10.1. Колебания, маятник:

Вариант 1:

- Космонавты высадились на поверхности планеты X для сбора геофизических сведений. Эксперимент с математическим маятником с длиной подвеса **50 см** дал значение частоты колебаний **0.5 Гц.** Чему равно ускорение свободного падения на поверхности исследуемой планеты? Ответ дайте в **м/с^2**, округлив до ближайшего целого.
  Решение:
  Период колебаний математического маятника:

  $$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

  где L- длина подвеса маятника, g- ускорение свободного падения на поверхности исследуемой планеты. Частота связана с периодом соотношением:

  $$\upsilon = 1/T$$

  Отсюда:

  $$g = 4\pi^2 L\upsilon^2 = 4.9348 \approx 5 \text{ м/с}^2$$

  Ответ: 5 м/с^2

Вариант 2:

- Простейшим инструментом геологической разведки может служить обыкновенный математический маятник, поскольку известно, что ускорение свободного падения зависит от плотности земной породы в окрестности точки проведения измерения. При разведке в горной местности геологи провели измерение периода колебания математического маятника длиной **50 см** и получили значение **1.41 с**. Определите, сколько **процентов** от полученного геологами значения составляет среднее ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли (**9.81 м/с^2**). Ответ округлите до ближайшего целого.
  Решение:
  Период колебаний математического маятника:

  $$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

  где L- длина подвеса маятника, g- ускорение свободного падения в окрестностях исследуемой области. Отсюда:

  $$\frac{g_0}{g} = \frac{T^2 g_0}{4\pi^2 L} = 0.988 \approx 0.99$$

  $$\frac{g_0}{g}100\% = 99\%$$

  Ответ: 99

Вариант 3:

- При продвижении к центру земли ускорение свободного падения приблизительно линейно убывает до нуля. Чему будет равно отношение частоты колебаний математического маятника при преодолении **1/3** расстояния до центра Земли к частоте его колебаний на поверхности Земли? Ответ выразите в **процентах**, округлив до ближайшего целого.

Решение:

Период колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Частота колебаний:

$$\upsilon = \frac{1}{T}.$$

Учитывая, что ускорение свободного падения на одной третьей части пути к центру Земли будет составлять (1-n)g (где n – данная в условии часть преодоленного до центра Земли расстояния), то можно записать отношение частоты колебаний маятника на соответствующей глубине к частоте колебаний на поверхности как:

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_0} = \sqrt{\frac{g_1}{g}} = \sqrt{(1-n)} = 0.8165 \approx 0.82 = 82\%$$

10.2 Движение по окружности

Вариант 1:

- Стэнфордский Тор – проект космической станции, которая могла бы стать одной из первых постоянных внеземных колоний человечества. Станция представляет собой форму тора, вращающегося вокруг своей оси и тем самым обеспечивающего искусственную гравитацию. Каким должен быть период вращения станции радиусом **1000 м**, чтобы обеспечить гравитационную силу, сходную с Землей? Ускорение свободного падения на Земле положите равным **10 м/с^2**. Ответ выразите в секундах и округлите до ближайшего целого.

  Решение:

  Приравняем центробежную силу силе тяжести (или центростремительное ускорение ускорению свободного падения):

  $$\omega^2 R = g, \;\; \boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{R}}}$$

  Выразим частоту вращения через угловую скорость:

  $$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 62{,}8\ c$$

  Ответ: <u>**63 с.**</u>

Вариант 2:

- Для воспроизведения в земных условиях перегрузок, испытываемых в полете космонавтами и пилотами военных истребителей, используются специальные центрифуги. На человека, помещенного в такую центрифугу, действует центробежная сила, возникающая в результате ее вращения. Каким должен быть период вращения тренировочной центрифуги ЦФ-18 с длиной плеча **18 метров**, чтобы на испытуемого действовала центробежная сила, в **4 раза** превосходящая силу тяжести на поверхности Земли? Ответ выразите в секундах и округлите до ближайшего целого.

  $$\omega^2 R = n * g, \;\; \omega = \sqrt{\frac{n * g}{R}}$$

  $$T = \frac{2\pi}{w} = \boldsymbol{2\pi}\sqrt{\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{n} * \boldsymbol{g}}} = \mathbf{4.219}\ \boldsymbol{c}$$

  Ответ: <u>**4 с**</u>

Вариант 3:

- «Пенни-фартинг» – один из ранних типов велосипеда, характерной особенностью которого было большое переднее и малое заднее колесо. Высота переднего колеса могла достигать **1.6 метров**, в то время как высота заднего обыкновенно составляла **40 см**. Определите, во сколько раз чаще переднего колеса будет вращаться заднее колесо такого велосипеда при его движении со скоростью **15 м/с**. Ответ круглите до целого.

  Решение:

  Если V – скорость велосипеда, а $\nu = \omega/(2\pi)$ – частота вращения, то

  $$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{V}{2\pi R}\,, \qquad \nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{V}{2\pi r}\,,$$

Где R=H/2 – радиус большого колеса, а r=h/2 – радиус маленького. Получаем:

$$\frac{\boldsymbol{v_2}}{\boldsymbol{v_1}} = \frac{R}{r} = \frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{h}}$$

Ответ: 4

10.3. Термодинамика, изопроцессы в газах.

Вариант 1:

- Длинный цилиндрический сосуд, закрытый с одной стороны, расположен горизонтально и разделен невесомым поршнем на две части. Положение поршня зафиксировано. Объем закрытой части сосуда составляет **1300 см^3**, в ней находится воздух под давлением **2.1·10^5 Па**. Давление воздуха снаружи – **10^5 Па**. Определите, насколько сместится поршень относительно начального положения, если его отпустить? Температура воздуха остается неизменной. Ответ приведите **в сантиметрах**, округлив до ближайшего целого. Площадь сечения сосуда – **100 см^2**. Поршень движется без трения.

