Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2021/2022 учебный год

Задания для 8–9 классов

1. (10 баллов) *16 детей различного роста встали в круг, все лицом в центр. Каждый из них сказал: «Мой правый сосед выше моего левого соседа». Какое наименьшее количество детей могло сказать правду?*

а) 0;
б) 1;
в) 2;
г) больше 2.

Ответ: в).

Решение: Пронумеруем места расположения детей в круге числами от 1 до 16 против часовой стрелки. Разделим детей на 2 группы: стоящих на местах с нечетными номерами — *первая* группа, и стоящих на местах с четными номерами — *вторая* группа. Заметим, что высказывания детей из первой группы относятся только к детям из второй группы, и наоборот. Так как все дети разного роста, в каждой из групп есть самый высокий ребенок. Таким образом, как минимум 2 высказывания являются правдой — это высказывания ребенка из первой группы, стоящего слева от самого высокого во второй группе, и ребенка из второй группы, стоящего слева от самого высокого в первой группе.

Приведем пример расположения, для которого верны ровно 2 высказывания. Выстроим детей по убыванию их роста (то есть первым будет самый высокий, а 16-м — самый низкий). Легко заметить, что при таком расположении будут верны только высказывания детей, стоящих на 1-м и 16-м местах.

2. (10 баллов) *У Васи имеются:*
а) 2 различных тома из собрания сочинений А. С. Пушкина; высота каждого тома — 30 см;
б) собрание сочинений Е. В. Тарле в 4-х томах; высота каждого тома — 25 см;
в) книга лирических стихов высотой 40 см, опубликованных самим Васей.
Вася хочет расположить эти книги на полке так, чтобы его творение было в центре, а книги, стоящие от него на одинаковом расстоянии слева и справа, имели равную высоту. Сколькими способами это можно сделать?

а) $3 \cdot 2! \cdot 4!$*;*
б) $2! \cdot 3!$*;*
в) $\frac{51}{3! \cdot 2!}$*;*
г) ни один из указанных ответов не является верным.

Ответ: а).

Решение: Из условия симметричности расстановки вытекают два вывода.

1) Слева и справа от стихов Васи должны стоять один том Пушкина и два тома Тарле.

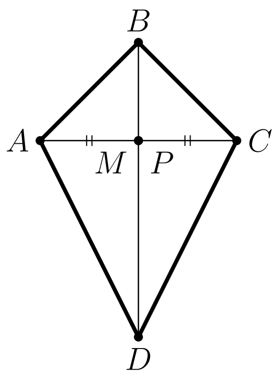
2) Для томов Пушкина допустимы 3 пары позиций: (1,7), (2,6), (3,5). Остальные свободные места должны занимать книги Тарле.

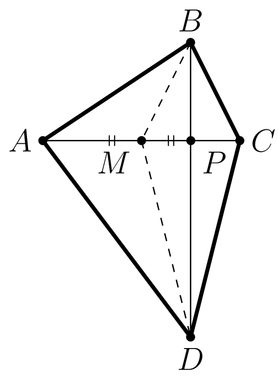
Расставить тома Пушкина на выбранных для них позициях можно 2! способами. После этого книги Тарле на оставшихся местах независимо расставляются 4! способами. Таким образом, окончательное количество расстановок — $3 \cdot 2! \cdot 4!$.

3. (10 баллов) *Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, на диагонали AC отмечена точка M такая, что $AM = MC$. Отметьте верные утверждения.*

а) Расстояния от точки M до концов диагонали BD равны: $BM = MD$.
б) Сумма площадей треугольников ABM и AMD равна сумме площадей треугольников BMC и CMD.
в) Сумма площадей треугольников ABM и CPD равна сумме площадей треугольников BMC и APD.
г) Среди перечисленных утверждений нет верных.

Ответ: б).





Решение: Рассмотрим каждое из утверждений.

а) Равенство $BM = DM$ эквивалентно тому, что точка M лежит на серединном перпендикуляре к BD. На рисунке слева приведен пример четырехугольника $ABCD$, для которого это не так. Значит, утверждение а) неверно.

