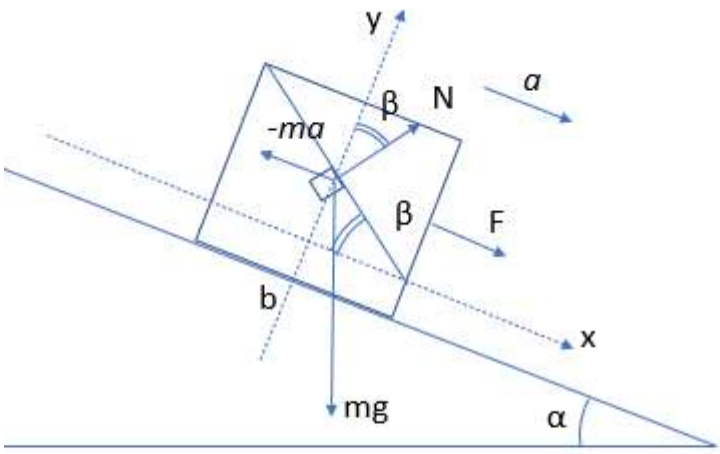
С другой стороны, угол $\boldsymbol{\beta}$ определяется ускорением, с которым движется сосуд.

Под действием силы F сосуд будет двигаться равноускоренно:

$$ma = mgsin\alpha + F$$

$$a = gsin\alpha + F/m$$

Где $m = \rho a b^2$ – масса воды в сосуде (ρ – плотность воды). Рассмотрим малый элемент воды массой Δm у поверхности. В неинерциальной системе отсчета, связанной с сосудом, элемент покоится, на него будут действовать сила тяжести, сила реакции опоры и сила инерции:



$$0 = -\Delta m a + \Delta m g sin\alpha + N sin\beta$$

$$N cos\beta = \Delta m g cos\alpha$$

Т.о.

$$a = gsin\alpha + gcos\alpha tg\beta$$

Подставим ранее полученное выражение для ускорения:

$$\frac{F}{m} + gsin\alpha = gsin\alpha + gcos\alpha tg\beta$$

$$F = mgcos\alpha tg\beta$$

$$tg\beta = \frac{F}{mgcos\alpha}, \cos\alpha = \frac{F}{mg\ tg\beta}$$

$$cos\alpha = \frac{F}{2mg\left(1 - \frac{h}{b}\right)}$$

Ответ: $\alpha = \arccos\left(\frac{F}{2mg\left(1 - \frac{a}{b}\right)}\right)$