  Решение:

  При смещении поршня будет происходить изотермическое расширение, описываемое законом Бойля-Мариотта:

$$pV = p_1 V_1.$$

  Поршень будет двигаться до тех пор, пока давление внутри закрытой части сосуда не станет атмосферным. Тогда установившийся объем будет равен:

$$V_1 = \frac{pV}{p_0},$$

  где p_0- атмосферное давление.

  Смещение поршня составит:

$$\Delta l = \left(\frac{p}{p_0} - 1\right)\frac{V}{S} = 14.3 \approx 14 \text{ см}$$

  Ответ: 14

Вариант 2:

- Длинный цилиндрический сосуд с воздухом, закрытый с одной стороны, расположен горизонтально и разделен невесомым поршнем на две части. Поршень может свободно двигаться вдоль сосуда. В результате ночного падения температуры на **26** градусов поршень сместился на **2 см**. Давление в ходе процесса оставалось неизменным. Определите установившуюся ночью температуру, если исходный объем закрытой поршнем части цилиндра равнялся **1500 см^3**. Площадь основания сосуда – **65 см^2**. Ответ приведите в **градусах Цельсия**.

  Решение:

  Изобарическое сжатие описывается законом Гей-Люссака:

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_1}{T_1}.$$

  При падении температуры объем также должен уменьшиться, что можно записать в виде:

$$T_1 = T_0 - \Delta T, V_1 = V_0 - S\Delta x.$$

  Тогда начальное уравнение будет переписано в виде:

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_0 - S\Delta x}{T_0 - \Delta T}.$$

  Отсюда:

$$T_0 = \frac{V_0 \Delta T}{S \Delta x} = 300 \text{ К}, \quad T_1 = T_0 - 26 = 274 \text{ К}$$

$$T_1 = 1 \text{ °C}.$$

Ответ: **1**

Вариант 3:

- Длинный цилиндрический сосуд с воздухом при температуре **5°C**, закрытый с одной стороны, расположен горизонтально и разделен невесомым поршнем на две части. Поршень может свободно двигаться вдоль сосуда. Воздух в сосуде начинают нагревать и наблюдать за перемещением поршня. Какую работу совершит газ при нагреве до **21°C**, если начальный объем с воздухом, ограниченный поршнем, составлял **900 см^3**? Давление в ходе процесса оставалось неизменным и равнялось **10^5 Па**. Ответ приведите в джоулях, округлив до ближайшего целого.

Решение:
Изобарическое сжатие описывается законом Гей-Люссака:

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_1}{T_1}.$$

Можно выразить установившийся объем и изменение объема газа:

$$V_1 = V_0 \frac{T_1}{T_0}, \qquad \Delta V = V_1 - V_0 = V_0 \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right).$$

Работа при изобарическом процессе определяется изменение объема газа:

$$A = p\Delta V = pV_0 \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) = pV_0 \left(\frac{t_1 + 273}{t_0 + 273} - 1 \right) = 5.18 \approx 5 \text{ Дж}$$

Ответ: **5 Дж**

11.1. Рельсотрон

Вариант 1:

- Рельсотрон – электромагнитный ускоритель, состоящий из источника питания, двух параллельно расположенных металлических рельсов и проводящего снаряда, который замыкает всю цепь и движется вдоль рельсов под действием силы Лоренца. Рассчитайте, до какой скорости рельсотрон может разогнать снаряд массы **1 кг**, если движущий импульс тока создается путем быстрой полной разрядки конденсатора емкостью **16.2 мкФ**, изначального заряженного до напряжения **30 кВ**, а коэффициент полезного действия равен **20%**? Ответ приведите в **м/с**, округлив до ближайшего целого**.**

  Решение:

$$\mu\frac{CU^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

$$v = U\sqrt{\frac{\mu C}{m}}$$

$$v = 30000\sqrt{\frac{0.2*16200\ 10^{-9}}{1}}$$=30*9 = 270 м/с

  Ответ: 54 м/с

Вариант 2:

- Рельсотрон – электромагнитный ускоритель, состоящий из источника питания, двух параллельно расположенных металлических рельсов и проводящего снаряда, который замыкает всю цепь и движется вдоль рельсов под действием силы Лоренца. Движущий импульс тока обычно создается при помощи быстрой полной разрядки конденсатора. Рассчитайте, до какого напряжения должен быть изначально заряжен конденсатор емкостью **16.2 мкФ** в электрической цепи рельсотрона, чтобы разогнать снаряд массой **1 кг** до скорости **270 м/с**, если коэффициент полезного действия равен **20%**? Ответ приведите в **киловольтах**, округлив до ближайшего целого**.**

  Решение:

$$U = \sqrt{\frac{mv^2}{\mu C}}$$

$$U = \sqrt{\frac{1*270^2}{0.2*16200*10^{-9}}}$$

  Ответ: 150 кВ

Вариант 3:

- Рельсотрон – электромагнитный ускоритель, состоящий из источника питания, двух параллельно расположенных металлических рельсов и проводящего снаряда, который замыкает всю цепь и движется вдоль рельсов под действием силы Лоренца. При тестовых испытаниях собранного любителями рельсотрона снаряд был запущен со скоростью **270 м/с**. Определите массу снаряда **m**, если движущий импульс тока создавался путем быстрой полной разрядки конденсатора емкостью **16.2 мкФ,** изначально заряженного до напряжения **30 кВ**, а коэффициент полезного действия равен **20%.** Ответ приведите в **граммах**, округлив до ближайшего целого.

$$m = \frac{\mu CU^2}{v^2}$$

  Ответ: 40 г

11.2. Звук, волны:

Вариант 1:

- В демонстрационную лабораторию университета города N установили «трубку Кундта» – экспериментальный прибор, представляющий собой прозрачную трубу, один конец которой запаян, а в другом закреплен динамик, подключенный к генератору гармонических сигналов. В трубке находится небольшое количество легкого порошка. При тестовом запуске прибора на динамик подали гармонический сигнал с частотой **1715 Гц**. Порошок в трубке под действием акустических вибраций скопился в узлах установившейся стоячей звуковой волны, а на всей длине трубы поместилось **10** скоплений. Определите длину трубки. Ответ приведите в **метрах**. Скорость звука в воздухе считать равной **343 м/с**.