б) У треугольников ABM и BMC равны основания AM и MC, а также высоты, опущенные из вершины B. Следовательно, площади этих треугольников равны. Аналогичным образом равны площади треугольников AMD и CMD. Поэтому

$$S_{\triangle ABM} + S_{\triangle AMD} = S_{\triangle BMC} + S_{\triangle CMD},$$

то есть б) верно.

в) В силу б) $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle BMC}$. Поэтому в) равносильно равенству площадей $\triangle CPD$ и $\triangle APD$. Высоты этих треугольников равны перпендикуляру, опущенному из вершины D на прямую AC. Но основания CP и AP треугольников совпадать не обязаны (соответствующий пример показан на рисунке справа). Значит, утверждение в) неверно.

4. (20 баллов) *В марсианском календаре год состоит из 5882 дней, а в каждом месяце 100 или 77 дней. Сколько месяцев в марсианском календаре?*

Ответ: 74.

Решение: Пусть x — количество месяцев, в которых 100 дней, y — количество месяцев, в которых 77 дней. По условию, $100x + 77y = 5882$. Очевидно, $y \leqslant 66$, иначе $x < 0$. Заметим, что

$$x \mod 11 = 100x \mod 11 = 5882 \mod 11 = 8.$$

Значит, $x = 11k + 8$ при некотором целом k, откуда

$$(11k + 8) \cdot 100 + 77y = 5882 \Longleftrightarrow 1100k = 5082 - 77y = 77(66 - y).$$

Правая часть делится на 100, но 77 и 100 взаимно просты. Тогда на 100 делится число $66 - y$, лежащее между 0 и 65. Это возможно лишь в случае $y = 66$. Поэтому $x = 0,01 \cdot (5882 - 76 \cdot 66) = 8$ и $x + y = 74$.

5. (20 баллов) *Профессор К., желая прослыть остряком, планирует на каждой своей лекции рассказывать не менее двух, но и не более трех разных анекдотов. При этом множества анекдотов, рассказанных на разных лекциях, не должны совпадать. Сколько всего лекций сможет прочесть профессор К., если он знает 8 анекдотов?*

Ответ: 84.

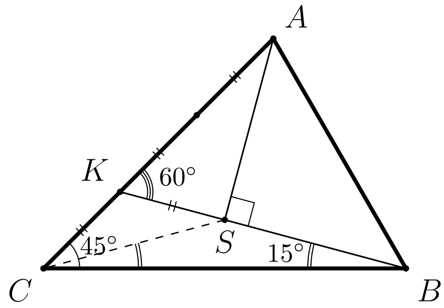
Решение: Профессор может задействовать все возможные тройки анекдотов (их число равно $C_8^3 = 56$), а также все пары анекдотов (их $C_8^2 = 28$). Таким образом, максимальное количество наборов анекдотов, которые профессор может использовать на лекциях, равно $56 + 28 = 84$.

6. (20 баллов) *Назовем словом любую конечную последовательность букв русского алфавита. Сколько различных пятибуквенных слов можно составить из букв слова САМСА? А из букв слова ПАСТА? В ответе укажите сумму найденных чисел.*

Ответ: 90.

Решение: В слове САМСА дважды встречается буква А и дважды встречается буква С. Следовательно, количество различных слов будет равно $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$. В слове ПАСТА только буква А встречается дважды. Поэтому количество различных слов в этом случае будет равно $\frac{5!}{2!} = 60$. В сумме получим $30 + 60 = 90$.

7. (30 баллов) *На стороне AC треугольника ABC, в котором $\angle ACB = 45°$, отмечена точка K такая, что $AK = 2KC$. На отрезке BK нашлась такая точка S, что $AS \perp BK$ и $\angle AKS = 60°$. Докажите, что $AS = BS$.*



Решение: В прямоугольном треугольнике ASK с прямым углом S угол AKS равен $60°$, следовательно, $KS = \frac{1}{2}AK$.

