Отборочный этап Олимпиады школьников СПбГУ по физике 2012/2013 г.

11 класс

ЗАДАЧА № 1

«*Вокруг да около*»

Из проволоки сделан жесткий (недеформируемый) каркас в виде правильного 2012-угольника, который лежит на поверхности *гладкого* круглого стола. Центры стола и каркаса совпадают. Вершины каркаса пронумерованы по порядку от № 1 до № 2012. В центре стола просверлено круглое отверстие конечного диаметра, величина которого меньше диаметра вписанной в этот каркас окружности. Через это отверстие пропущены 2012 легких тонких гладких нитей. Каждая из них одним своим концом привязана к соответствующей вершине каркаса. Каркас удерживают в этом положении и затем к противоположным концам нитей (свисающим под столом) привязывают грузы, причем к вершине №1 привязывают груз массой $\boldsymbol{m}$, к вершине №2 – груз массой 2$\boldsymbol{m}$, к вершине №3 – груз массой 3$\boldsymbol{m}$ и т.д. по порядку, т.е., к вершине № n привязывают груз массой $n\boldsymbol{m}$. Найти равнодействующую всех сил, с которой подвешенные грузы действуют на каркас. Иными словами, требуется ответить на 2 вопроса:

1) Около вершины с каким № надо поставить упор, чтобы каркас не сдвинулся с места после того, как его отпустят?
2) С какой силой (F_o) каркас будет давить на этот упор?

Решение:

Снимем с каждой нити по одному грузу $\boldsymbol{m}$. В силу симметрии этой операции вектор равнодействующей всех сил ($\boldsymbol{F_o}$), очевидно, останется неизменным. Затем все снятые грузы (в количестве 2012 $\boldsymbol{m}$) подвесим на нить №1, которая после первой процедуры окажется пустой. В итоге мы получим картину, которая отличается от исходной только поворотом относительно центра на $1/2012$ часть полного оборота, т.е., на угол $\alpha = 360^o/2012 = 2\pi/2012$ радиан. Поворот происходит в сторону возрастания номеров. Действительно, теперь к вершине № n будет привязан груз массой $(n-1)\boldsymbol{m}$, и только к вершине № 1 будет привязан груз массой 2012 $\boldsymbol{m}$, который раньше висел на нити №2012. При этом вектор равнодействующей всех сил ($\boldsymbol{F_1}$) также повернется на этот угол в ту же сторону, оставшись неизменным по модулю. Но поворот этот мы получили, подвесив к вершине №1 груз 2012 $\boldsymbol{m}$, т.е., добавив к равнодействующей $\boldsymbol{F_o}$ силу $\boldsymbol{F}^*$, равную по модулю F^*=2012 mg и направленную из вершины №1 в центр и далее в вершину №1007 (1+ ½·2012):

$$\boldsymbol{F_1} = \boldsymbol{F_o} + \boldsymbol{F}^*.$$

Эти 3 вектора сил ($\boldsymbol{F_o}$, $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F}^*$) образуют равнобедренный треугольник с основанием $\boldsymbol{F}^*$ и углом при вершине $\alpha = 2\pi/2012$. Используя радианную меру этого угла и учитывая его малость, можно записать для сторон треугольника:

$$F^*/F_o = 2\pi/2012 \quad \rightarrow \quad 2012\, mg/F_o = 2\pi/2012,$$

откуда следует ответ на вопрос №2:

$$F_o = (2012)^2 mg/2\pi.$$

Биссектриса (она же высота) этого треугольника перпендикулярна его основанию $\boldsymbol{F}^*$ и направлена по линии, проходящей через точки № 504 (1+ ¼·2012) и № 1510 (1+ ¾·2012). Значит, направления векторов $\boldsymbol{F_o}$ и $\boldsymbol{F_1}$, проходя через центр 2012-угольника, симметрично «охватывают» точку № 504 с обеих сторон с угловым смещением от нее на $\pm\alpha/2$. Соответственно, исходный вектор авнодействующей всех сил ($\boldsymbol{F_o}$) направлен посередине между точками № 503 и № 504. В исходном состоянии необходимо подпереть обе эти точки, симметрично поставив к ним общий упор снаружи 2012-угольника. Многоугольник можно подпереть и изнутри, но в точках, диаметрально противоположных указанным , т.е. № 1509 и № 1510. Для полноты отметим, что вектор $\boldsymbol{F_1}$ направлен, соответственнпо, посередине между точками № 504 и № 505.

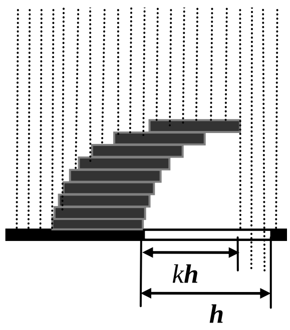
Для наглядности приведем другое решение вопроса о точках упора. Грузы, привязанные к любым двум диаметрально противоположным вершинам (с номереми n и n+1006) действуют на каркас с одной и той же (по модулю) силой F=1006 mg, направленной в каждой паре от центра «О» к вершине с меньшим номером. Количество таких пар равно 1006, а точки, в которые направлены эти силы $\boldsymbol{F}$, имеют номера от № 1 до № 1006. Вектор равнодействующей всех сил, в силу симметрии картины, будет, очевидно, направлен по биссектрисе центрального угла между этими крайними точками. Эта биссектриса нацелена в точку с номером ½·(1+1006) = 503,5, т.е., проходит симметрично между точками и № 503 и № 504.

ЗАДАЧА № 2

«*Навстречу всем ветрам*»

Сплошной (без просветов) забор сделан из жестких *гладких* тонких квадратных щитов размером $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}$. В заборе оставлен достаточно большой проем (шириной $\boldsymbol{h} > 2\boldsymbol{a}$) для установки ворот. Створки ворот собираются делать из таких же щитов, которых осталось всего n штук.

Когда *перпендикулярно забору* подул сильный ветер, проем решили закрыть (хотя бы частично) от ветра этими щитами. Для этого их всех плотно прижали плоскостями друг к другу и затем, поставив эту пачку торцом на грунт, прислонили к забору в вертикальном положении. Далее щиты поочередно, начиная с наружного, стали по мере возможности сдвигать друг относительно друга вдоль забора, как это показано на рисунке (вид сверху). Пунктирные линии показывают направление воздушного потока. Какова максимальная часть (k_n) ширины проема, которую можно перекрыть подобным образом при помощи n щитов, не применяя никаких элементов крепления?



Толщиной щитов, их деформацией и трением их о грунт пренебречь. Считать, что сила давления ветра на щит пропорциональна площади открытой ветру поверхности.

Решение:

Пронумеруем щиты по порядку, начиная с наружного (верхнего на рисунке). Максимально возможный сдвиг щита №m относительно щита № (m+1) равен $a/2^m$. При таком способе сдвига суммарная открытая ветру площадь пачки из первых k щитов составляет $S_m = 2a^2\,[1-(½)^m]$. Равнодействующая сил ветровой нагрузки на эту пачку (F_m) приложена к геометрическому центру площадки S_m. Этот центр находится, очевидно, на расстоянии $L_m = S_m/2a = a[1-(½)^m]$ от наружного (левого на рисунке) края щита №m и, соответственно, на расстоянии $l_n = a/2^k$ от другого края этого щита. Но именно на это расстояние и можно сдвинуть всю пачку относительно следующего щита № (m+1), не теряя, тем самым, опоры. Таким образом, с подветренной (внутренней) стороны суммарная открытая площадь пачки из n щитов составит $s_n = a^2\,[1-(½)^n]$.