  Решение:

  Условие стоячей волны – на длине трубы помещается целое количество длин полуволн:

$$L = N\frac{\lambda}{2} = N\frac{c_{\text{зв}}}{2\upsilon} = 10\frac{343}{3430} = 1 \text{ м}$$

  Ответ: <u>1 м</u>

Вариант 2:

- В демонстрационную лабораторию университета города N установили «трубку Кундта» – экспериментальный прибор, представляющий собой прозрачную трубу, один конец которой запаян, а в другом закреплен динамик, подключенный к генератору гармонических сигналов. В трубке находится небольшое количество легкого порошка. При тестовом запуске прибора порошок в трубке под действием акустических вибраций скопился в узлах установившейся стоячей звуковой волны, а на всей длине трубы **1.5 м** поместилось **30** скоплений. Определите частоту звука. Ответ приведите в **герцах**. Скорость звука в воздухе считать равной **343 м/с**.

  Решение:

  Условие стоячей волны – на длине трубы помещается целое количество длин полуволн:

$$L = N\frac{\lambda}{2}; \upsilon = N\frac{c_{\text{зв}}}{2L} = 30\frac{343}{3} = 3430 \text{ Гц}$$

  Ответ: <u>3430 Гц</u>

Вариант 3:

- Старший помощник капитана "Метеора" – туристического судна, курсирующего по Финскому заливу между Петергофом и Васильевским островом – заскучав, стал считать удары волн о борт. За **1 мин** при движении судна навстречу волнам он насчитал **120** ударов, в обратную сторону – **72.** Зная, что скорость «Метеора» составляла **16 м/с**, определите расстояние между гребнями волн. Ответ приведите в **метрах**.

  Решение

  Составим систему уравнений по условию:

$$N_{\text{встр}}\,\lambda = (v_{\text{к}} + v_{\text{в}})t$$
$$N_{\text{попут}}\,\lambda = (v_{\text{к}} - v_{\text{в}})t$$

  Выразим из верхнего уравнения скорость волны

$$v_{\text{в}} = v_{\text{к}} - \frac{N_{\text{встр}}\,\lambda}{t}$$

  подставим в нижнее уравнение системы

$$\lambda = \frac{2v_{\text{к}}t}{N_{\text{попут}} + N_{\text{встр}}}$$

$$\lambda = 10 \text{ м}$$

Ответ: <u>10 м</u>

11.3. Электростатика:

Вариант 1:

- В вершинах равностороннего треугольника расположены положительные заряды одинаковой величины. Один из зарядов затем заменили на вдвое больший заряд того же знака. Найдите отношение напряженностей электрического поля в центре треугольника до и после замены заряда.

  Решение:
  Изначально система симметрична относительно центра треугольника – электрические поля зарядов, складываясь (векторно), дают 0. Поскольку нас интересует отношение «до» и «после», и так как замена одного из зарядов делает поле в этой точке ненулевым, то искомое отношение будет равно 0.

  Ответ: **<u>0</u>**

Вариант 2:

- В вершинах квадрата расположены одинаковые по величине положительные заряды. Один из зарядов убирают. Найдите отношение напряженностей электрического поля в точке пересечения диагоналей квадрата до и после того, как убрали заряд.

  Решение:
  Изначально система симметрична относительно центра квадрата – электрические поля зарядов, складываясь (векторно), дают 0. Поскольку нас интересует отношение «до» и «после», и так как замена одного из зарядов делает поле в этой точке ненулевым, то искомое отношение будет равно 0.

  Ответ: **<u>0</u>**

Вариант 3:

- В вершинах правильного шестиугольника расположены одинаковые по величине положительные заряды. Один из зарядов убирают. Найдите отношение напряженностей электрического поля в точке пересечения больших диагоналей шестиугольника до и после того, как убрали заряд.

  Решение:
  Изначально система симметрична относительно центра шестиугольника – электрические поля зарядов, складываясь (векторно) дают 0. Поскольку нас интересует отношение «до» и «после», и так как замена одного из зарядов делает поле в этой точке ненулевым, то искомое отношение будет равно 0.

  Ответ: **<u>0</u>**

10-11.4 Кинематика, равноускоренное движение

Вариант 1:

- На краю вертикального обрыва высотой **8.8 м** от поверхности земли находится мяч для гольфа. После удара клюшкой мяч приобрел начальную вертикальную скорость **20 м/с**, направленную вверх. Какой была горизонтальная скорость мяча, если мяч пролетел **110 м** по горизонтали до соприкосновения с поверхностью земли? Трением мяча о воздух и размером мяча пренебречь. Ответ приведите в **м/с**, округлив до ближайшего целого. Ускорение свободного падения примите равным **10 м/с^2**.

  Решение:

  Изменение вертикальной компоненты скорости от времени:

  $$v_y(t) = v_{y0} - gt$$

  Изменение высоты от времени:

  $$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

  Находим отсюда время полета, когда тело опустилось на землю (h=0):

  $$t = \frac{v_{y0} \pm \sqrt{{v_{y0}}^2 + 2gh_0}}{g}$$

  Горизонтальная скорость:

  $$v_{x0} = \frac{L}{t} = \frac{gL}{v_{y0} + \sqrt{{v_{y0}}^2 + 2gh_0}} = 25 \text{ м/с}$$

  Ответ: **25 м/с**

Вариант 2:

- Рабочие с пирса забрасывают мешки с грузом на палубу судна. Высота палубы составляет **2 м**. С какого наибольшего расстояния до судна рабочие смогут забрасывать мешки на палубу, если будут бросать их под углом **70°** к горизонту с начальной скоростью **7 м/с?** Трением мешков о воздух и их размерами пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным **10 м/с^2**. Ответ приведите в **метрах**, округлив до ближайшего целого значения.