В треугольнике KSC угол CKS равен $180° - \angle AKS = 120°$, а $KC = \frac{1}{2}AK = KS$. Получаем, что треугольник KSC — равнобедренный с основанием SC и углами при основании, равными $30°$. Тогда

$$\angle SBC = 180° - \angle BKC - \angle BCK = 180° - 120° - 45° = 15°,$$

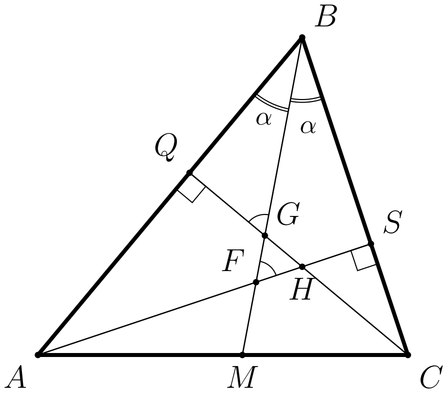
а также

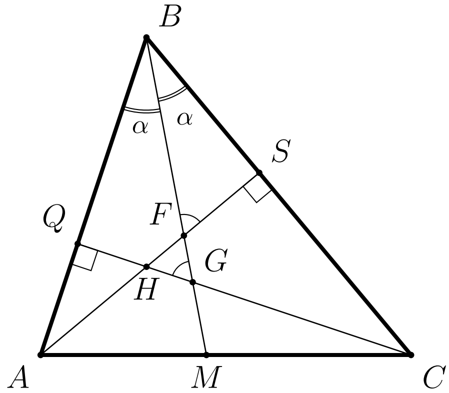
$$\angle SCB = \angle BCK - \angle SCK = 45° - 30° = 15°.$$

Таким образом, треугольник SCB — равнобедренный с основанием CB, откуда $SC = SB$.

Рассмотрим треугольник ASC. В нем $\angle SAC = 30° = \angle ACS$. Следовательно, это равнобедренный треугольник с основанием AC, то есть $SA = SC$. В итоге получаем $SA = SC = SB$.

8. (30 баллов) *Высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, опущенные из вершин A и C, пересекаются в точке H, а также пересекают биссектрису угла ABC в точках F и G соответственно. Докажите, что треугольник FGH — равнобедренный.*



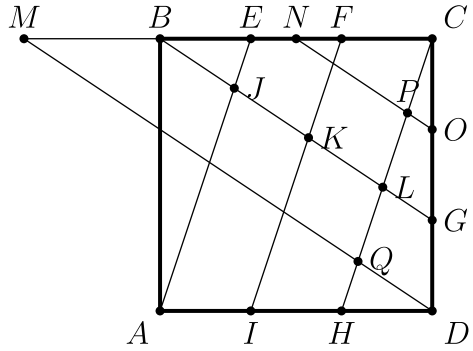


Решение: Пусть M — основание биссектрисы угла B. Заметим, что возможны два варианта взаимного расположения точек F и G на биссектрисе BM: точка G лежит между точками B и F (рисунок слева) или точка F лежит между точками B и G (рисунок справа).

Пусть Q и S — основание высот, опущенных из вершин C и A соответственно. Рассмотрим прямоугольные треугольники BQG и BFS. Они подобны по двум углам, так как BM — биссектриса. Следовательно, $\angle BGQ = \angle BFS$, и один из этих углов является углом треугольника FGH, а второй — вертикальным с другим углом треугольника FGH. Таким образом, в треугольнике FGH равны углы при вершинах F и G, т.е. треугольник является равнобедренным.

9. (30 баллов) *На стороне BC квадрата $ABCD$ отмечены точки E и F так, что $BE : EC = CF : FB = 1 : 2$. На стороне CD отмечена точка G так, что $CG : GD = 2 : 1$. На стороне AD отмечены точки H и I так, что $AI : ID = DH : HA = 1 : 2$. Отрезок BG пересекает отрезки AE, IF и HC в точках J, K и L соответственно. Площадь какого из четырехугольников больше – $EFKJ$ или $GDHL$?*

Ответ: Площадь $GDHL$ больше.