Максимальная часть (k_n) ширины проема, которую можно перекрыть подобным образом при помощи n щитов, не применяя никаких элементов крепления, составляет :

$$k_n = s_n/ah = a[1-(½)^n]\,/\,h.$$

ЗАДАЧА № 3

«*Удар, еще удар…*»

На вершине наклонной плоскости стоит тележка на колесах. На некотором расстоянии ниже нее прямо по ходу стоит ящик, который удерживается на этой наклонной плоскости силами трения. При этом угол наклона плоскости к горизонту (α) и коэффициент трения ящика о плоскость (μ) находятся в предельном соотношении $\mathrm{tg}\,\alpha = \mu$. Тележку отпускают, и через время T_1 после начала движения тележка ударяется о ящик. Считая этот удар центральным и абсолютно упругим, определить временной интервал (T_2) между первым и вторым столкновением тележки с ящиком. Длину наклонной плоскости считать неограниченной.

Решение:

Направление вниз по наклонной плосости будем считать положительным. Тележка все время (кроме моментов столкновения с ящиком) двигается по наклонной плоскости с постоянным ускорением $g\sin\alpha$. Ящик, получая каждый раз импульс от тележки, мгновенно меняет свою скорость и продолжает равномерный, т.е., без ускорения (в силу соотношения $\mathrm{tg}\,\alpha = \mu$) спуск с вновь приобретенной скоростью до следующего столкновения с тележкой. Т.о., ускорение их общего центра масс (a_c) будет постоянным, не меняющимся даже в момент столкновения.

Если перейти в систему центра масс, то в ней уже оба тела будут двигаться с ускорением. Ускорение ящика ($a_я = -a_c$) направлено вверх, а ускорение тележки ($a_m = g\sin\alpha - a_c$) – вниз. Оба эти ускорения также постоянны (кроме моментов столкновения) и направлены к центру масс. Эта система отсчета (назовем ее «центральной»), сама движется с ускорением, т.е., не является инерциальной. Но это не только не осложнит ход рассуждений, а наоборот, значительно их упростит, поскольку в дальнейшем решение будет носить чисто кинематический характер. Из динамики нужно будет вспомнить только следующее: в «центральной» системе отсчета после абсолютно упругого столкновения двух тел векторы их скоростей разворачиваются на 180° не изменяя своего модуля.

Итак, в нашей «центральной» системе отсчета ящик и тележка одновременно начнут движение из состояния покоя навстречу друг другу с постоянными ускорениями, направленными к центру масс. Через время T_1 в центре масс они столкнутся и, поменяв (после абсолютно упругого удара) свои скорости ровно на обратные, за такое же время (T_1) проделают обратный путь до исходных позиций. Это следует из простейших формул равноускоренного движения. Одновременно остановившись, они снова пойдут навстречу друг другу, в точности повторяя только что описанные события, и через еще один промежуток T_1 опять столкнутся в центре масс. Очевидно, что после первого столкновения все последующие, начиная со второго, будут регулярно повторяться с интервалом $2T_1$.

ЗАДАЧА №4

«*Мал золотник, да дорог*»

Вертикальная труба высотой $h = 4$м полностью заполнена водой под давлением и герметично закрыта. Давление в нижней части трубы равно $P_o = 2$атм. К дну «прилипли» два одинаковых пузырька воздуха. Других пузырьков в объеме нет. Каким окажется давление в нижней части трубы (P_1), когда один из пузырьков всплывет? Каким оно станет (P_2) после всплытия второго пузырька? Считать воду несжимаемой, а температуру системы неизменной. Давлением насыщенных паров в пузырьках и растворимостью газа в воде пренебречь.

