Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2021/2022 учебный год

Задания для 6–7 классов

1. (15 баллов) *В книжном магазине установлено правило «суммирования» скидок: «если на товар действуют разные виды скидок, то они применяются последовательно друг за другом». Например, если на товар действуют две скидки А% и Б%, то первая скидка применяется к исходной стоимости товара, а вторая — к результату действия первой скидки. Сейчас в магазине действуют две скидки: «Осенняя» в 25% и «Рандомная» — ненулевая скидка на целое число процентов, определяемая в момент оформления покупки. Некто, имеющий карту постоянного покупателя, дающую скидку 20% на все товары, приобрел за 69 рублей книгу, начальная стоимость которой была 230 рублей. Каков был размер «Рандомной» скидки?*

Ответ: 50%.

Решение. Заметим, что последовательность применений скидок несущественна, т. к. применение скидки в А% равносильно умножению стоимости товара на $\left(1-\frac{A}{100}\right)$. Пусть R — величина «рандомной» скидки. Тогда в результате «суммирования» трех скидок мы получим

$$230 \cdot \left(1-\frac{25}{100}\right) \cdot \left(1-\frac{20}{100}\right) \cdot \left(1-\frac{R}{100}\right) = 69 \Longleftrightarrow R = 50.$$

2. (15 баллов) *Назовем словом любую конечную последовательность букв русского алфавита. Сколько различных четырехбуквенных слов можно составить из букв слова КАША? А из букв слова ХЛЕБ? В ответе укажите сумму найденных чисел.*

Ответ: 36.

Решение. В слове ХЛЕБ все буквы различные. Значит, переставляя буквы, мы получим $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ слова. Из слова КАША можно составить 12 слов. Действительно, для букв К и Ш есть $4 \cdot 3 = 12$ позиций, а на оставшиеся места пишем буквы А. Таким образом, в сумме получаем $24 + 12 = 36$ слов.

3. (35 баллов) *Журналисты выяснили, что*

а) в роду царя Пафнутия все потомки — мужчины: у самого царя было 2 сына, у 60 его потомков — тоже по 2 сына, а у 20 — по одному;

б) в роду царя Зиновия все потомки — женщины: у самого царя было 4 дочери, у 35 его потомков — по 3 дочери, у других 35 — по одной.

У остальных потомков обоих царей детей не было. У кого из царей потомков было больше?

Ответ: У Зиновия.

Решение. Нам нужно найти суммарное количество детей в роду Пафнутия, включая детей самого царя. Оно равно $60 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 2 = 142$. Суммарное количество детей в роду царя Зиновия равно $4 + 35 \cdot 3 + 35 \cdot 1 = 144$.

4. (35 баллов) *В государстве есть 11 городов и столица. Между столицей и остальными городами организованы двусторонние автобусные маршруты, каждый из которых (в обоих направлениях) занимает 7 часов. Нестоличные города соединены дорогами с двусторонним движением циклически: 1-й город со 2-м, 2-й с 3-м, ..., 10-й с 11-м, 11-й с 1-м. Время движения автобуса по любой из этих дорог составляет 3 часа. При использовании транзитного маршрута (между городами, не сообщающимися друг с другом напрямую) каждая пересадка требует 2 часов. Известно, что дольше всего добираться из города А в город Б. Пассажир выбрал оптимальный (по времени) маршрут из А в Б, после чего транспортная компания сократила время пересадок с 2-х до 1,5 часов. Сможет ли пассажир перестроить свой маршрут так, чтобы он занимал меньше времени (чем уже выбранный)?*

Ответ: Нет.

Решение. Пусть x — время, требуемое на пересадку, t — минимальное время проезда из А в Б. Проехать из 1-го нестоличного города в 6-й оптимальным образом можно либо транзитом через столицу, либо «по кольцу». В первом случае время проезда составит $2 \cdot 7 + x = 14 + x$ часов, а во втором — $5 \cdot 3 + 4 \cdot x = 15 + 4x$. По условию $t \geqslant \min\{14 + x,\ 15 + 4x\} = 14 + x$ часов. Но из А в Б тоже можно попасть за $14 + x$ часов транзитом через столицу (сами А и Б столицей быть не могут, поскольку $t \geqslant 14 + x > 7$). Таким образом, путь через столицу является оптимальным независимо от времени пересадки.

5. (35 баллов) *В классе на доске был записан пример на сложение двух целых чисел. Отличник Петя на перемене мысленно сложил эти числа и получил 2021. Хулиган Вася подрисовал к одному из чисел на конце цифру 0. Когда начался урок, решать пример к доске вызвали Васю. В результате сложения он получил число 2221. Можете ли вы определить, верно посчитал Вася или нет?*

Ответ: Вася посчитал неверно.