  Решение:

  Начальные вертикальная и горизонтальные скорости:

  $$v_{y0} = v_0 sin\alpha, v_{x0} = v_0 cos\alpha$$

  Изменение высоты от времени:

  $$h(t) = v_{y0} t - \frac{gt^2}{2}$$

  Находим отсюда время полета, когда тело достигает высоты палубы h_0:

$$t = \frac{v_{y0} \pm \sqrt{{v_{y0}}^2 - 2gh_0}}{g}$$

Большее значение времени $t = \frac{v_{y0} + \sqrt{{v_{y0}}^2 - 2gh_0}}{g}$ будет соответствовать прохождению наибольшего расстояния до палубы корабля. Отсюда максимальное расстояние:

$$L = v_{x0}t = v_0 cos\alpha \frac{v_0 sin\alpha + \sqrt{{v_0}^2 sin\alpha^2 - 2gh_0}}{g} = 2{,}008 \approx 2 \text{ м}$$

Ответ: <u>2 м</u>

Вариант 3:

- Теннисный мяч отбивают ракеткой на высоте **45 см** от земли с вертикальной составляющей скорости **6 м/с**, направленной вверх. Какой минимальной горизонтальной составляющей скорости должен обладать теннисный мяч, чтобы перелететь сетку высотой **1 м**, расположенную в **11 м** по горизонтали от положения мяча в момент удара ракеткой? Трением мяча о воздух и его размером пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным **10 м/с^2**. Ответ приведите в **м/с** и округлите до ближайшего целого.

Решение:

Изменение высоты от времени:

$$h(t) = h_0 + v_{y0}t - \frac{gt^2}{2},$$

где h_0- высота отскока мяча от ракетки.

Находим отсюда время полета, когда тело находится на высоте сетки h_1:

$$t = \frac{v_{y0} \pm \sqrt{{v_{y0}}^2 - 2g(h_1 - h_0)}}{g}$$

Минимальная горизонтальная скорость, при которой мяч перелетит сетку:

$$v_{x0} = \frac{L}{t} = \frac{gL}{v_{y0} + \sqrt{{v_{y0}}^2 - 2g(h_1 - h_0)}} = 10 \text{ м/с}$$

Ответ: <u>10 м/с</u>

10-11.5 Динамика, законы сохранения:

Вариант 1:

- Груз массой **1.1 кг** закреплен на жестких невесомых качелях длиной **1 м**. Качели толкают в течение времени **0.4 с** с силой **8.7 Н**. На какой максимальный угол отклонятся качели от вертикали после этого толчка? Ответ приведите в **градусах** и округлите до ближайшего целого. Размерами груза по сравнению с длиной качелей и смещением груза за время действия силы пренебречь. Считать ускорение свободного падения равным **10 м/с^2**.

  Решение:

  По закону изменения импульса для качелей под действием силы F:

  $$p - p_0 = Ft, \qquad mv - 0 = Ft, \quad v = \frac{Ft}{m},$$

  Где v – скорость качелей в нижней точке.

  По закону сохранения энергии кинетическая энергия в нижней точке переходит в потенциальную в верхней:

  $$E = E_0, \qquad \frac{mv^2}{2} = mgh = mgL(1 - \cos\alpha)$$

  Здесь мы отсчитываем потенциальную энергию от нижнего положения качелей, поэтому высота будет равна $h = L(1 - \cos\alpha)$

  Получаем:

  $$\boldsymbol{\cos\alpha} = 1 - \frac{v^2}{2gL} = 1 - \frac{(Ft)^2}{2gLm^2}$$

  Ответ: $\arccos\left(1 - \frac{(Ft)^2}{2gLm^2}\right) =$**<u>60°</u>**

Вариант 2:

- Пластилиновый шарик массой **100 г** подвешен вблизи поверхности стола на невесомой нерастяжимой нити длиной **2 м**. Шарик отклоняют от положения равновесия на угол **60°** так, что нить остается прямой, а на его место помещают брус массой в **десять раз** большей массы шарика. Шарик отпускают. В нижней точке своего движения шарик прилипает к брусу, а нить слетает с крепления. После этого брус вместе с шариком скользят по столу, замедляясь силой трения **1.1 Н**. Определите, какое расстояние пройдет брус с шариком до полной остановки. Ответ приведите в **сантиметрах** и округлите до ближайшего целого. Размерами шарика и бруса по сравнению с длиной нити пренебречь. Считать ускорение свободного падения равным **10 м/с^2**.

  Решение:
  По закону сохранения энергии потенциальная энергия шарика переходит в кинетическую

  $$E = E_0, \qquad \frac{mv^2}{2} = mgh = mgL(1 - \cos\alpha), v = \sqrt{2gL(1 - \cos\alpha)},$$

  Где v – скорость шарика в нижней точке.
  При неупругом ударе импульс сохраняется. Из закона сохранения импульса определим скорость бруса с шариком u:

  $$p = p_0, \qquad m(n+1)u = mv, \quad u = \frac{v}{n+1} = \frac{\sqrt{2gL(1 - \cos\alpha)}}{n+1}$$