Решение:

V_0- исходные объемы пузырьков

Из-за несжимаемости воды всегда выполняется равенство:

$$V_1+V_2=2V_0$$

Поднялся 1 пузырек:

$V_{верх}= V_0+\Delta V$

$V_{ниж}= V_0+\Delta V$

введем обозначение: $\gamma \equiv \dfrac{\Delta V}{V_0}$

$$P_{ниж} = \frac{P_0}{1-\gamma}$$

$$P_{верх} = \frac{P_0}{1+\gamma}$$

$P_{ниж} - P_{верх} = \rho gh = 0.4$атм

$\gamma^2+10\gamma-1= 0$

$\gamma=0.099$

$P_{ниж}=2.22$ атм

$P_{верх}=1.82$ атм

Когда поднялись оба, их объемы снова V_0. Значит и давление $P'_{верх}=2$ атм (исходное), т.к. не изменились ни V, ни T, ни γ, а значит и P. Тогда

$$V_{ниж}= 2 \text{ атм} + \rho gh=2.4 \text{ атм}$$

ЗАДАЧА № 5

«*Неоднородная*» *прямая*

Процесс расширения 1 моля идеального газа имеет на PV-диаграмме вид отрезка прямой с концами в точках (P_1 ; V_1) и (P_2 ; V_2), причем $P_2 = P_1/\beta$, а $V_2 = \beta V_1$, где β – произвольное положительное число в интервале $1 < \beta < \infty$. Определить теплоемкости газа (C_1 и C_2) в самом начале (C_1) и в самом конце (C_2) указанного процесса. Оценить теплоемкость газа (C^*) при максимальной температуре, достигнутой им в данном процессе.

Решение:

На прямой:

$$P(V) = P_1\frac{\beta+1}{\beta} - \frac{P_1}{\beta V_1}V \Rightarrow dP = \frac{-P_1}{\beta V_1}dV \qquad (1)$$

Вариация уравнения Клапейрона-Менделеева для $\nu=1$

$PdV+VdP=RdT$ после подстановки в (1) имеет вид в точке P_1V_1:

$$P_1dV + V_1dP = P_1dV - \frac{P_1}{\beta}dV = \frac{\beta-1}{\beta}PdV = RdT \Rightarrow PdV = \frac{\beta}{\beta-1}RdT$$

Из первого начала термодинамики $dQ = dU + dA = \frac{3}{2}RdT + PdV = \left(\frac{3}{2} + \frac{\beta}{\beta-1}\right)RdT$

Теплоемкость в точке P_1V_1: $C_1 = \frac{dQ}{dT} = \left(\frac{3}{2} + \frac{\beta}{\beta-1}\right)R.$

В точке P_2V_2 из аналогичных выкладок имеем:

$$P_2dV = -\frac{R}{\beta-1}dT \Rightarrow C_2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\beta-1}\right)R.$$

Ищем, при каких P_m и V_m температура T будет максимальной:

Из $\frac{d(PV)}{dV} = 0$ получаем $V_m = V_1\frac{\beta+1}{2}; P_m = P_1\frac{\beta+1}{2\beta}$

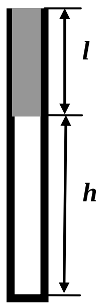
Подставляем полученные значения :

$$P_m dV + V_m dP = 0 \Rightarrow dT = 0 \Rightarrow C_m \to \infty$$

ЗАДАЧА № 6

«*У последней черты*»

Вертикальная цилиндрическая трубка длиной L=96см запаяна снизу. В нижней ее части находится воздух, закрытый сверху жидкой ртутной пробкой, доходящей до открытого верхнего обреза трубки. Высота ртутной пробки равна $l = 40$ см, а воздушного столба, соответственно, h=56см (смотри рисунок). Вся система находится при температуре $t^o = +16^oC$ и атмосферном давлении $H = 760$ мм ртутного столба. Если трубку медленно нагревать, воздух начнет расширяться, постепенно выдавливая ртуть, излишки которой будут выливаться. До какой максимальной температуры (T*) можно нагревать трубку, чтобы воздух продолжал оставаться в ней под ртутной пробкой? Какова минимальная высота ($l_{\min}$) этой пробки? Поверхностными явлениями и температурными изменениями плотности ртути пренебречь.



