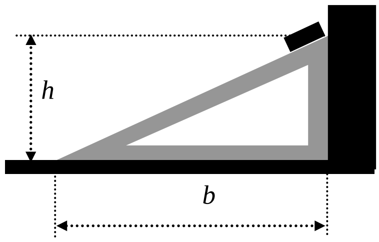
Олимпиада школьников СПбГУ
по физике 2012-2013

заключительный этап

ВАРИАНТ № 2 (10 класс)

ЗАДАЧА № 1



На полу, прижатый к стене, стоит гладкий клин высотой $h = 40$см и основанием $b = 75$см. Масса клина $M = 775$г. В верхней части его наклонной поверхности удерживается брусок длиной $l = 25$см и массой $m = 289$г, также прижатый к стене (см. рисунок). Брусок отпускают, и он начинает скользить без трения вниз по плоскости.

Определить силу давления клина на стену (N) и на пол (P) во время спуска. Через сколько секунд (t) после начала спуска брусок коснется пола?

Решение.

Если α – угол наклона плоскости к горизонту, то ускорение бруска $a = g{\cdot}\sin\alpha$, а его горизонтальная компонента $a_x = g{\cdot}\sin\alpha{\cdot}\cos\alpha$. Отсюда, горизонтальная компонента силы давления бруска на клин и, по «эстафете», клина на стену (N) равна:

$$N = mg{\cdot}\sin\alpha{\cdot}\cos\alpha = 1{,}2\text{Н};$$

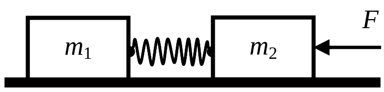
Вертикальная компонента силы давления бруска на клин равна $mg{\cdot}\cos^2\alpha$. К ней нужно добавить вес самого бруска. Т.о., сила давления всей системы на пол равна:

$$P = g\,(M + m\cos^2\alpha) = 10\text{Н};$$

Из условия следует. что длина наклонной плоскости равна L=85см, а путь бруска до соприкосновения с полом составит s=$L - l$ = 60см. Поэтому пола брусок достигнет за время:

$$t = (2s/a)^{½} = (2s/g{\cdot}\sin\alpha)^{½} = 0{,}5\text{с}.$$

ЗАДАЧА № 2



На шероховатом столе лежат два бруска, сцепленные пружиной. Их массы $m_1 = 400$г и $m_2 = 600$г. Первый брусок пытаются сдвинуть с места, толкая на него через пружину второй брусок горизонтальной силой F, как это показано на рисунке. Минимальная сила, необходимая для сдвига, равна F_{min} = 2Н. Определить Коэффициент трения (μ) между брусками и столом.

Решение.

Брусок m_1 сдвинется с места, если пружина надавит на него с силой $F_{\text{пр}} \geq \mu\, g{\cdot}m_1$. Для этого минимальное сжатие пружины жесткостью k должно составить величину $x_{\min} = \mu\, g\, m_1 / k$. Если постоянная сила F, приложенная к бруску m_2, продвинет его до полной остановки на величину x, то она совершит работу:

$$A = Fx = kx^2/2 + \mu\, g{\cdot}m_2\, x, \quad \text{откуда} \quad F_{min} = k\,x_{\min}/2 + \mu\, g{\cdot}m_2 = \mu\, g(\,m_1/2 + m_2) \quad \text{и, соответственно:}$$

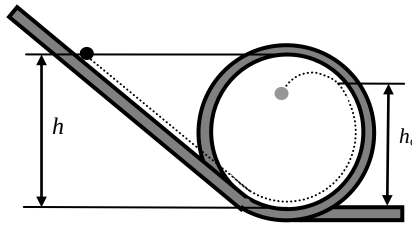
$$\mu = F_{min}/g(\,m_1/2 + m_2) = 0{,}25.$$

Ответ: $\mu = F_{min}/\text{g}{\cdot}(\text{m}_1 + \text{m}_2/2) = 0{,}25.$

ЗАДАЧА № 3

Установка для демонстрации «мертвой петли» представляет собой гладкий желоб, изогнутый в виде петли в вертикальной плоскости. Петля (см. рисунок) состоит из прямой наклонной части, которая плавно (по касательной) переходит в окружность радиуса $R = 60$см, а та, в свою очередь, также плавно переходит в горизонтальный прямой участок.

Для того, чтобы скользящий по желобу (без трения) шарик совершил «мертвую петлю», то есть проскользил по круглому участку без отрыва от желоба, его надо пустить по наклонному участку с высоты H, большей диаметра петли. Пренебрегая размерами шарика, найти наименьшее значение этой высоты (H_{min}), позволяющее шарику совершить «мертвую петлю».