Кинетическая энергия бруса с шариком перейдет в работу силы трения:

$$E = -A_{\text{тр}}, \qquad \frac{m(n+1)u^2}{2} = Fs$$

Подставим скорость u:

$$\boldsymbol{s} = \frac{m(n+1)u^2}{2F} = \frac{m(n+1)}{2F}\frac{2gL(1-\cos\alpha)}{(n+1)^2} = \frac{\boldsymbol{mgL(1-\cos\alpha)}}{\boldsymbol{(n+1)F}}$$

Ответ: $\frac{mgL(1-\cos\alpha)}{(n+1)F}$ =**8 см**

Вариант 3:

- Пластилиновый шарик массой **200 г** подвешен вблизи поверхности стола на нерастяжимой нити длиной **1.6 м.** Шарик отклоняют от положения равновесия на угол **60°** так, что нить остается прямой, а на его место помещают такой же пластилиновый шарик. Первый шарик отпускают. В нижней точке движения своего движения первый шарик слипается со вторым, и они вместе продолжают движение на нити. Определите максимальную высоту, на которую они поднимутся. Трением и размерами шариков по сравнению с длиной нити пренебречь. Считать ускорение свободного падения равным **10 м/с^2**.

Решение:

По закону сохранения энергии потенциальная энергия шарика переходит в кинетическую

$$E = E_0, \qquad \frac{mv^2}{2} = mgh = mgL(1-\cos\alpha), v = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha)},$$

Где v – скорость шарика в нижней точке.

При неупругом ударе импульс сохраняется. Из закона сохранения импульса определим скорость двух шариков u:

$$p = p_0, \qquad 2mu = mv, \quad u = \frac{v}{2} = \frac{\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}}{2}$$

Из закона сохранения энергии определим высоту h_2, на которую поднимутся шарики

$$2mgh_2 = \frac{2mu^2}{2} = \frac{mv^2}{4}$$

Подставим скорость u

$$2mgh_2 = \frac{mgL(1-\cos\alpha)}{2}, \ \boldsymbol{h_2} = \frac{\boldsymbol{L(1-\cos\alpha)}}{\boldsymbol{4}}$$

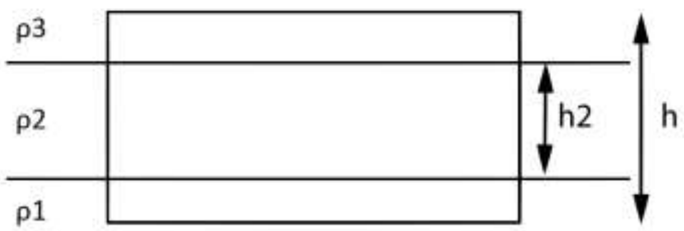
Ответ: $\frac{\boldsymbol{L(1-\cos\alpha)}}{\boldsymbol{4}}$ =**20 см**

10-11.6. Гидростатика

Вариант 1:

- В сосуд последовательно наливают жидкости трех типов с плотностями **1300, 1050** и **900 кг/м³**. Жидкости при этом не перемешиваются и образуют три слоя. Толщина среднего слоя жидкости составила **8 см**. В сосуд затем помещают сплошной прямоугольный параллелепипед высотой **15 см** таким образом, что его основание параллельно границам раздела жидкостей. Определите минимальную плотность помещенного в жидкость тела, при котором оно будет плавать, пересекая обе границы раздела жидкостей. Объем параллелепипеда много меньше объема каждой жидкости, а толщина верхнего и нижнего слоев превышает высоту параллелепипеда.

  Решение:



Обозначим глубину погружения в слои 1 и 3 как Δh_1 и Δh_3 соответственно. Тогда второй закон Ньютона запишется как:

$$mg = \rho_1 g\Delta h_1 S + \rho_2 g\Delta h_2 S + \rho_3 g\Delta h_3 S.$$

Здесь S- площадь основания параллелепипеда. Учитывая, что масса тела $m= \rho_0 V$, где V- объем тела, а ρ_0– его плотность, получим:

$$\rho_0 gV = \rho_1 g\Delta h_1 S + \rho_2 g\Delta h_2 S + \rho_3 g\Delta h_3 S.$$

Подставив $V = Sh$:

$$\rho_0 gh = \rho_1 g\Delta h_1 + \rho_2 g\Delta h_2 + \rho_3 g\Delta h_3.$$

Предельный случай, когда тело пересекает одну границу раздела, и лишь касается второй границы при минимальном значении плотности тела ρ_0 реализуется, когда величина h_1=0. Второй закон Ньютона перепишется в виде:

$$\rho_0 gh = \rho_2 g\Delta h_2 + \rho_3 g\Delta h_3,$$

где h=Δh_2 +Δh_3. Отсюда можно выразить:

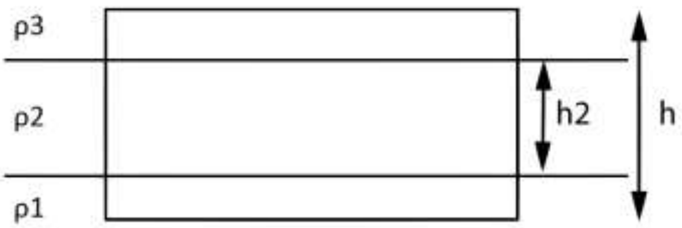
$$\rho_0 = \frac{\rho_2\Delta h_2 + \rho_3(h - \Delta h_2)}{h} = 980 \text{ кг/м}^3$$

Ответ: <u>980</u>

Вариант 2:

- В сосуд последовательно наливают жидкости трех типов с плотностями **1600, 1100** и **800 кг/м³**. Жидкости при этом не перемешиваются и образуют три слоя. Толщина среднего слоя жидкости составила **16 см**. В сосуд затем помещают сплошной прямоугольный параллелепипед высотой **20 см** таким образом, что его основание параллельно границам раздела жидкостей. Определите максимальную плотность помещенного в жидкость тела, при котором оно будет плавать, пересекая обе границы раздела жидкостей. Объем параллелепипеда много меньше объема каждой жидкости, а толщина верхнего и нижнего слоев превышает высоту параллелепипеда.