Решение:

Пусть x-высота ртутной пробки, уменьшающаяся по ходу нагрева. Тогда уравнение Клапейрона-Менделеева можно записать в виде:

$(H + x)(L - x) = \frac{\nu RT}{S\rho g}$, где S- площадь сечения трубки, ρ- плотность ртути.

Зависимость $T(x)$ имеет вид квадратичной параболы с максимумом. После достижения этого максимума дальнейший нагрев невозможен под ртутной пробой, поскольку дальнейшее уменьшение высоты пробки x соответствовало бы по графику понижению температуры. Поэтому малейшее добавление тепла сразу сбросит всю ртутную пробку. Находим эти экстремальные параметры из уравнения: $\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow x_{\min} = l_{\min} = \frac{L-H}{2} = 10$см

При этом $T = T_{\max} = 329\,K = 56^o\,C$

ЗАДАЧА № 7

«*Имени Гаусса не только кривая…*»

Цилиндрический тонкостенный стеклянный стакан высотой h и радиусом R стоит на столе. Он плотно накрыт крышкой такого же радиуса. По всей поверхности крышки равномерно распределен заряд Q. На дне стакана в самом центре расположен точечный заряд q того же знака. Какой минимальной ($m_{\min}$) массой должна обладать крышка, чтобы удержаться на своем месте? Ответ, полученный в общем виде, проверьте в двух предельных случаях ($h << R$ и $h >> R$), результат в которых должен быть вам хорошо известен.

Решение:

Точечный заряд q создает вокруг себя поле, вектор напряженности которого ($\boldsymbol{E}$) обладает сферической симметрией и легко определяется в любой точке пространства. Введем понятие поверхностной плотности заряда (σ) на крышке: $\sigma = Q / S = Q / \pi R^2$.

Из соображений симметрии следует, что результирующая сила ($\boldsymbol{F}$), с которой поле $\boldsymbol{E}$ (от точечного заряда q) действует на крышку, направлена по оси стакана. Из теоремы Гаусса следует, что величина этой силы равна произведению поверхностной плотности заряда на крышке (σ) на поток (Φ_x) вектора $\boldsymbol{E}$ через эту крышку:

$$F_\perp = \Phi_x \cdot \sigma = \Phi_x \cdot Q / \pi R^2 .$$

Построим сферу радиусом $\rho = \sqrt{(h^2 + R^2)}$ с центром в заряде q. Плоская крышка стакана касается своей окружностью этой сферы изнутри и сама оказывается накрытой сферическим сегментом толщиной $d = \rho - h$ и площадью S_d. Найдем величину S_d.

Если из шара радиусом ρ вырезать двумя параллельными плоскостями пластину толщиной d, то, как хорошо известно (и это можно легко показать), площадь боковой сферической поверхности этой пластины (S_d) не зависит от того места шара, из которого ее вырезали. Она зависит только от толщины d и равна $S_d = 2\pi \rho\, d$, что в нашем случае составляет $S_d = 2\pi \rho(\rho - h)$.

Полный поток (Φ_o) вектора $\boldsymbol{E}$ через всю поверхность этой сферы равен, по теореме Гаусса: $\Phi_o = q / \varepsilon_o$. Поток же этого вектора через крышку будет равен той доле полного потока, которую площадь S_d составляет от полной площади поверхности сферы $S_o = 4\pi \rho^2$:

$$\Phi_x = \Phi_o \cdot S_d / S_o = S_d\, q / 4\pi \rho^2 \varepsilon_o = (1 - h/\rho)\, q / 2\, \varepsilon_o \text{., откуда:}$$

$$F_\perp = \Phi_x \cdot \sigma = (1 - h/\rho)\, Q\, q / 2\, \pi \varepsilon_o R^2 . = (1 - h/\rho)\, Q\, q / 2\, \pi \varepsilon_o R^2 . =$$

В случае $h << R$ получаем $F_\perp = Q\, q / 2\, \pi \varepsilon_o R^2 = q\sigma / 2\, \varepsilon_o$, что соответствует случаю заряда q в поле бесеочной пластины, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ. В случае $h >> R$ получаем $F_\perp = Q\, q / 4\, \pi \varepsilon_o h^2$, что соответствует закону Кулона для точечных зарядов q и Q на расстоянии h.