Решение: Обозначим $S_{ABCD} = 36S$, $S_{CLG} = x$. Тогда $S_{CDH} = 6S$ и $S_{GDHL} = 6S - x$, $S_{BCG} = 12S$ и $S_{BCL} = 12S - x$. Из равенств $BE = EF = FC = AI = IH = HD$ вытекает, что $AE \parallel IF \parallel CH$, и по теореме Фалеса $BJ = JK = KL$. Значит, треугольники BJE, BKF и BLC подобны. Далее находим $S_{BJE} = \frac{1}{9}S_{BCL}$, $S_{BKF} = \frac{4}{9}S_{BCL}$ и $S_{EFKJ} = S_{BKF} - S_{BJE} = \frac{1}{3}S_{BCL} = 4S - \frac{x}{3}$.

Для того, чтобы сравнить площади заданных четырехугольников, осталось найти x. Обозначим через N середину стороны BC. Продлим сторону BC за точку B и отметим такую точку M, что $CN = NB = BM$. На стороне CD отметим точку O – середину отрезка CG, то есть $CO = OG = GD$. Тогда $NO \parallel BG \parallel MD$, и по теореме Фалеса $CP = PL = LQ$. Рассмотрим треугольники QHD и QMC. Они подобны с коэффициентом, равным $\frac{HD}{CM} = \frac{2}{9} = \frac{HQ}{QC}$. Следовательно, $\frac{CL}{LH} = \frac{6}{5}$. Тогда $x = \frac{6}{11} \cdot \frac{2}{3}S_{CHD} = \frac{4}{11} \cdot 6S = \frac{24}{11}S$, откуда $S_{GDHL} = \frac{42}{11}S$, $S_{EFKJ} = \frac{36}{11}S$.

10. (40 баллов) *Пусть $P(n)$ обозначает произведение цифр натурального числа n. При каком наибольшем натуральном k найдётся такое натуральное число $n > 10$, что*

$$P(n) < P(2n) < \ldots < P(kn)?$$

Ответ: 9.

Решение: Покажем вначале, что $k < 10$. Действительно, при $k \geqslant 10$ в наш набор чисел входит $P(10n)$. Оно равно нулю, поскольку число $10n$ заканчивается на 0. Тогда $P(n) < 0$, что невозможно.

Приведем теперь реализацию для $k = 9$. В качестве n можно взять число вида $\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{j}$ при любом $j \geqslant 2$. В этом случае $P(sn) = s^j$, $s = 1, \ldots, k$, а числа s^j, очевидно, возрастают.

11. (40 баллов) *Числа от 1 до 600 разбиты на несколько групп. Известно, что если в группе более одного числа, то сумма любых двух чисел из этой группы делится на 6. Какое наименьшее количество групп может быть?*

Ответ: 202.

Решение: При $k = 0, 1, \ldots, 5$ обозначим через G_k множество чисел от 1 до 600, дающие при делении на 6 остаток k. Пусть число a из G_k входит в некоторую группу. Если в нее входит еще число b, то оно принадлежит G_{6-k}, иначе $a+b$ не кратно 6. Пусть в этой группе есть третье число c. Тогда оно лежит и в G_k, и в G_{6-k}. Это возможно только при $k = 0$ и $k = 3$. Числа, не входящие в G_0 и G_3, можно включать только в двухэлементные группы, а всего таких чисел 400. Значит, они дают не менее 200 групп. Множества G_0 и G_3 могут образовывать группы, но объединить в одну их нельзя. Таким образом, всего потребуется по крайней мере 202 группы.

Приведем реализацию разбиения на 202 группы. Одной них будет G_0, другой — G_3, а также выберем группы вида $\{6n + k, 6n + 6 - k\}$, где $n = 0, 1, \ldots, 99$ и $k = 1, 2$.

12. (40 баллов) *Пять мальчиков играли в слова: каждый из них написал по 7 различных слов. Оказалось, что у каждого мальчика есть ровно по 2 слова, которые не встречаются ни у одного из остальных мальчиков. Какое наибольшее количество различных слов могли суммарно написать мальчики?*

Ответ: 22.