Решение:



Обозначим глубину погружения в слои 1 и 3 как Δh_1 и Δh_3 соответственно. Тогда второй закон Ньютона запишется как:

$$mg = \rho_1 g \Delta h_1 S + \rho_2 g \Delta h_2 S + \rho_3 g \Delta h_3 S.$$

Здесь *S*- площадь основания параллелепипеда. Учитывая, что масса тела $m= \rho_0 V$, где *V*- объем тела, а ρ_0– его плотность, получим:

$$\rho_0 g V = \rho_1 g \Delta h_1 h_1 S + \rho_2 g \Delta h_2 S + \rho_3 g \Delta h_3 S.$$

Подставив $V = Sh$:

$$\rho_0 g h = \rho_1 g \Delta h_1 + \rho_2 g \Delta h_2 + \rho_3 g \Delta h_3.$$

Предельный случай, когда тело пересекает одну границу раздела, и лишь касается второй границы при минимальном значении плотности тела ρ_0 реализуется, когда величина h_3=0. Второй закон Ньютона перепишется в виде:

$$\rho_0 g h = \rho_1 g \Delta h_1 + \rho_2 g \Delta h_2,$$

где h=Δh_2 +Δh_3. Отсюда можно выразить:

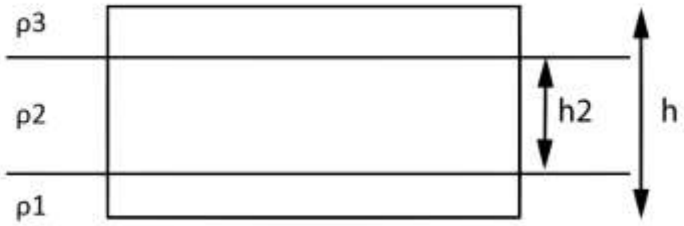
$$\rho_0 = \frac{\rho_2 \Delta h_2 + \rho_1 (h - \Delta h_2)}{h} = 1200 \text{ кг/м}^3$$

Ответ: <u>1200</u>

Вариант 3:

- В сосуд последовательно наливают жидкости трех типов с плотностями **1500, 1045** и **950 кг/м^3**. Жидкости при этом не перемешиваются и образуют три слоя. Толщина среднего слоя жидкости составила **10 см**. В сосуд затем помещают сплошной прямоугольный параллелепипед высотой **18 см** таким образом**,** что его основание параллельно границам раздела жидкостей. Определите плотность помещенного в жидкость тела, при котором оно будет плавать так, что в верхнем и нижнем слое будут находится равные части его объема. Весь объем параллелепипеда много меньше объема каждой жидкости, а толщина верхнего и нижнего слоев превышает высоту параллелепипеда.

Решение:



Обозначим глубину погружения в слои 1 и 3 как Δh_1 и Δh_3 соответственно. Тогда второй закон Ньютона запишется как:

$$mg = \rho_1 g \Delta h_1 S + \rho_2 g \Delta h_2 S + \rho_3 g \Delta h_3 S.$$

Здесь S- площадь основания параллелепипеда. Учитывая, что масса тела $m= \rho_0 V$, где V- объем тела, а ρ_0– его плотность, получим:

$$\rho_0 g V = \rho_1 g \Delta h_1 h_1 S + \rho_2 g \Delta h_2 S + \rho_3 g \Delta h_3 S.$$

Подставив $V = Sh$:

$$\rho_0 g h = \rho_1 g \Delta h_1 + \rho_2 g \Delta h_2 + \rho_3 g \Delta h_3.$$

В случае, когда объемы тела, находящиеся в верхнем и нижнем слоях жидкости, одинаковы ($\Delta h_1=\Delta h_3$), будет справедливо:

$$\rho_0 g h = (\rho_1 + \rho_3) g \Delta h_1 + \rho_2 g \Delta h_2,$$

где $h=2\Delta h_1+ \Delta h_2=\Delta h_2+2\Delta h_3$. Тогда:

$$\rho_0 = \frac{(\rho_1+\rho_3)\frac{(h-\Delta h_2)}{2}+\rho_2 \Delta h_2}{h} = 1125 \text{ кг/м}^3$$

Ответ: <u>1125</u>

10.7 Постоянный ток:

Вариант 1:

- У Вани есть старый амперметр постоянного тока с пределом измерения тока **1 А**. Для увеличения этого предела Ваня решил использовать имеющийся у него набор современных резисторов с малым сопротивлением. Подключив один такой резистор R1 параллельно амперметру, Ваня заметил, что предел измерения амперметра увеличился в **2 раза**. При подключении вместо него резистора R2 предел измерения увеличился в **3 раза**. Во сколько раз увеличится предел измерения, если к амперметру параллельно подключить батарею из двух резисторов R1, соединенных параллельно, и последовательно соединенного с ними резистора R2? Ответ округлите до ближайшего целого.