Ну а для массы крышки из очевидного соотношения $F_\perp = mg$ получаем:

$$m = (1 - h/\rho)\, Q\, q / 2\, \pi \varepsilon_o g R^2 .$$

ЗАДАЧА № 8

«*Шире, глубже, дальше…*»

Из металлических проводов спаяли каркас правильного 2012-угольника со всеми возможными диагоналями. Толщины проводов подобраны так, что каждая сторона и каждая диагональ имеет сопротивление r_o Контакта между диагоналями внутри каркаса нет (провода покрыты непроводящим лаком). Определить сопротивление (R_o) между двумя произвольными вершинами каркаса.

Решение:

Выберем две произвольные вершины каркаса и обозначим их символами «А» и «В». Если к ним подсоединить источник тока, для зарядов есть 2011 различных путей движения. Самый короткий по прямому проводу от «А» к «В» имеет сопротивление r_o. Другую возможность дает путь последовательно по двум проводам («А-Х» и «Х-В») через одну из остальных вершин «Х». Таких путей насчитывается 2010 (по количеству оставшихся вершин «Х»). Каждый из путей «А-Х-В» имеет сопротивление $2\, r_o$. Все они эквивалентны друг другу и токи по ним текут одинаковые. Следовательно, все эти оставшиеся вершины электрически «равноправны» и, соответственно, имеют одинаковый потенциал. А это значит, что заряды между ними не текут. Других путей для тока нет. Итак, для тока имеется 2011 параллельных путей, один из которых имеет сопротивление r_o, а все остальные по $2r_o$. Легко видеть, что полное сопротивление между точками «А» и «В» составит величину:

$$R_o = R_{AB} = 2r_o / 2012 = r_o / 1006.$$

Для общности укажем ответ в случае произвольного N-угольника: $R_{AB} = 2r_o / N$.

ЗАДАЧА № 9

«*Закономерная случайность*»

Вертикальная круглая мишень радиусом $\boldsymbol{r}$ совершает горизонтальные гармонические колебания в своей плоскости. Зависимость координаты центра мишени (x_c) от времени дается выражением $x_c = A \sin(\omega t)$, где $A >> \boldsymbol{r}$. Частота колебаний (ω) столь велика, что вести прицельный огонь по мишени невозможно. Стрелок направил прицел винтовки в точку с координатой x_o=0 и подсоединил спусковой механизм к генератору случайных чисел, так, чтобы выстрелы производились в произвольные моменты времени.

Оценить количество отверстий в мишени (n_o) после N таких выстрелов, считая N достаточно большим, а отверстия – точечными и неповторяющимися (пуля дважды в одну точку не попадает). В точку с какой координатой (x*) надо направить прицел, чтобы количество отверстий (n*) было максимальным? Чему оно (n*) равно? Решить задачу в общем виде и конкретно для случая А = 10***r***.

Как может измениться ответ, если со случайного темпа стрельбы перейти на регулярный? Например – стрельба из автомата, при которой пули вылетают с определенным интервалом.

Каким будет ответ, если каждый раз случайно выбирать не только момент выстрела, но и точку прицела в пределах перемещения мишени?