Если же шарик пустить с чуть меньшей высоты, то он, не закончив «мертвой петли», оторвется от желоба и некоторое время будет находиться в свободном полете (см. рисунок, на котором пунктиром показана его примерная траектория). На какой высоте (h_o) произойдет отрыв шарика от желоба, если пустить его с высоты h, равной диаметру петли ($h = 2R = 120$см)?

Решение.

В верхней точке «мертвой петли» минимальная скорость определяется соотношением $(v_{min})^2/R = g$. Учитывая, что потеряв высоту h, тело приобретает скорость $v = \sqrt{2gh}$, имеем $2h_{min}/R\ =1$ или $h_{min} = R/2$, откуда:

$$H_{min} = h_{min} + 2R = h_{min} = 2{,}5R = 150\,\text{см}.$$

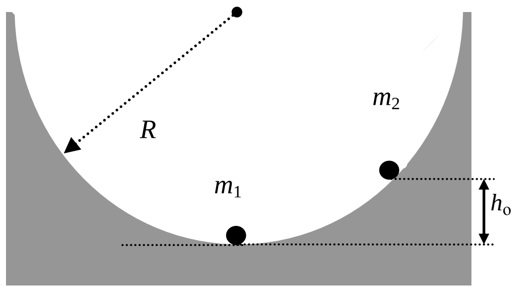
Во время «мертвой петли» нормальное давление шарика на опору равно $N = m(v^2/R - g\cos\alpha)$, где α – центральный угол дуги между шариком и верхней точкой окружности. При спуске шарика с начальной высоты $h = 2R$ это выражение принимает вид: $N = m[2g(1 - g\cos\alpha) - g\cos\alpha] = mg(2 - 3\cos\alpha)$. Отрыв произойдет при $N = 0$, т.е., в точке, для которой $\cos\alpha = ⅔$. Она находится на высоте:

$$h_o = R(2 - \cos\alpha) = 4R/3 = 80\text{см}.$$

Ответ: $H_{min} = 2{,}5\,R = 150$см; $h_o = 4R/3 = 80$см.

ЗАДАЧА № 4

Желоб для скейтбординга имеет в разрезе профиль полуцилиндра радиусом R=5м. На его дне лежит шар массой m_1. На скате желоба на высоте $h_o = 0{,}09R$ от дна ставят второй шар массой $m_2 = ½\,m_1$ и отпускают (см. рисунок). Через какое время после этого (T_1) произойдет столкновение шаров. Считая это столкновение центральным и абсолютно упругим, найти высоту подъема каждого из шаров (h_1 и, соответственно h_2), после столкновения. Найти временной интервал (T_2) между первым и вторым столкновениями шаров. Определить высоту подъема шаров (H_1 и, соответственно H_2) после второго столкновения. Шары считать материальными точками. Трением пренебречь.



Решение.

Пусть шар массой m движется со скоростью v_o. После его абсолютно упругого центрального удара о неподвижный шар массой M их скорости окажутся равными, соответственно:

$$v_m = v_o(m - M)/(m + M) \quad \text{и} \quad v_M = 2v_o\,m/(m + M) \qquad (1)$$

Решение (1) вытекает из законов сохранения энергии и импульса. Его можно считать универсальным и применять в общем случае, когда движутся оба шара. Для этого нужно перейти в систему отсчета, связанную с одним из них, и после расчетов вернуться, при необходимости, в исходную систему. Именно этот прием мы и используем в дальнейшем. Отметим то важное следствие из (1), что при ударе о более тяжелый шар ($m < M$) налетающий шар (m) полетит обратно.

В нашем случае шар m_2, соскользнув с высоты h_o= 45см, приобретет скорость $v_o = \sqrt{(2gh_o)}$ = 3 м/с. Время его спуска до дна составит $T_1 = ½\pi\sqrt{(R/g)}$ = 1,11с, что соответствует четверти периода колебаний математического маятника длиной R. После столкновения шаров они, согласно (1), будут иметь скорости, соответственно:

$$v_1 = 2\ \text{м/с} \quad \text{и} \quad v_2 = -1\ \text{м/с (пойдет обратно)},$$