Решение:

Пусть изначально предел измерения амперметра был равен I_0, а сопротивление амперметра равно r, тогда на нем будет напряжение $U = I_0 * r$. При подключении резистора R параллельно амперметру, суммарный ток в цепи будет равен:

$$I = I_0 + I_R = I_0 + \frac{U}{R} = I_0(1 + \frac{r}{R})$$

Для первого, второго (и третьего для вариантов 2 и 3) резисторов имеем:

$$n = \frac{I}{I_0} = 1 + \frac{r}{R_1}; \quad R_1 = \frac{r}{n-1}\ ;\ R_2 = \frac{r}{m-1};\ R_3 = \frac{r}{k-1}$$

Батарея в условии имеет суммарное сопротивление:

$$R_\Sigma = \frac{R_1}{2} + R_2 = \frac{r}{2(n-1)} + \frac{r}{m-1}$$

Следовательно:

$$x = \frac{I_\Sigma}{I_0} = 1 + \frac{r}{R_\Sigma} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2(n-1)}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}-\mathbf{1}}}$$

Ответ: $1 + \frac{1}{\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{m-1}}$ =**2**

Вариант 2:

- У Вани есть старый амперметр с пределом измерения постоянного тока 1 А. Для увеличения этого предела Ваня решил использовать имеющийся у него набор современных резисторов с малым сопротивлением. Подключив один такой резистор R1 параллельно амперметру, Ваня заметил, что предел измерения амперметра увеличился в **11** раз. При подключении вместо него резистора R2 предел измерения увеличился в **21** раз, а резистора R3 – в **61** раз. Во сколько раз увеличится предел измерения, если к амперметру параллельно подключить батарею из последовательно соединенных резисторов R1, R2 и R3. Ответ округлите до целого.

Решение:

Пусть изначально предел измерения амперметра был равен I_0, а сопротивление амперметра равно r, тогда на нем будет напряжение $U = I_0 * r$. При подключении резистора R параллельно амперметру, суммарный ток в цепи будет равен:

$$I = I_0 + I_R = I_0 + \frac{U}{R} = I_0(1 + \frac{r}{R})$$

Для первого, второго (и третьего для вариантов 2 и 3) резисторов имеем:

$$n = \frac{I}{I_0} = 1 + \frac{r}{R_1}; \quad R_1 = \frac{r}{n-1}\ ;\ R_2 = \frac{r}{m-1};\ R_3 = \frac{r}{k-1}$$

Батарея в условии имеет суммарное сопротивление:

$$R_\Sigma = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{r}{n-1} + \frac{r}{m-1} + \frac{r}{k-1}$$

Следовательно:

$$x = \frac{I_\Sigma}{I_0} = 1 + \frac{r}{R_\Sigma} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n-1}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m-1}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k-1}}}$$

Ответ: $1 + \frac{1}{\frac{1}{n-1}+\frac{1}{m-1}+\frac{1}{k-1}}$ =**7**

Вариант 3:

- У Вани есть старый амперметр с пределом измерения постоянного тока 1 А. Для увеличения этого предела Ваня решил использовать имеющийся у него набор современных резисторов с малым сопротивлением. Подключив один такой резистор R1 параллельно амперметру, Ваня заметил, что предел измерения амперметра увеличился в **5** раз. При подключении вместо него резистора R2 предел измерения увеличился в **7** раз, а резистора R3 – в **13** раз. Во сколько раз увеличится предел измерения, если к амперметру параллельно подключить батарею из параллельно соединенных резисторов R1, R2 и R3. Ответ округлите до целого.

  Решение:
  Пусть изначально предел измерения амперметра был равен I_0, а сопротивление амперметра равно r, тогда на нем будет напряжение $U = I_0 * r$. При подключении резистора R параллельно амперметру, суммарный ток в цепи будет равен:

$$I = I_0 + I_R = I_0 + \frac{U}{R} = I_0(1 + \frac{r}{R})$$

Для первого, второго (и третьего для вариантов 2 и 3) резисторов имеем:

$$n = \frac{I}{I_0} = 1 + \frac{r}{R_1}; \quad R_1 = \frac{r}{n-1}\ ;\ R_2 = \frac{r}{m-1};\ R_3 = \frac{r}{k-1}$$

Батарея в условии имеет суммарное сопротивление:

$$\frac{1}{R_\Sigma} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{n-1}{r} + \frac{m-1}{r} + \frac{k-1}{r} = \frac{n+m+k-3}{r}$$

Следовательно:

$$x = \frac{I_\Sigma}{I_0} = 1 + \frac{r}{R_\Sigma} = 1 + n + m + k - 3 = n + m + k - 2$$

Ответ: $n + m + k - 2$ =**23**

11.7 Переменный ток, нагрев воды:

Вариант 1

- Нагревательный элемент с неизвестным сопротивлением подключен в цепь переменного тока с амплитудой напряжения **50 В** и частотой **50 Гц**. Элемент помещают в сосуд со смесью воды и льда общей массой **1100 г** при температуре **0 °С.** Через **16 минут** температура воды в сосуде стала равной **10 °С.** Определите величину сопротивления нагревательного элемента. Ответ приведите в **омах**, округлив до ближайшего целого. Начальное массовое соотношение воды и льда в сосуде было **10:1**. Удельная теплота плавления льда равна **334 кДж/кг**, теплоемкость воды равна **4200 Дж/кг*°С**. Теплообменом с окружающей средой и стенками сосуда пренебречь.

  Решение:

  Количество теплоты, выделившееся на резисторе, ушло на плавление льда и разогрев воды:

  $$\mathrm{Q} = \lambda\Delta m + C(m + \Delta m)\Delta T$$

  Мощность, выделяющаяся на резисторе, равна:

  $$P = \frac{U_m^2}{2R} = \frac{Q}{t}$$

  Откуда

  $$R = \frac{U_m^2}{2P} = \frac{U_m^2 t}{2(\lambda\Delta m + C(m + \Delta m)\Delta T)}$$

  Ответ: **<u>15 Ом</u>**

Вариант 2:

- Нагревательный элемент с неизвестным сопротивлением подключен в цепь переменного тока с амплитудой тока **5 А** и частотой **50 Гц**. Элемент помещают в сосуд со смесью воды и льда общей массой **2100 г** при температуре **0 °С.** Через **2 минуты** температура воды в сосуде стала равной **10** °С. Определите величину сопротивления нагревательного элемента. Ответ приведите в **омах**, округлив до ближайшего целого. Начальное массовое соотношение воды и льда в сосуде было **20:1**. Удельная теплота плавления льда равна **334 кДж/кг**, теплоемкость воды равна **4200 Дж/кг*°С**. Теплообменом с окружающей средой и стенками сосуда пренебречь.