Решение: Всего было написано $5 \times 7 = 35$ слов. Поскольку каждый мальчик написал ровно 2 слова, которые не встречались ни у одного из остальных мальчиков, то таких неповторяющихся слов было суммарно написано $5 \times 2 = 10$. Из оставшихся 25 слов (повторяющихся) каждое было написано хотя бы дважды. Следовательно, их не более $\left[\frac{25}{2}\right] = 12$, а общее количество слов не превосходит $10 + 12 = 22$.

Пример распределения повторяющихся слов (s_i):

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}
M_1	+	+	+	+	+							
M_2	+				+	+	+	+				
M_3		+				+			+	+		+
M_4			+				+		+		+	+
M_5				+				+		+	+	+

13. (40 баллов) *В магазине, где все товары стоят целое число рублей, действуют два специальных предложения:*

1) *Покупатель, купивший одновременно не менее трех товаров, может выбрать в подарок (бесплатно) один товар, стоимость которого не превышает минимальной из стоимостей оплаченных товаров;*

2) *Покупатель, купивший ровно один товар на сумму не менее N рублей, получает скидку 20% на следующую покупку (из любого количества товаров).*

Покупатель, впервые пришедший в данный магазин, хочет приобрести ровно четыре товара суммарной стоимостью 1000 рублей, самый дешевый из которых стоит не менее 99 рублей. Определите наибольшее N, при котором второе предложение для него выгоднее первого.

Ответ: 504.

Решение: Обозначим через S суммарную стомость четырех заинтересовавших покупателя товаров, а через X — минимальную возможную стоимость товаров. Заинтересованость ровно в четырех товарах означает, что покупатель может воспользоваться либо предложением 1, либо предложением 2, но не обоими.

Пусть товары стоят s_1, s_2, s_3, s_4 рублей, где $s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3 \geqslant s_4 \geqslant X$. В случае первого специального предложения покупатель может получить в подарок только товар со стоимостью s_4; следовательно, он потратит $S - s_4$ рублей. В случае второго специального предложения покупатель потратит

$$s_i + 0{,}8(S - s_i) = 0{,}2s_i + 0{,}8S,$$

где s_i — минимальная из стоимостей, не меньшая N (она существует, иначе вторым предложением нельзя будет воспользоваться).

Покупателю выгоднее второе специальное предложение, если

$$0{,}2s_i + 0{,}8S < S - s_4 \Leftrightarrow 0{,}2s_i < 0{,}2S - s_4 \Leftrightarrow s_i < S - 5s_4,$$

откуда $N \leqslant s_i < S - 5s_4 \leqslant S - 5X$, то есть $N \leqslant S - 1 - 5X = 1000 - 1 - 5 \cdot 99 = 504$.

Проверим, что значение 504 реализуется для N. Пусть стоимости товаров равны 99, 198, 199 и 504 рубля. И пусть для использования второго специального предложения покупатель приобретает товар стоимостью 504 рубля. Тогда он заплатит сумму $504 + 0{,}8 \cdot 496 = 900{,}8$, которая меньше суммы, потраченной в случае использования первого специального предложения — $1000 - 99 = 901$.

14. (40 баллов) *Докажите, что среди трех чисел* $777^{2021} \cdot 999^{2021} - 1$, $999^{2021} \cdot 555^{2021} - 1$ *и* $555^{2021} \cdot 777^{2021} - 1$ *только одно делится на 4.*

Решение: Пусть m и n — нечетные натуральные числа. Если они дают одинаковый остаток от деления на 4, то либо $mn \mod 4 = 1$, либо $mn \mod 4 = 9 \mod 4 = 1$. В любом случае $mn - 1$ кратно 4. Если m и n дают разные остатки от деления на 4, то $mn \mod 4 = 3$, и $mn - 1$ на 4 не делится.

Заметим, что при делении на 4 число 777^{2021} дает остаток 1, а 555^{2021} и 999^{2021} — остаток 3. Значит, на 4 делится только число $999^{2021} \cdot 555^{2021} - 1$.