Решение:

$$n_0 = N\frac{2\arcsin\left(\frac{r}{A}\right)}{\pi}$$

Для максимальной результативности целиться нужно в точку с координатой $x^* = \pm(A-r)$, в которой как бы «замирает» ближняя к центру мишени в момент ее максимального (амплитудного) смещения. При этом:

$$\text{n}^* = N\left[1-\frac{2\arcsin\left(1-\frac{2r}{A}\right)}{\pi}\right]$$

Для $A=10r$ имеем $n_0 = N0.0638\,(\approx 6.4\%);\, x^* = \pm 0.9A;\, n^* = 0.41N(\approx 41\%)$

При регулярном темпе стрельбы процент попаданий может иметь любое значение от 0 до 100%. Крайние значения будут в случае совпадения (или кратности) частот мишени и автомата.

При случайной стрельбе по случайным точкам вероятность попадания w будет равна:

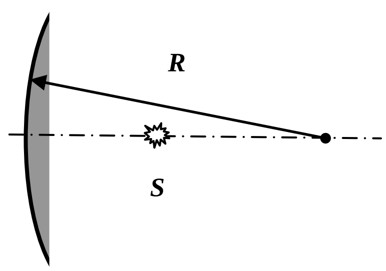
$$w = \frac{2r}{2(A+r)}$$

ЗАДАЧА № 10

«*Не от стенки горох*»

Плоско-выпуклая ***<u>тонкая</u>*** линза изготовлена из стекла с показателем преломления $n = 3/2$. На ее выпуклую поверхность, имеющую сферическую форму радиусом $R = 40$ см, нанесен слой металла, который полностью отражает все падающие на него лучи. Все лучи, падающие на плоскую поверхность линзы (как снаружи, так и изнутри), частично проходят, а частично отражаются.

На оптической оси линзы со стороны ее плоской поверхности на расстоянии $L_0 = 20$см от нее помещают точечный источник света S (см. рисунок). Построить все наблюдаемые (действительные и мнимые) изображения источника. Считать, что при третьем отражении луча от плоской поверхности его интенсивности уже недостаточно для формирования наблюдаемого изображения. Толщиной линзы (но не ее кривизной) пренебречь.



Решение:

1) Прежде всего, плоская поверхность линзы «сработает»как плоское зеркало и даст зеркальное мнимое изображение источника за линзой на расстоянии $l_1 = 20$см

2) Фокусное расстояние вогнутого зеркала равно $F = \frac{R}{2} = 20$см. Но лучи, попадающие на него извне, и лучи, уходящие от него наружу, преломляются плоской поверхностью. Поэтому, если пользоваться формулой тонкой линзы, то нужно вносить поправки в расстояния до источников и изображений. Для входящих лучей расстоние нужно увеличивать в n раз, а для выходящих- в n раз уменьшать. Лучи, достигшие вогнутой поверхности первый раз, падают на нее так, как ели бы они шли с расстояния $L_0^{'} = nL_0$. По формуле тонкой линзы, они

должны дать действительное изображение на расстоянии $l_2' = 60 см$, что с указанной поправкой в действительности дает l_2 = +40см.

3) Но лучи, давшие это изображение, частично отражаются от плоской поверхности внутрь и вторично попадают на вогнутое зеркало. При этом они идут сходящимся пуком, нацеленным в точку $x_3' = -60 см$ за зеркалом. Отразившись от него, они «прицелятся» в точку l_3' из уравнения $\frac{1}{l_3'} - \frac{1}{x_3'} = \frac{1}{20 см}$, откуда $l_3' = 15 см$, что с указанной поправкой даст действительное изображение на $l_3 = 10 см$

4) Лучи, вторично отразившись внутрь от плоской поверхности, падают на зеркало сходящимся пучком, нацеленным в точку $x_4' = -15 см$. После отражения они прицелятся в точку $l_4' = \frac{60}{7} см$, полученную из уравнения $\frac{1}{l_4'} - \frac{1}{15 см} = \frac{1}{20 см}$, что с учетом поправки дает действительное изображение в точке $l_4 = \frac{40}{7} см$.