что позволит каждому из них подняться на соответствующую высоту ($h = v^2/2g$):

$$h_1 = 20\text{см} \quad \text{и} \quad h_2 = 5\text{см}.$$

Период колебаний маятника не зависит (при малых углах отклонения) от амплитуды. Поэтому второе столкновение шаров снова произойдет в центре желоба через время $T_2 = 2T_1$ = 2,22с и, естественно, с теми же (по модулю) скоростями, с которыми они «разбежались». Тогда, из (1) и соображений, изложенных в самом начале, находим скорости шаров (V_1 и V_2) после второго столкновения: $V_1 = 0$ и $V_2 = -3$ м/с, откуда:

$$H_1 = 0 \quad \text{и} \quad H_2 = 45\text{см}.$$

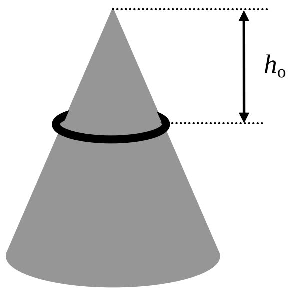
Система вернулась в исходное (стартовое) состояние.

Ответ: T_1=1,11; h_1=20см; h_2=5см; T_2 = 2,22с; H_1 = 0; $H_2 = h_o$ = 45см.

ЗАДАЧА № 5

На столе стоит стальной конус высотой H=80см и радиусом основания R=12см. При температуре $T_o = 0^oC$ на конус свободно надели тонкое алюминиевое кольцо. Его плоскость горизонтальна и отстоит от вершины конуса на величину h_o = 500,0мм (см. рисунок). Всю систему нагревают до некоторой температуры (T*) и затем начинают медленно охлаждть. Когда температура достигает исходного значения $T_o = 0^oC$, кольцо разрывается. Вопросы:

– До какой температуры (T*) нагрели конус с кольцом?
– Есть ли ограничения (и какие) для коэффициента трения (μ) между конусом и кольцом, или этот эффект (разрыв кольца) возможен при любом его значении?
– На какую величину (Δh) и с каким знаком (±) изменится по сравнению с исходным значением (h_o) расстояние между вершиной конуса и плоскостью кольца при максимальной температуре нагрева T*?



Линейный коэффициент теплового расширения стали $\alpha_{Ст}=12\cdot10^{-6}\,K^{-1}$, алюминия $\alpha_{Al} = 24\cdot10^{-6}\,K^{-1}$. Проволока, из которой сделано кольцо, разрывается от растягивающего механичнского усилия, при котором ее удлинение (Δl*) достигает величины 0,2% от исходной длины ($\Delta l^*/l_o$ = 0,002).

Ответ: $T^*=\Delta T= (\Delta l^*/l_o)/(\alpha_{Al}-\alpha_{Ст}) \approx 167^oC$; $\mu > R/H$ = 0,15 ; $\Delta h = h_o T^* \alpha_{Al}$ = 2,0 мм.

Решение.

Поскольку коэффициент теплового расширения у стали меньше, чем у алюминия, при нагреве кольцо будет беспрепятственно спускаться по конусу. При охлаждении движение кольца должно быть обратным. Но, сжимаясь быстрее конуса, кольцо будет на него давить, и его скольжению вверх может воспрепятствовать трение. Если пренебречь весом кольца, критерий скольжения имее вид: $\mu < R/H$ = 0,15. В противном случае кольцо останется на месте и по мере дальнейшего охлаждения его диаметр будет уменьшаться соответственно коэффициенту теплового расширения стали, а не меди. Тем самым кольцо окажется растянутым и с нарастающей силой будет сжимать конус. Относительная величина растяжения $\Delta l/l = (\alpha_{Al} - \alpha_{Ст})\,\Delta T$. Когда растяжение достигнет предельного значения, кольцо разорвется. Отсюда:

$$T^*=\Delta T= (\Delta l^*/l_o)/(\alpha_{Al}-\alpha_{Ст}) \approx 167^oC \quad \text{при условии} \quad \mu > R/H = 0{,}15.$$

Еще раз отметим, что при нагреве кольцо свободно спускается по конусу и изменяет свои размеры соответственно своему коэффициенту теплового расширения. Но верхняя часть конуса, «отсекаемая» плоскостью кольца, остается подобной себе. Значит и все остальные линейные размеры этой части конуса изменяются с тем же коэффициентом. Отсюда: $\Delta h = h_o T^* \alpha_{Al}$ = 2,0 мм.

ЗАДАЧА № 6

Не пользуясь таблицами, определить относительную влажность воздуха в комнате при температуре $t = 25^oC$, если измеренная точка росы в ней оказалась равной $t_{росы} = 17^oC$. Считать, что в этой температурной области плотность насыщенного пара (ρ*) пропорциональна 16-й степени ***абсолютной*** температуры:

$\rho^*(T) = A\cdot T^{16}$, где A – константа.

Решение.