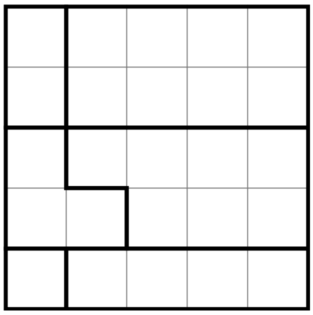
Решение. Обозначим написанные на доске целые числа через x и y. Тогда $x + y = 2021$. Пусть Вася подрисовал 0 к числу x. Если дальнейшие вычисления Васи верны, то $10x + y = 2221$. Вычитая записанные равенства, мы получим $9x = 200$, что невозможно ни для какого целого x.

6. (50 баллов) *Квадрат 5×5 клеточек разрезали на несколько частей разной площади, каждая из которых состоит из целого числа клеточек. Какое максимальное количество частей могло получиться при таком разрезании?*

Ответ: 6.

Решение. Покажем, что больше 6 частей быть не может. Действительно, суммарная площадь 7 частей не может быть меньше, чем $1+2+3+4+5+6+7=28$, то есть она превосходит площадь квадрата.

Теперь покажем, как можно разрезать квадрат 5×5 на 6 разновеликих частей:



Таким образом, площади кусочков будут равны 2, 8, 3, 7, 1 и 4.

7. (50 баллов) *Из чисел от 1 до 200 выбрали одно или несколько в отдельную группу, обладающую следующим свойством: если в группе есть хотя бы два числа, то сумма любых двух чисел из этой группы делится на 5. Какое наибольшее количество чисел может быть в группе с таким свойством?*

Ответ: 40.

Решение. Предположим, что в группу отобрали число A, дающее остаток $i \neq 0$ при делении на 5. Если в группе есть ещё число B, то оно должно давать остаток $5-i$ при делении на 5, чтобы $A+B$ делилось на 5. Покажем, что других чисел в этой группе быть не может. Пусть там есть еще число C, а $j = C \mod 5$. Тогда на 5 делятся числа $i+j$ и $5-i+j$, а также их разность, равная $2i-5$, что невозможно при $i \neq 0$.

Рассмотрим теперь альтернативный случай, когда все числа в группе делятся на 5. В указанном диапазоне есть ровно 40 чисел, кратных 5, и все эти числа можно одновременно включить в группу.

8. (50 баллов) *Каждый из 12 рыцарей, сидящих за круглым столом, задумал по числу, причем все числа различны. Каждый рыцарь утверждает, что задуманное им число больше чисел, задуманных его соседями справа и слева. Какое наибольшее количество этих утверждений может быть верно?*

Ответ: 6.

Решение. Перенумеруем рыцарей по порядку числами от 1 до 12. В парах (1, 2), (3, 4), ..., (11, 12) хотя бы один из рыцарей лжет (а именно, тот, кто загадал меньшее число). Значит, верных утверждений может быть не более 6. Теперь приведем пример, когда верны ровно 6 утверждений. Пусть рыцари с нечетными номерами загадали числа от 1 до 6, а с четными — числа от 7 до 12 (в любом порядке). Тогда правду говорят все рыцари с четными номерами.

9. (50 баллов) *В раздевалке детского сада в корзине для вещей-потеряшек оказалось 30 варежек, из них 10 синих, 10 зеленых, 10 красных, 15 правых и 15 левых. Всегда ли можно составить из этих варежек комплекты из правой и левой варежки одного цвета для 5 детей?*

Ответ: Можно всегда.

Решение. Предположим, что во всех цветах число левых и правых варежек различно (иначе сразу имеем 5 нужных комплектов). Тогда в каждом цвете определим, каких варежек меньше — правых или левых. Хотя бы в двух цветах из трех меньшим будет количество варежек одного типа (пусть это левые варежки синего и красного цвета). С другой стороны, в синем и красном цвете в сумме имеется не менее 5 левых варежек, так как левых зеленых варежек не больше 10. Осталось заметить, что для каждой левой варежки синего или красного цвета найдется правая варежка того же цвета, поскольку правых варежек больше.

10. (50 баллов) *В раздевалке детского сада в корзине для вещей-потеряшек оказалось 30 варежек, из них 10 синих, 10 зеленых, 10 красных, 15 правых и 15 левых. Всегда ли можно составить из этих варежек комплекты из правой и левой варежки одного цвета для 6 детей?*

Ответ: Нет, не всегда.

Решение. В корзине могло быть 10 правых красных варежек, 10 левых зеленых и по 5 штук правых и левых синих. Из них можно составить только 5 пар одного цвета (а именно, синего).