  Решение:

  Количество теплоты, выделившееся на резисторе, ушло на плавление льда и разогрев воды:

  $$\mathrm{Q} = \lambda\Delta m + C(m + \Delta m)\Delta T$$

  Мощность, выделяющаяся на резисторе, равна:

  $$P = \frac{I_m^2 R}{2} = \frac{Q}{t}$$

  Откуда

  $$R = \frac{2P}{I_m^2} = \frac{2(\lambda\Delta m + C(m + \Delta m)\Delta T)}{I_m^2 t}$$

  Ответ: **<u>81 Ом</u>**

10-11.8 Динамика

Вариант 1:

- К вертикальному шесту прикрепляют металлический шарик массой **400 г** на идеальном резиновом жгуте жёсткостью **50 Н/м** с начальной длиной **4 см**. Шарик на жгуте начинают вращать с постоянной угловой скоростью **ω** вокруг линии шеста. При какой минимальной угловой скорости вращения **ω** шарик оторвется от поверхности шеста? Радиус шарика много меньше длины жгута. Ускорение свободного падения считать равным **10 м/с^2**. Ответ приведите в **рад/с**, округлив до ближайшего целого.
  Подсказка (будет приведена в условии для 10го класса): косинус малого угла приближенно равен 1, синус малого угла – самому углу.
  Решение:

  Второй закон Ньютона в проекции на оси x,y если угол ненулевой:

$$\begin{cases} F_{\text{упр}} \sin\alpha = F_{\text{цб}} \\ F_{\text{упр}} \cos\alpha = mg \end{cases}$$

  Подставим $F_{\text{упр}} = k(l - l_0),\ F_{\text{цб}} = m\omega^2 r = m\omega^2 l \sin\alpha$:

$$\begin{cases} k(l - l_0) = m\omega^2 l \\ k(l - l_0)\cos\alpha = mg \end{cases}$$

  Шарик оторвется от шеста при очень малом угле $\cos\alpha = 1$, тогда $(l - l_0) = mg/k$ и

$$\boldsymbol{\omega^2} = \frac{k(l - l_0)}{ml} = \frac{g}{l} = \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{l_0 + mg/k}}$$

  Ответ: $\sqrt{\frac{g}{l_0 + mg/k}}$ =**<u>9 Рад/с</u>**

Вариант 2:

- К вертикальному шесту прикрепляют металлический шарик массой **250 г** на идеальном резиновом жгуте жёсткостью **16 Н/м** с начальной длиной **8 см**. Шарик на жгуте начинают вращать с постоянной угловой скоростью **ω** вокруг линии шеста. При какой минимальной угловой скорости вращения **ω** жгут порвется? Размерами шарика пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным **10 м/с^2**. Ответ приведите в **рад/с**, округлив до ближайшего целого. **NB:** жгут рвется, когда его длина стремится к бесконечности.
  Решение:

  Второй закон Ньютона в проекции на оси x,y если угол ненулевой:

$$\begin{cases} F_{\text{упр}} \sin\alpha = F_{\text{цб}} \\ F_{\text{упр}} \cos\alpha = mg \end{cases}$$

  Подставим $F_{\text{упр}} = k(l - l_0),\ F_{\text{цб}} = m\omega^2 r = m\omega^2 l \sin\alpha$:

$$\begin{cases} k(l - l_0) = m\omega^2 l \\ k(l - l_0)\cos\alpha = mg \end{cases}$$

  Из первого уравнения находим l:

$$l = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}$$

  При $\omega^2 = k/m$ знаменатель будет равен нулю, тогда длина жгута l будет равна бесконечности, т.е. жгут порвется (при приближении частоты к этому значению длина жгута будет неограниченно расти, а угол α будет стремиться к 90, т.е. жгут встанет горизонтально).

Ответ: $\boldsymbol{\omega = \sqrt{k/m}}$**=<u>8 рад/с</u>**

Вариант 3:

- К вертикальному шесту прикрепляют металлический шарик массой **200 г** на пружинке жёсткостью **25 Н/м**. Когда шарик покоится, длина пружинки равна **8.1 см**. Пружинку вращают так, что шарик движется с постоянной линейной скоростью **1 м/с**. Чему при этом будет равна длина пружинки? Размерами шарика пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным **10 м/с^2**. Ответ приведите в **сантиметрах**, округлив до ближайшего целого. **NB:** оцените начальную длину пружинки.

Вариант 3:

Когда шарик покоится, имеем:

$$mg = F_{\text{упр}} = k(L - l_0)$$

Найдем отсюда $l_0 = L - \frac{mg}{k} \ll L$. При числах в условии начальная длина пружинки много меньше его удлинения. Пренебрежем ей и в дальнейшем.

Второй закон Ньютона в проекции на оси x,y если угол ненулевой:

$$\begin{cases} F_{\text{упр}} \sin\alpha = F_{\text{цб}} \\ F_{\text{упр}} \cos\alpha = mg \end{cases}$$

Подставим $F_{\text{упр}} = kl,\ F_{\text{цб}} = mv^2/r = mv^2/(l\sin\alpha)$:

$$\begin{cases} kl\sin\alpha = \dfrac{mv^2}{l\sin\alpha} \\ kl\cos\alpha = mg \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $kl\sin\alpha$, а второе возведем в квадрат:

$$\begin{cases} k^2l^2\sin\alpha^2 = mv^2k \\ k^2l^2\,cos\,\alpha^2 = m^2g^2 \end{cases}$$

Сложим два уравнения и получим:

$$k^2l^2 = mv^2k + m^2g^2, \qquad \boldsymbol{l = \sqrt{\frac{mv^2}{k} + \frac{m^2g^2}{k^2}}}$$

Ответ: **<u>12 см</u>**