Точка росы ($t_{росы}$) для любой атмосферы – это та наибольшая температура, при которой имеющаяся абсолютная влажнось воздуха даст 100%-ную относительную (φ=1). Напомним, что относительная влажность равна отношению имеющейся абсолютной влажности к максимально возможной (насыщенной) при данной температуре. Поскольку при изменении температуры (вплоть до точки росы) абсолютная влажнось воздуха предполагается неизменной, то относительная влажность (φ) при температуре t дается выражением: $\varphi = (T_{росы} / T)^{16}$, где значения температур надо брать по шкале Кельвина. Т.о., получаем:

Ответ: $\varphi = (t_{росы}/t)^{16} = (290\,K / 298\,K)^{16} = 0{,}647 = 64{,}7\%$.

ЗАДАЧА № 7

На поверхности Марса температура достигает значения T = – 30°C. Оценить среднеквадратичную скорость теплового движения молекул гелия (V_{He}) и кислорода (V_{O2}) при этой температуре. Сравнить ее со второй космической скоростью для Марса (V_{II}). Радиус Марса $R=3{,}4\cdot10^{6}$ м, ускорение свободного падения на Марсе составляет 0,4 от земного. Массы атомов гелия и кислорода принять равными 4 и, соответственно, 16 аем (атомных единиц массы). 1аем=$1{,}66\cdot10^{-27}$кг, констаета Больцмана $k_Б = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К.

Решение.

Одним из фундаментальных положений молекулярно-кинетической теории (МКТ) является следующее. В системе, находящейся в термодинамическом равновесии при абсолютной температуре T, на каждую степень свободы в среднем приходится энергия $\varepsilon = ½\, k_Б\, T$. Поступательное движение имеет 3 степени свободы, и его средняя энергия для любой частицы данной системы (E) равна: $E = ½\, m <v^2>/ = 3\, k_Б\, T/ 2$. Отсюда, среднеквадратичная скорость такой частицы (V) дается выражением: $V = \sqrt{<v^2>} = \sqrt{(3\, k_Б\, T/ m)}$. Таким образом:

$$V_{He} \approx 12203 \text{ м/с}; \qquad V_{O2} \approx 430 \text{ м/с}$$

Вторая космическая скорость для любой планеты (V_{II}) дается выражением: $V_{II} = (2gR)^{½}$, где R – радиус планеты, а g – ускорение свободного падения на ее поверхности. Для Марса это составит: $V_{II} \approx 5200$м/с.

Ответ: $V=(3kT/m)^{½} \rightarrow V_{He} \approx 1220$м/с; $V_{O2} \approx 430$м/с; $V_{II} = (2gR)^{½} \approx 5200$м/с**.**

ЗАДАЧА № 8

Имеются два стандартных электрокипятильника (т.е., они рассчитаны на работу от городской электросети и их сопротивление практически не зависит от температуры). Один кипятильник, включенный в сеть, доводит воду в стакане до кипения за время t_1=54с. Другому для этого требуется время t_2=18с.

Взяли два стакана с водой и опустили в них эти кипятильники (каждый в свой стакан). Затем оба кипятильника соединили последовательно и включили в сеть. Сколько времени в этом случае потребуется на кипячение первому (T_1) и второму (T_2) кипятильнику? Теплопотерями пренебречь.

Решение.

Электронагреватель развивает мощность $W=U^2/R$ и за время t выделяет тепло $Q=Wt$. Т.о., время, необходимое для выделения необходимого тепла, равно $t=Q/W=QR/U^2$. Отсюда следуют сравнительные оценки времени их работы. При одинаковом напряжении на них $t_a/t_b = R_a/R_b$. При одинаковых сопротивлениях (например, один и тот же нагреватель при разных напряжениях) $t_a/t_b = (U_b/U_a)^2$. В первом случае, когда напряжение на каждом нагревателе равно полному сетевому (U_o), имеем: $t_1/t_2 = R_1/R_2 = 3$. При последовательном включении нагревателей в сеть напряжение на них делится пропорционально их сопротивлениям:

$$U_1 = U_o R_1/(R_1+R_2) = U_o t_1/(t_1+t_2) = ¾ U_o;$$

$$U_2 = U_o R_2/(R_1+R_2) = U_o t_2/(t_1+t_2) = ¼ U_o.$$

Тогда

$$t_1/T_1 = (U_1/U_o)^2 = (¾)^2 = 9/16 \qquad t_2/T_2 = (U_2/U_o)^2 = (¼)^2 = 1/16$$

Откуда следует:

Ответ: $T_1 = (t_1 + t_2)^2/t_1 = 96$с; $\qquad T_2 = (t_1 + t_2)^2/t_2 = 288$ с.